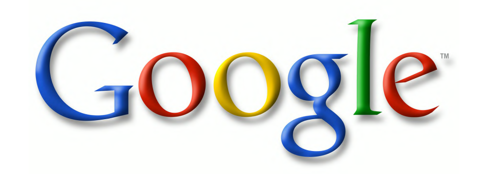
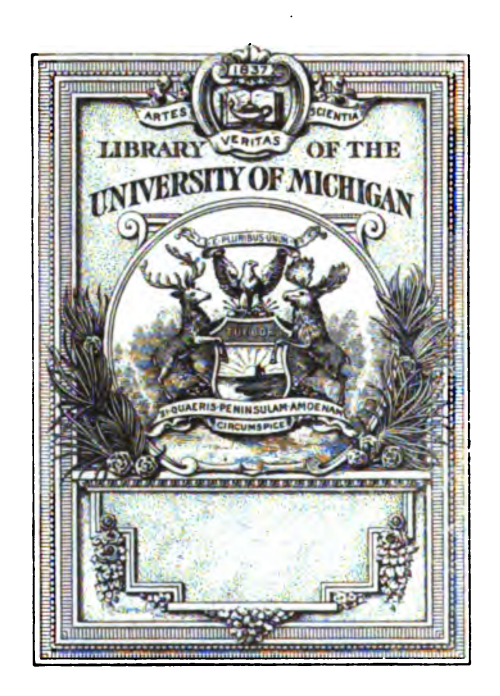
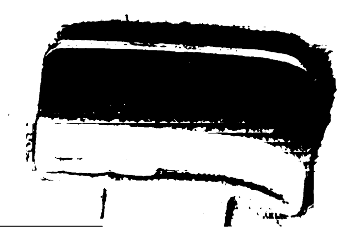

Google


B 448098




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



SAMMLUNG VON PROBLEMEN

DER

ANALYTISCHEN

MECHANIK.

ZUM GEBRAUCHE BEI VORLESUNGEN UND
ZUR ÜBUNG FÜR DIE STUDIERENDEN DER THEORETISCHEN MECHANIK
AN UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

VON

FERDINAND KRAFT.

ERSTER BAND.

MIT ÜBER 300 TEXTFIGUREN.

STUTTGART,
J. B. METZLERSCHE BUCHHANDLUNG.
1884.

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei in Stuttgart.

Vorwort.

Bei der Bearbeitung und Herausgabe dieser Sammlung verfolgte ich den Zweck, ein Buch zu schaffen, welches gleichen englischen und französischen Werken an die Seite gestellt werden könne, damit der deutsche Studierende es nicht mehr nötig habe, sich mit zeitraubenden Übersetzungen abzumühen, ehe er mit den Lehren der theoretischen Mechanik genügend vertraut ist. Ausserdem soll das Buch aber auch für den Lehrer, dessen knapp bemessene Zeit ihm die Ausarbeitung von Übungsbeispielen kaum gestattet, einen nützlichen Commentar bei seinen Vorlesungen abgeben, weshalb der Inhalt desselben nicht auf das Allernotwendigste beschränkt werden durfte.

Kurz gesagt: „dem Studierenden zur Übung, dem Lehrenden zur Erleichterung seines Berufes“ war die Devise bei der ganzen Arbeit.

In wie weit das vorgesteckte Ziel erreicht worden ist, wird der Gebrauch in diesen beiden Richtungen zeigen.

Herr William Walton M. A. &c. an der Universität Cambridge, welcher mir die freie Benutzung seines gleichnamigen Werkes: „Collection of Problems of the Theoretical Mechanics“ (an das sich auch das Buch von Jullien: „Problèmes de Mécanique rationelle“ anlehnt) mit ausserordentlicher Generosität gestattete, hat mir dadurch die Arbeit wesentlich erleichtert. Auch das sehr wertvolle und eine Menge von Problemen enthaltende Werk von Routh: „Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, 3. Edit., London 1877“ hat vorzugsweise Beachtung gefunden.

Die Einteilung des Stoffes schliesst sich im allgemeinen an diejenige von Herrn Geh. Hofrat Professor Dr. Schell in seinem ausgezeichneten Werke: „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ an. Beinahe jedes Kapitel enthält in der Einleitung oder an sonst geeigneter Stelle kurze geschichtliche Bemerkungen, zusammengestellt von W. Walton, in welchen die Verdienste der Koryphäen in der reinen Mechanik gewürdigt werden. Soweit die Probleme nicht Originalarbeiten des Verfassers sind, wurden sie, wenn dieses irgend möglich war, mit voller Quellenangabe (Autorname und Ort des ersten Erscheinens) versehen.

Herrn William Walton M. A. und Herrn Geh. Hofrat Schell, welch' letzterer mir vielfach beratend während der langen Zeit der Bearbeitung zur Seite stand, spreche ich meinen tief gefühlten Dank aus.

Die Verlagshandlung hat es sich sehr angelegen sein lassen, das Buch zu möglichst billigem Preise herzustellen, um den Studierenden dessen Anschaffung zu erleichtern, dabei dasselbe reich ausstattend, wofür ich mich derselben zu Dank verpflichtet fühle.

Indem ich das Buch der Öffentlichkeit übergebe und wohlwollender Beurteilung empfehle, hoffe ich, dass sein Inhalt als nutzbringend sich erweisen möge.

Heidelberg im November 1884.

F. Kraft.

Hauptinhalt des ganzen Werkes.

Inhalt des ersten Bandes.

Erster Teil.

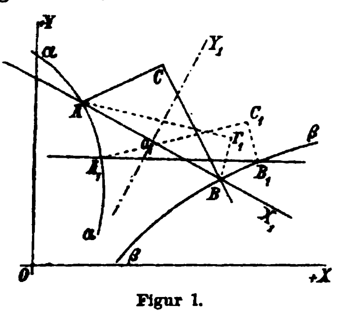
Geometrie der Bewegung.

Bewegung eines unveränderlichen Systemes parallel einer Ebene.

Die Bewegung eines räumlichen, unveränderlichen Systemes parallel einer Ebene ist stets äquivalent einer Rotation um eine bestimmte, zu jener Ebene senkrechte Axe; sie besteht in einer continuierlichen Folge von Rotationen um die Erzeugungslinien eines zu dieser Ebene senkrechten Cylinders (C) als Axen; sie besteht in dem Rollen einer bestimmten Cylinderfläche (Γ) des beweglichen Systemes auf einer festen Cylinderfläche (C) des Raumes, ohne Gleiten. Die erzeugende Linie des Cylinders, um welche das System eine unendlich kleine Rotation ausführt, wird „augenblickliche Rotationsaxe" oder „Momentanaxe" genannt.

Bewegt sich ein ebenes System parallel seiner Ebene oder in seiner Ebene, so besteht seine Ortsveränderung in dem Rollen einer bestimmten Curve (Γ) des Systemes auf einer bestimmten festen Curve (C) der Ebene, ohne Gleiten; die augenblickliche, unendlich kleine Rotation des Systemes erfolgt um einen bestimmten Punkt der Curve (C), um das „momentane Rotationscentrum" oder „Momentancentrum". Die Bewegung der einzelnen Punkte des Systemes ist durch die bekannte Bewegung zweier seiner Punkte vollständig bestimmt, so dass in diesem Falle für jede Lage (Phase) des Systemes die Momentanaxe C, die ihr entsprechende Erzeugende Γ der beweglichen Cylinderfläche, mithin auch die Cylinderflächen (C) und (Γ) gefunden werden können.

Um die Gleichungen für die Curven (C) und (Γ) eines ebenen, unveränderlichen, beweglichen Systemes, welches in seiner Ebene fortschreitet, zu finden, nehmen wir allgemein an, dass zwei seiner Punkte, A und B, stets auf gewissen, gegebenen, festen Curven in der Ebene des Systemes bleiben, wobei natürlich der Abstand dieser beiden Systempunkte während der ganzen Bewegung sich nicht ändert. Es seien α und β die festen Curven, auf denen die Systempunkte A und B (Fig. 1) sich zu bewegen haben; ferner sei AB die diese Punkte verbindende Gerade bei einer beliebigen Lage des Systemes. Konstruieren wir für die Punkte A und B die Normalen der Curven α und β, so schneiden sich dieselben in dem Momentancentrum C. Wird für alle Lagen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... von AB so



Figur 1.

verfahren, dann ergeben sich die entsprechenden Momentancentra C_1, $C_2, \ldots$, deren Gesamtheit die Curve (C) der Momentancentra (die Curve des Geschwindigkeitspoles) liefert. Verzeichnen wir ferner über AB als Basis alle Dreiecke ABC, $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2, \ldots$, so befinden sich die der gemeinschaftlichen Seite AB gegenüberliegenden Eckpunkte C oder Γ auf der Curve (Γ) des Systemes, welche auf der festen Curve (C) rollt.

Die Bewegung des Systems beziehen wir auf ein rechtwinkeliges, in seiner Ebene beliebig gelegenes Coordinatensystem mit den Axen OX, OY. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes A der Curve α seien x_1, y_1, diejenigen des entsprechenden Punktes B der Curve β, x_2, y_2, dann stehen x_1 und y_1, sowie x_2 und y_2 durch die gegebenen Gleichungen der Curven α und β miteinander in Verbindung, können also als Functionen dritter Variablen t_1 und t_2 gedacht werden. Bezeichnen X und Y die laufenden Coordinaten der Curvennormalen für die Punkte A und B, dann sind deren Gleichungen, in welchen die Accente die Differentiationen nach t_1 und t_2 bedeuten,

$$(y_1 - Y)\, y'_1 + (x_1 - X)\, x'_1 = o, \qquad (y_2 - Y)\, y'_2 + (x_2 - X)\, x'_2 = o,$$

und wenn $a = AB$ den unveränderlichen Abstand der Systempunkte A und B darstellt, erscheint noch die Gleichung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2.$$

Die Elimination der Variablen t_1 und t_2 aus diesen drei Gleichungen giebt die Gleichung der Curve (C) in X und Y.

Die Richtungscosinus der Normalen in den Punkten A und B und der Systemgeraden AB sind

$$\frac{y'_1}{\sqrt{x'^2_1 + y'^2_1}} \quad -\frac{x'_1}{\sqrt{x'^2_1 + y'^2_1}}; \quad \frac{y'_2}{\sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}} \quad -\frac{x'_2}{\sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}}; \quad \frac{x_2 - x_1}{a}, \quad \frac{y_2 - y_1}{a}.$$

Bezeichnen δ_1 und δ_2 die Neigungswinkel der Normalen gegen AB, dann ist

$$\cos\delta_1 = \frac{(x_2 - x_1)\, y'_1 - (y_2 - y_1)\, x'_1}{a\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \qquad \cos\delta_2 = \frac{(x_2 - x_1)\, y'_2 - (y_2 - y_1)\, x'_2}{a\sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}}.$$

Wählen wir die Gerade AB als Abscissenaxe, die durch ihren Mittelpunkt zu ihr gezogene Senkrechte als Ordinatenaxe eines dem beweglichen Systeme angehörigen Coordinatensystemes mit den Coordinaten X, Y, so gelangen wir zu den Beziehungen

$$(X + \tfrac{1}{2}a)\cos\delta_1 + Y\sin\delta_1 = o; \qquad (X - \tfrac{1}{2}a)\cos\delta_2 + Y\sin\delta_2 = o.$$

Eliminieren wir hieraus δ_1, δ_2, t_1, t_2 mittelst der vorhergehenden Relationen und benutzen wir noch die Gleichung des Abstandes der Systempunkte A und B, alsdann ergiebt sich die Gleichung der Curve (Γ) in X und Y.

Sind α, β die Coordinaten eines beliebigen Systempunktes D bezüglich des dem beweglichen Systeme angehörigen Coordinatensystemes, dessen Ursprung die Mitte von AB und dessen Abscissenaxe die Gerade AB selbst ist, X, Y die Coordinaten des Punktes D, bezogen auf die festen Coordinatenaxen in der Ebene der Bewegung, so haben wir zur Ermittelung der Bahn dieses Systempunktes das Gleichungensystem

$$X = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + \alpha\cos(\alpha X) + \beta\cos(\beta X), \quad Y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) + \alpha\cos(\alpha Y) + \beta\cos(\beta Y),$$

$$\cos(\beta X) = \frac{x_2 - x_1}{a}, \ \cos(\alpha Y) = \frac{y_2 - y_1}{a}, \ \cos(\beta X) = -\sin(\alpha X), \ \cos(\beta Y) = +\sin(\alpha Y),$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2.$$

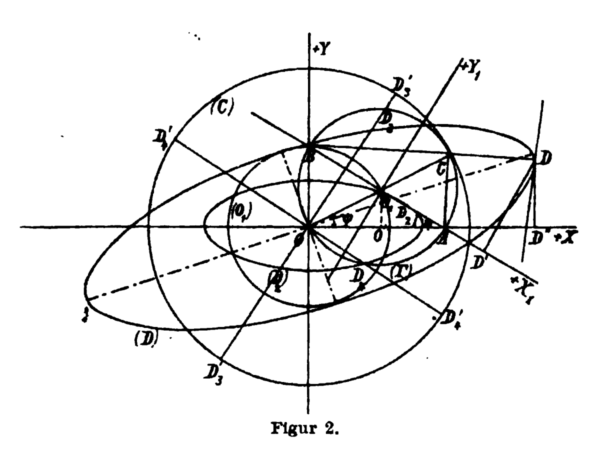
Aus diesen Relationen folgt die Gleichung der Bahn des Punktes D durch Elimination der Grössen t_1 und t_2.

Um das Jahr 150 v. Chr. entdeckte Nicomedes die Conchoide. Der Erste, welcher das Momentancentrum bemerkte, war Cartesius; es geschah dieses bei Erzeugung der

Cycloide: „Lettres de Descartes, Tom. II. p. 39.“ (Ausgabe von 1724.) Johann Bernoulli entdeckte das Momentancentrum für die allgemeine Bewegung eines ebenen, unveränderlichen Systemes in seiner Ebene: De Centro Spontaneo Rotationis; Opera, Tom. IV. p. 265, 1742. Die Bewegung räumlicher Systeme erforschten zuerst D'Alembert: Traité de la Precession des Équinoxes, 1749, und Euler: Mém. de l'Acad. de Berlin pour 1750, 1758; Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum, 1765; Formulae Generales pro Translatione quaqunque Corporum Rigidorum (Novi Commentarii Acad. Petropolit. p. 1795, T. XX). Weitere Namen von Männern, welche sich um diesen Teil der Mechanik verdient gemacht haben, sind: Chasles, Jonquières, Möbius, Rodingues, Lamarle, Stegmann, Chelini, Resal etc.

Der Leser, welcher sich eingehend über diesen Gegenstand zu informieren wünscht, wird verwiesen auf das ausgezeichnete Werk „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ von Schell.

1. Ein ebenes System bewegt sich in seiner Ebene so, dass stets zwei seiner Punkte A und B auf zwei festen Geraden OX, OY, die einen rechten Winkel mit einander bilden,, fortrücken. Die Bewegung des Systemes soll untersucht werden.



Figur 2.

Es seien A, B (Fig. 2) die zwei Punkte, welche sich auf den festen Geraden OX, OY resp. zu bewegen haben, in einer beliebigen ihrer Lagen. Den Ort des dieser Phase entsprechenden Momentancentrums C erhalten wir durch den Schnitt der in A und B auf die Bahnen OX, OY dieser Punkte gefällten Senkrechten AC, BC, wodurch das Rechteck $OACB$ entsteht, dessen Diagonale OC gleich dem constanten Abstande a der Punkte A und B ist. Weil daher das Momentancentrum C für jede Lage von AB um die Strecke a vom Punkte O entfernt ist, so ist die Curve der Momentancentra (C) ein um O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AB = a$ beschriebener Kreis. Um die Gleichung der Curve (C) abzuleiten, nehmen wir die festen Geraden OX, OY zu Coordinatenaxen, so dass die Coordinaten des Geschwindigkeitspoles C sind $X = OA$, $Y = AC$. Bezeichnen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Coordinaten der Punkte A und B, dann folgt die Gleichung der Curve (C) aus dem Gleichungensystem:

$$(X - x_1)\,dx_1 + (Y - y_1)\,dy_1 = o, \quad (X - x_2)\,dx_2 + (Y - y_2)\,dy_2 = o,$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2,$$
$$y_1 = o, \qquad x_2 = o,$$

wovon die beiden letzten Relationen die Gleichungen der Bahnen der Punkte A und B sind. Damit ergiebt sich als Gleichung der Curve der Momentancentra

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Die Curve (Γ) erhalten wir construierend dadurch, dass wir über AB als Basis im beweglichen System alle Dreiecke wie ABC verzeichnen, es befinden sich alsdann die AB gegenüberliegenden Eckpunkte derselben auf der verlangten Curve. Nun sind aber alle diese Dreiecke bei C resp. Γ rechtwinkelig, mithin ist die Curve (Γ) ein über AB als Durchmesser beschriebener Kreis, welcher stets durch den festen Punkt O geht. Nehmen wir den Mittelpunkt O_1 der Strecke AB als Ursprung des beweglichen Coordinatensystemes mit $O_1 A$ als positivem Teile der Abscissenaxe AB, die zu ihr senkrechte Ordinatenaxe $O_1 Y$ positiv nach oben hin, bezeichnen die Coordinaten des Punktes Γ für dieses System mit X, Y, den Winkel BAO mit ψ, dann erhalten wir die Relationen

$$Y = \left(\frac{a}{2} + X\right) tg\,\psi, \qquad Y = \left(\frac{a}{2} - X\right) cotg\,\psi,$$

aus denen folgt

$$X^2 + Y^2 = \frac{a^2}{4},$$

welches die Gleichung der Curve (Γ) ist.

Die vorgeschriebene Bewegung des Systemes kann mithin auch dadurch erzeugt werden, dass wir einen mit dem Systeme fest verbundenen, durch O gehenden Kreis (Γ) auf der Innenseite eines in der Ebene der Bewegung festen Kreises (C), von doppelt so grossem Halbmesser und mit dem Mittelpunkt in O, rollen lassen.

Weiter haben wir die Bahn eines beliebigen Systempunktes D zu erforschen. Die Coordinaten dieses Punktes seien (Fig. 2, S. 3) bezüglich der beweglichen Axen $O_1 D' = \alpha$, $D'D = \beta$, hinsichtlich der festen Axen $OD'' = X$, $D''D = Y$. Aus der Figur lässt sich leicht erkennen, dass

$$X = \frac{a}{2} \cos\psi + \alpha \cos\psi + \beta \sin\psi = \left(\frac{a}{2} + \alpha\right) \cos\psi + \beta \sin\psi, \quad (1)$$

$$Y = \frac{a}{2} \sin\psi - \alpha \sin\psi + \beta \cos\psi = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right) \sin\psi + \beta \cos\psi. \quad (2)$$

Durch diese Gleichungen ergiebt sich

$$\sin\psi = \frac{X - \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)\cos\psi}{\beta} \ (3), \qquad \cos\psi = \frac{Y - \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)\sin\psi}{\beta}. \quad (4)$$

Setzen wir $\left(\frac{a^2}{4} - \alpha^2 - \beta^2\right) = \Delta$, dann folgt aus (1) und (4), sowie aus (2) und (3)

$$\varDelta \sin \psi = \left(\frac{a}{2} + \alpha\right) Y - \beta X; \ (5) \qquad \varDelta \cos \psi = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right) X - \beta Y. \quad (6)$$

Indem wir nun die Gleichungen (5) und (6) quadrieren und die resultierenden Gleichungen addieren, gelangen wir zu

$$\varDelta^2 = \left\{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right\} X^2 - 2\,a\,\beta\,X\,Y + \left\{\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 + \beta^2\right\} Y^2,$$

oder wenn wir $\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \beta^2 = \delta_1{}^2$, $\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 + \beta^2 = \delta_2{}^2$ setzen, wo offenbar $\delta_1{}^2 = \overline{A\,D}^2$, $\delta_2{}^2 = \overline{B\,D}^2$ ist, zu

$$\varDelta^2 = \delta_1{}^2 X^2 - 2\,a\,\beta\,X\,Y + \delta_2{}^2 Y^2.$$

Damit ist die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes gefunden. Diese Bahn ist eine Curve zweiten Grades, sie hat einen Mittelpunkt, dessen Coordinaten X_0, Y_0 aus den Gleichungen folgen $\delta_1{}^2 X_0 - a\,\beta\,Y_0 = 0$, $a\,\beta\,X_0 - \delta^2_2\,Y_0 = 0$, es sind dieselben mithin $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$. Das Quadrat des Coëfficienten des Mittelgliedes rechts, vermindert um das vierfache Produkt der Coëfficienten der äusseren Glieder derselben Seite der Gleichung giebt

$$4\,a^2\beta^2 - 4\,\delta_1{}^2\delta_2{}^2 = 4\left\{a^2\beta^2 - \left[\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right]\left[\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 + \beta^2\right]\right\}$$
$$= -4\left\{\frac{a^2}{4} - (\alpha^2 + \beta^2)\right\}^2,$$

welcher Ausdruck demnach nur negativ sein kann, indem das Quadrat der Klammergrösse stets positiv ist. Daraus geht hervor, dass die Bahn eines beliebigen Systempunktes eine Ellipse ist, mit dem Mittelpunkte im Durchschnittspunkte der festen Geraden $O\,X$, $O\,Y$. Wie die Hauptaxen dieser Curve zu bestimmen sind, lehrt die analytische Geometrie.

Für einen Systempunkt, welcher auf dem Strahle $A\,B$ liegt, ist $\beta = 0$, folglich die Gleichung seiner Bahn

$$\delta_1{}^2 X^2 + \delta_2{}^2 Y^2 = \varDelta^2, \qquad \text{oder} \qquad \frac{X^2}{\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2} = 1.$$

Jeder Punkt des Strahles $A\,B$ beschreibt mithin eine Ellipse mit dem Mittelpunkte in O, den festen Coordinatenaxen als Hauptaxenrichtungen und den Halbaxen $\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)$, $\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)$. Mit $\alpha = \beta = 0$ bekommen wir die Bahn des Mittelpunktes O_1 der Strecke $A\,B$, ihre Gleichung ist $X^2 + Y^2 = \frac{a^2}{4}$, was zeigt, dass dieser Punkt einen Kreis um O als Mittelpunkt, von einem Radius gleich demjenigen der Curve (Γ) beschreibt. In dem besonderen Falle, wo $\left\{\frac{a^2}{4} - (\alpha^2 + \beta^2)\right\} = \varDelta = 0$, also $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{4}$,

ist, liegt der Systempunkt D auf dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreise (Γ). Die Bahngleichung eines solchen Systempunktes ist

$$\delta_1{}^2 X^2 - 2\alpha\beta XY + \delta_2{}^2 Y^2 = 0,$$

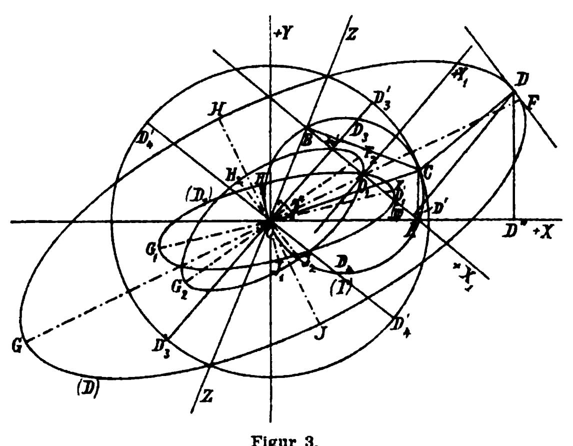
sie ist diejenige zweier gerader Linien, denn sie spaltet sich in die beiden Gleichungen

$$Y = \frac{\frac{a}{2} - \alpha}{\beta} X, \qquad \text{und } Y = \frac{\beta}{\frac{a}{2} + \alpha} X,$$

und stehen mithin diese Linien senkrecht aufeinander. Deshalb kann diese Bewegung in der Technik zu Geradführungen benutzt werden.

Die Normale der Bahn des Systempunktes D erhalten wir dadurch, dass wir ihn und das entsprechende Momentancentrum C mittelst einer geraden Linie verbinden, die durch D zu ihr gezogene Senkrechte giebt die Tangente der Bahn (D) für diesen Punkt. Die Figur 2 zeigt die elliptische Bahn eines beliebigen Systempunktes D, die Bahn (D_2) eines beliebigen Punktes D_2 der Systemgeraden AB, welcher Hauptaxen mit den festen Coordinatenaxen zusammenfallen, so wie die Kreisbahn (O_1) des Mittelpunktes der Strecke AB. Die Gerade $D_3 O D'_3$ giebt die Bahn des auf dem Kreise (Γ) gelegenen Systempunktes D_3, die zu ihr senkrechte Linie $D_4 O D'_4$ diejenige des Systempunktes D_4.

2. Ein ebenes System bewegt sich in seiner Ebene so, dass stets zwei seiner Punkte A, B auf zwei festen, unter einem beliebigen spitzen Winkel γ sich schneidenden Geraden fortschreiten. Die Bewegung des Systemes ist zu erforschen.



Figur 3.

Es seien OX, OZ (Fig. 3) die Führungsgeraden der Punkte A, B, mit $\sphericalangle XOZ = \gamma$. Wir wählen den Schnittpunkt O dieser Linien als Coordinatenursprung, die Gerade OX als Abscissen-, die zu ihr senkrechte Linie OY als Ordinatenaxe des festen Coordinatensystemes. Für eine beliebige Lage der Punkte A, B, deren unveränderlicher Abstand a sein möge, ist das Momentancentrum C der Durchschnittspunkt der in A und B auf OX und OZ errichteten Senkrechten.

Das dadurch entstandene Viereck $OACB$ ist ein Kreisviereck, weil $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC = \frac{\pi}{2}$. Die Gleichungen der Bahnen der Punkte A und B sind

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = x_2 \, tg\, \gamma,$$

die Gleichungen der Normalen AC und BC, in A und B, zu OX und OZ lauten

$$X - x_1 = 0, \qquad (X - x_2)\, d x_2 + (Y - y_2)\, d y_2 = 0,$$

und für den unveränderlichen Abstand der Systempunkte A und B haben wir

$$(x_1 - x_2)^2 + y_2{}^2 = a^2.$$

Aus diesen fünf Gleichungen ergiebt sich als Gleichung des Ortes der Momentancentra

$$X^2 + Y^2 = a^2 \, cosec^2 \gamma.$$

Die Curve (C) ist mithin ein Kreis vom Radius $a \, cosec\, \gamma$, dessen Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkte O der Führungsgeraden zusammenfällt.

Um die Curve (Γ) zu finden, nehmen wir den Mittelpunkt O_1 der Strecke AB als Ursprung, den Strahl AB als Abscissenaxe, $O_1 Y_1 \perp AB$ als Ordinatenaxe des beweglichen rechtwinkeligen Coordinatensystemes, bezeichnen mit X und Y die Coordinaten von Γ für dieses System, und setzen $\sphericalangle OAB = \psi$, $\sphericalangle ABC = \psi'$. Damit erhalten wir die Relationen

$$Y = \left(\frac{a}{2} - X\right) cotg\, \psi, \quad \left(\frac{a}{2} + X\right) = Y \, cotg\, \psi', \quad \psi' = (\gamma + \psi) - \frac{\pi}{2},$$

aus welchen durch Elimination der Winkel ψ und ψ' folgt

$$X^2 + Y^2 + a \, cotg\, \gamma \, . \, Y = \frac{a^2}{4}.$$

Dieses ist die Gleichung der Curve (Γ), welche sonach ebenfalls ein Kreis ist. Mit $X = 0$, ist $Y = -\frac{a}{2}\left\{ cotg\, \gamma \mp cosec\, \gamma \right\}$; mit $Y = 0$, ist $X = \pm \frac{a}{2}$. Dieser Kreis geht daher durch die Punkte A und B, wie dem sein muss, und — weil das Viereck $OACB$ ein Sehnenviereck — auch durch den festen Punkt O. Als Coordinaten des Mittelpunktes der Curve (Γ) ergeben sich $X_0 = 0$, $Y_0 = -\frac{a}{2} cotg\, \gamma$. Verschieben wir das Coordinatensystem parallel mit sich selbst so, dass dieser Punkt Anfangspunkt wird, dann ergiebt sich mit x und y als laufenden Coordinaten des neuen Systemes die Gleichung von (Γ)

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \, cosec^2 \gamma.$$

Der Halbmesser des Kreises (C) ist mithin doppelt so gross als der-

jenige des Kreises (Γ). Die vorgeschriebene Bewegung des Systemes kann folglich auch dadurch erzeugt werden, dass wir einen mit dem Systeme fest verbundenen, durch den festen Punkt O gehenden Kreis (Γ) auf der Innenseite eines festen Kreises (C), mit dem Mittelpunkte in O und von doppelt so grossem Durchmesser, rollen lassen.

Bestimmung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D. Zu dem Ende seien α, β die Coordinaten dieses Punktes bezüglich der beweglichen Axen $O_1 X_1$, $O_1 Y_1$, X, Y diejenigen für die festen Axen OX, OY. Weil die Coordinaten (x', y') des Mittelpunktes O_1 der Strecke AB für die festen Axen

$$x' = x_2 + \frac{a}{2} \cos \psi = y_2 \cotg \gamma + \frac{a}{2} \cos \psi = a \cotg \gamma \sin \psi + \frac{a}{2} \cos \psi,$$

und $y' = \frac{a}{2} \sin \psi$ sind, so sind die entsprechenden Coordinaten des Punktes D

$$X = \left(\frac{a}{2} + \alpha\right) \cos \psi + (\beta + a \cotg \gamma) \sin \psi, \quad Y = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right) \sin \psi + \beta \cos \psi.$$

Aus diesen Relationen folgt durch Elimination des Winkels ψ, was in ähnlicher Weise wie bei dem ersten Probleme zu geschehen hat, mit $\left\{\frac{a^2}{4} - (\alpha^2 + \beta^2 + a \beta \cotg \gamma)\right\} = \varDelta$ als Gleichung der Bahn des Punktes D

$$\varDelta^2 = \left\{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right) X - (\beta + a \cotg \gamma)\, Y\right\}^2 + \left\{\left(\frac{a}{2} + \alpha\right) Y - \beta X\right\}^2,$$

oder, durch Auflösung der Quadrate rechts und Ordnung der Glieder nach X und Y,

$$\varDelta^2 = \left\{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right\} X^2 - 2\left\{\alpha \beta + \left(\frac{a}{2} - \alpha\right) a \cotg \gamma\right\} X Y$$
$$+ \left\{\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 + \beta^2 + (2\beta + a \cotg \gamma)\, a \cotg \gamma\right\} Y^2,$$

und kürzer:

$$\varDelta^2 = \delta_1^2 X^2 - \varepsilon X Y + \delta_2^2 Y^2,$$

wobei die Bedeutung der Coëfficienten δ_1^2, ε, δ_2^2 sofort zu erkennen ist. Diese Bahn ist demnach eine Curve zweiten Grades und zwar eine Ellipse mit dem Mittelpunkte im Durchschnittspunkte O der beiden Führungsgeraden, denn die Coordinaten ihres Mittelpunktes sind zufolge der Gleichungen

$$2\delta_1^2 X_0 - \varepsilon Y_0 = 0, \text{ und } -\varepsilon X_0 + 2\delta_2^2 Y_0 = 0, \; X_0 = 0, \text{ und } Y_0 = 0,$$

ferner ist $\varepsilon^2 - 4\delta_1^2 \delta_2^2 = -4\left\{\frac{a^2}{4} - (\alpha^2 + \beta^2 + a \beta \cotg \gamma)\right\}^2$.

Die Bestimmung der Lage der Hauptaxen und deren Längen dieser Ellipse ist Sache der analytischen Geometrie. Die Tangente des doppelten Winkels φ, welchen die eine der Hauptaxenrichtungen mit der Abscissenaxe einschliesst, ist gegeben durch $tg\,2\,\varphi = -\frac{\varepsilon}{\delta_1^2 - \delta_2^2}$. Die Richtungsverhältnisse der Hauptaxen sind $tg\,\varphi' = \frac{R' - 2\,\delta_1^2}{-\varepsilon}$, $tg\,\varphi'' = \frac{R'' - 2\,\delta_2^2}{-\varepsilon}$, wo R' und R'' mittelst der Gleichung zu bestimmen sind $R = \delta_1^2 + \delta_2^2 \pm \sqrt{(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + \varepsilon^2}$, das obere Zeichen für R', das untere für R'' geltend. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, mit den Hauptaxenrichtungen als Coordinatenaxen, lautet

$$\frac{x^2}{\sqrt{\left(\frac{2\,\Delta^2}{R'}\right)^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{\left(\frac{2\,\Delta^2}{R''}\right)^2}} = 1,$$

so dass die Halbaxenlängen $\sqrt{\frac{2\,\Delta^2}{R'}}$ und $\sqrt{\frac{2\,\Delta^2}{R''}}$ sind.

Wir haben nun einige besondere Lagen des Systempunktes D ins Auge zu fassen. Befindet sich D auf der Systemgeraden AB, so ist $\beta = 0$, folglich die Gleichung seiner Bahn

$$\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 X^2 - 2\left(\frac{a}{2} - \alpha\right) a\,cotg\,\gamma\,.\,X\,Y + \left\{\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 + a^2\,cotg^2\,\gamma\right\} Y^2 = \left(\frac{a^2}{4} - \alpha^2\right)^2.$$

Die Gleichung der Bahn des Mittelpunktes O_1 von AB ist, weil für denselben $\alpha = \beta = 0$,

$$X^2 - 4\,cotg\,\gamma\,.\,X\,Y + (1 + 4\,cotg^2\,\gamma)\,Y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Damit ist gezeigt, dass jeder Punkt des Strahles AB, ausgenommen die Systempunkte A und B, eine Ellipse beschreibt. Mit $\Delta = \frac{a^2}{4} - (\alpha^2 + \beta^2 + a\,\beta\,cotg\,\gamma) = 0$, befindet sich der Punkt D auf dem um das Viereck $OACB$ beschriebenen Kreise (Γ); weil nämlich in diesem Falle $\alpha^2 + \beta^2 + a\,\beta\,cotg\,\gamma = \frac{a^2}{4}$ sein muss, so kann diese Gleichung nur dann erfüllt werden, wenn die Werte von α und β der Gleichung genügen $X^2 + Y^2 + a\,cotg\,\gamma\,.\,Y = \frac{a^2}{4}$, welche diejenige des genannten Kreises ist. Unter diesen Umständen wird die Bahngleichung

$$\delta_1^2\,X^2 - \varepsilon\,X\,Y + \delta_2^2\,Y^2 = 0,$$

sie spaltet sich in diejenigen zweier gerader Linien, welche sind

$$Y = \frac{\frac{a}{2} - \alpha}{\beta + a\,cotg\,\gamma}\,X, \qquad \text{und} \qquad Y = \frac{\beta}{\frac{a}{2} + \alpha}\,X.$$

Es giebt mithin unendlich viele Systempunkte, welche Ellipsen und ebenso viele Systempunkte, welche gerade Linien beschreiben.

Schliessen die Führungsgeraden OX, OZ einen rechten Winkel mit einander ein, dann wird $cotg\,\gamma = 0$, und kommen wir auf den unter der ersten Numer behandelten Spezialfall zurück, für welchen sich jetzt die Gleichungen der Curven (C), (Γ), (D) auch aus den vorstehenden Resultaten sofort ableiten lassen, was dem Bedürfnisse des Lesers anheimgegeben wird.

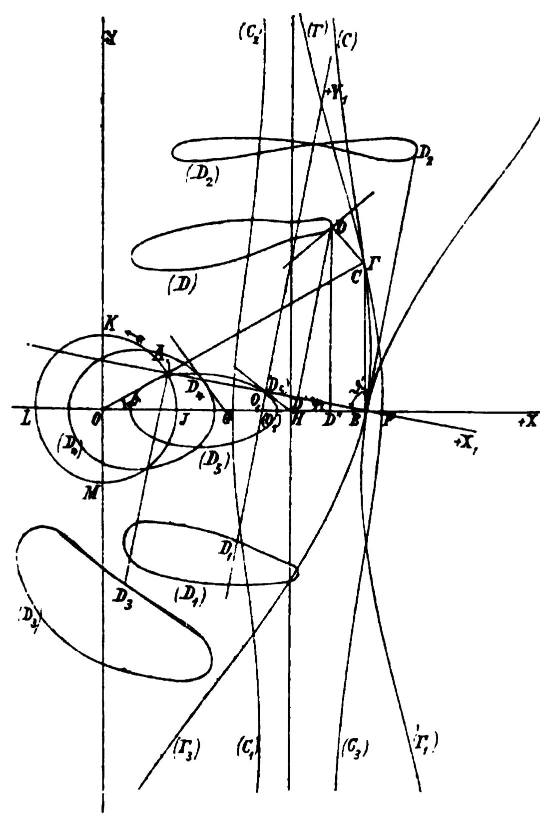
Mit $\gamma = \pi$ ist $cotg\,\gamma = \infty$, die beiden Führungsgeraden fallen alsdann in eine Linie hinein; sämtliche Systempunkte besitzen eine Translationsbewegung parallel zu dieser Linie, die Curven (C) und (Γ) sind mit dieser Linie zusammenfallende Kreise, denn ihre Radien sind unendlich gross.

Die Figur 3 (S. 6) zeigt die Curve (C), welche ein mit dem Radius $OC = a\,cosec\,\gamma$ um den Mittelpunkt O beschriebener Kreis ist, für eine beliebige Lage der Systemgeraden AB die Curve (Γ), sie ist ein mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}\,cosec\,\gamma$ um das Sehnenviereck $OACB$ verzeichneter Kreis. Der Systempunkt D beschreibt die Ellipse $DFHGJ$, ihre Hauptaxen sind FG und HJ. Ein beliebig gewählter Punkt D_1 auf dem Strahle AB beschreibt die Ellipse $D_1\,F_1\,H_1\,G_1\,J_1$ mit den Hauptaxen $F_1\,G_1$ und $H_1\,J_1$. Die Bahn des Mittelpunktes O_1 der Strecke AB ist die Ellipse $O_1\,F_2\,H_2\,G_2\,J_2$ mit den Hauptaxen $F_2\,G_2$ und $H_2\,J_2$. Ein auf dem Kreise (Γ) gelegener Punkt D_3 schwingt auf dem Durchmesser $D_3\,O\,D'_3$ der Curve (C), ebenso der Punkt D_4 auf dem Durchmesser $D_4\,O\,D'_4$ von (C).

Ptolemaeus kannte bereits die Epi- und Hypocycloiden. Cardano (geb. 1501 zu Pavia, gest. 1576, Professor der Medizin zu Bologna) untersuchte zuerst diese Curven sorgfältiger, er fand die hypocycloidische Bewegung und bewies, dass beim Rollen eines Kreises in einem anderen von doppelt so grossem Durchmesser jeder Punkt des ersteren eine Gerade beschreibt. Siehe auch Schell, Theorische Mechanik, Band I, S. 227 etc., zweite Auflage.

3. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass einer seiner Punkte einen festen Kreis beschreibt und ein zweiter Systempunkt auf einer durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehenden festen Geraden fortrückt. (Einfache Kurbelbewegung). Welches sind die Curven (C), (Γ) und die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes?

Es sei (Fig. 4, S. 11) O der Mittelpunkt des von dem Systempunkte A beschriebenen Kreises vom Halbmesser $OA = r$, B der auf der festen Ge-



Figur 4.

raden OX gleitende Systempunkt, der unveränderliche Abstand der Punkte A und B $AB = a$, OX Abscissen-, $OY \perp OX$ Ordinatenaxe des in der Ebene der Bewegung festen Coordinatensystemes, für welches die Coordinaten der Punkte A und B mit (x_1, y_1) und (x_2, y_2) bezeichnet werden sollen.

Machen wir $BC \perp OX$ und ziehen den Strahl OA, so schneiden sich diese Linien in dem Momentancentrum C für die gegebene Phase des Systemes. Sind X, Y die Coordinaten des Punktes C, dann erhalten wir zur Bestimmung der Gleichung der Curve (C) das Gleichungensystem

$$(X - x_1)\,dx_1 + (Y - y_1)\,dy_1 = 0, \qquad X - x_2 = 0,$$
$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2, \qquad (x_1 - x_2)^2 + y_1{}^2 = a^2,$$

aus welchem folgt

$$(X^2 + Y^2)(X^2 - a^2 + r^2)^2 = 4\,r^2 X.$$

Schneller gelangen wir zu einer Gleichung der Curve (C) durch Verwendung von Polarcoordinaten mit O als Pol, OX als Polaraxe, dem Polarwinkel $XOC = \vartheta$ und $OC = \varrho$ als Fahrstrahl. Aus den Dreiecken OBA und OBC lässt sich erkennen, dass $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2.\overline{OA}.\overline{OB}.\cos\vartheta$, $\overline{OB} = \varrho\cos\vartheta$ ist, womit sich als geforderte Gleichung ergiebt

$$(\varrho^2 - 2\,\varrho\,r)\cos^2\vartheta = a^2 - r^2, \text{ oder } \varrho^2 - 2\,\varrho\,r = (a^2 - r^2)\sec^2\vartheta. \quad (1)$$

Um diese Gleichung in eine solche für rechtwinkelige Coordinaten mit dem Ursprunge O umzugestalten, haben wir nur $\varrho\cos\vartheta = X$, $\varrho\sin\vartheta = Y$ einzuführen, was giebt

$$(X^2 + Y^2)(X^2 - a^2 + r^2)^2 = 4 r^2 X^2. \qquad (2)$$

Wie die Curve (Γ) durch Konstruktion zu finden, ist bekannt. Bequem lässt sich eine Gleichung dieser krummen Linie nur dadurch erhalten, dass wir ein Polarcoordinatensystem zugrunde legen. Wir wählen den Punkt B als Pol, die Gerade BA als Polaraxe, den Winkel $ABC = \vartheta'$ als Polarwinkel, bezeichnen den Fahrstrahl BC des Curvenpunktes C resp. Γ mit ϱ'. Mittelst der Figur zeigt sich, dass

$$\varrho' = \varrho \sin \vartheta, \qquad a \cos \vartheta' = r \sin \vartheta.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung (1) sind ϱ und ϑ zu eliminieren, was giebt

$$(\varrho'^2 - 2 \varrho' a \cos \vartheta')(r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta') = a^2 (a^2 - r^2) \cos^2 \vartheta', \qquad (3)$$

welches eine Polargleichung der Curve (Γ) ist. Setzen wir in dieser Relation $\varrho' \cos \vartheta' = X$, $\varrho' \sin \vartheta' = Y$, und entwickeln, so gelangen wir zu einer Gleichung für rechtwinkelige Coordinaten mit B als Ursprung und BA als Abscissenaxe, welche lautet:

$$\{X^2 + Y^2 - 2 a X\} \{(X^2 + Y^2) r^2 - a^2 X^2\} = a^2 (a^2 - r^2) X^2. \qquad (4)$$

Weil jetzt die Gleichungen der Curven (C) und (Γ) bekannt sind, können wir ihren Lauf etwas näher untersuchen, wobei drei Fälle zu unterscheiden sind, nämlich $a > r$, was bei Dampfmaschinen stets stattfindet, $a < r$ und $a = r$.

Erster Fall: $a > r$. Für die Curve (C) ergaben sich die Gleichungen (1) und (2). Aus (2) folgt

$$Y^2 = \left(\frac{4 r^2 X^2}{(X^2 - a^2 + r^2)^2} - 1 \right) . X^2,$$

was zeigt, dass diese Linie bezüglich der Abscissenaxe symetrisch ist. Mit $Y = 0$ bekommen wir $X = a \pm r$, d. h. die Curve schneidet die Abscissenaxe zweimal auf derselben Seite vom Coordinatenursprunge in den Abständen $a + r$ und $a - r$ von demselben. Mit $X = + \sqrt{a^2 - r^2}$ wird $Y = \pm \infty$, d. h. die Curve geht auf beiden Seiten der Abscissenaxe ins Unendliche. Legen wir durch den Endpunkt H der Abscisse $\sqrt{a^2 - r^2}$ eine parallele Gerade zur Ordinatenaxe, so nähern sich die beiden Curvenzweige dieser Linie asymptotisch; sie ist bezüglich der Geraden durch H nicht symetrisch, denn die Abstände der Schnittpunkte F und G der Curve und der Abscissenaxe von dieser Geraden sind verschieden, es ist $FH > GH$, nämlich $FH - GH = 2 (a - \sqrt{a^2 - r^2}) > 0$. Dass mit $X^2 = a^2 - r^2$, Y seine absolut grössten Werte annimmt, lässt sich auch mit Hilfe der Figur erkennen. Wird der feste Kreis vom Punkte A im Sinne des Pfeiles durchlaufen und fällt anfangs die Gerade AB mit der Abscissenaxe zusammen, so ist in diesem Momente F auf OX das Momentancentrum. Lassen wir nun die AB sich bewegen, dann erscheint der Teil F (C)

der Curve (C), welcher mit A auf der Ordinatenaxe, in K, die Ordinate $Y = +\infty$ besitzt. Indem sich A weiter bewegt, tritt das Momentancentrum nach $-\infty$ und gelangt nach G auf OX mit A auf OX, in L, wodurch das Curvenstück $(C_1)\,G$ erscheint. Bei dem Fortschritte des Punktes A von L bis M, im negativen Teile der Ordinatenaxe, durchläuft C das Curvenstück $G\,(C_2) + \infty$. Beschreibt der Punkt A den Viertelkreis MJ, dann ist $-\infty\,(C_3)\,F$ das entsprechende Stück der Curve (C). Wenn der Systempunkt A in K oder in M, so ist der Abstand des Punktes B von O, $= +\sqrt{a^2 - r^2}$, das Momentancentrum liegt alsdann auf dem durch H, resp. B, zu OY parallel gezogenen Strahle im Unendlichen, es schliesst sich mithin die Curve (C) im Unendlichen.

Die Polargleichung der Curve (C) giebt

$$\varrho = r + \sec\vartheta\,\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\vartheta}.$$

Indem wir den Punkt A von J aus nach K im Kreise sich bewegen lassen, erhalten wir

für	$\vartheta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$\varrho =$	$a + r$	∞	$a - r$	∞	$a + r$.

welches Schema den Lauf der Curve darthut, zeigt, dass die Polaraxe zweimal geschnitten wird, dass sich die Curve auf beiden Seiten dieser Axe ins Unendliche erstreckt, dass sie zwischen diesen Winkelwerten stetig ist, weil $\sec\vartheta$ und $\sin\vartheta$ sich innerhalb dieser Grenze stetig ändern. Die Symmetrie der Curve (C) bezüglich der Polaraxe folgt daraus, dass sich für $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ bis $\vartheta = 2\pi$, sowie von $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bis $\vartheta = \pi$ und $\vartheta = \pi$ bis $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ entsprechend gleiche Werte von ϱ ergeben. Auf die symmetrische Beschaffenheit unserer Curve bezüglich der Linie OX kann auch aus der hinsichtlich dieser Geraden vollkommen symmetrischen Bewegung der Systemgeraden AB geschlossen werden.

Aus der Polargleichung der Curve (Γ) entnehmen wir

$$\varrho' = a\cos\vartheta' + \frac{a^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta'}{\sqrt{r^2 - a^2\cos^2\vartheta'}}$$

Vermöge der Relation $a\cos\vartheta' = r\sin\vartheta$ finden wir noch
$\varrho'^2 - 2\varrho' r\sin\vartheta = (a^2 - r^2)\,tg^2\vartheta$, und $\varrho' = r\sin\vartheta + tg\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}$.
Mittelst dieser Gleichungen lässt sich das Tableau bilden:

Mit	ϑ	$=$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
ist	$\cos\vartheta'$	$=$	0	$\frac{r}{a}$	0	$-\frac{r}{a}$	0
	ϱ'	$=$	0	∞	0	∞	0.

Aus der Gleichung der Curve (Γ) für rechtwinkelige Coordinaten folgt

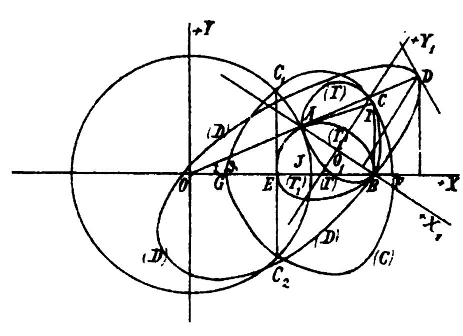
$$Y^2 = \frac{1}{2r^2}\left\{(a^2 - 2r^2)X^2 + 2ar^2X \pm aX\sqrt{a^2X^2 - 4ar^2X + 4a^2r^2}\right\}$$

Diese Gleichung zeigt, dass mit $X = 0$ auch $Y = 0$, dass ferner die Curve (Γ) bezüglich der Geraden BA symmetrisch ist. Durch unser Tableau und diese Resultate ist der Lauf der Curve (Γ), (Fig. 4, S. 11), welche in B einen Doppelpunkt besitzt und nach beiden Seiten der Ordinatenaxe BY abzweigt, im Allgemeinen charakterisiert. Die Figur 4 zeigt teilweise die Äste dieser krummen Linie. Vom Punkte $B\,[X = 0,\ Y = 0,\ \vartheta = 0,\ \vartheta' = \frac{\pi}{2}]$ ausgehend, erhalten wir den positiven Teil $B(\Gamma) + \infty$, wobei der Punkt $+\infty$ der Lage des Punktes A in K entspricht; bei der Bewegung des Punktes A von K bis L ergiebt sich der Teil $-\infty\ (\Gamma_1)\ B_1$, von L bis M das Stück $B(\Gamma_2) + \infty$, von M bis J der Teil $-\infty(\Gamma_3)B$ der Curve (Γ).

Weil die Curven (C) und (Γ) sich bis ins Unendliche erstrecken, kann die vorgeschriebene Bewegung des Systemes materiell nicht erzeugt werden durch das Rollen der Curve (Γ) auf der Curve (C).

Zweiter Fall $a < r$. Mit $a < r$ wird die Bewegung des Punktes A eine oscillatorische, denn der Winkel ϑ kann jetzt den Wert $\frac{\pi}{2}$ nicht erreichen. Die Gleichungen der Curven (C) und (Γ) sind offenbar ganz dieselben wie vorhin, denn bei ihrer Aufstellung wurden a und r beliebig gedacht, die Curven selbst sind durch Fig. 5 veranschaulicht. Was die Curve der Momentancentra betrifft, so folgt aus ihrer Polargleichung

$$\varrho = r \pm sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2 sin^2\vartheta},$$



Figur 5.

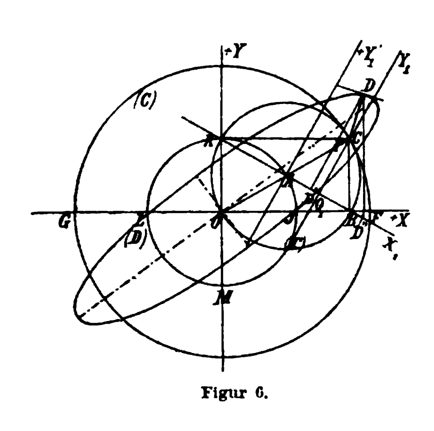
für die grössten Werte von ϑ, (absolut genommen), welche mit $sin\ \vartheta = \pm\frac{a}{r}$ eintreten, $\varrho = r$. Das Momentancentrum liegt in diesen Fällen auf dem vom Punkte A beschriebenen Kreisbogen in C_1 oder C_2. Weil ϑ die Werte $arc\left(sin = \pm\frac{a}{r}\right)$ nicht überschreiten kann, bleibt $sin\,\vartheta < 1$ und > -1, $sec\,\vartheta < \infty$ und $> -\infty$, folglich kann ϱ nicht unendlich gross werden. Die Curve (C) ist demnach hier vollständig im Endlichen gelegen. Mit $\vartheta = 0$ wird $\varrho = r \pm a$, so dass die Abscissenaxe in den Punkten F und G, welche um $(r + a)$ und $(r - a)$ vom Pole abstehen und auf der nämlichen Seite von O liegen, ge-

schnitten wird, und es ist zugleich $r + a$ der grösste, $r - a$ der kleinste Wert des Fahrstrahles ϱ. Kann der Punkt B sich ungehindert auf seiner Führungsgeraden OX bewegen, so ist — wenn der Punkt A die Bahn $J C_1 J C_2 J$ durchläuft — die Curve (C) die geschlossene krumme Linie $F C C_1 G C_2 F$. Ist es dem Punkte B nicht möglich, über den Durchschnittspunkt E der Geraden $C_1 C_2$ und der Abscissenaxe hinweg zu rücken, welcher Punkt den absolut grössten Werten von ϑ entspricht, dann kommt nur der Teil $F C C_1 C F C_2 F$ der Curve (C) in Frage.

Für den Fahrstrahl ϱ' der Curve (Γ) hat sich die Relation ergeben

$$\varrho' = r \sin\vartheta \pm tg\,\vartheta \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\vartheta}.$$

Diese sagt, dass mit $\vartheta = 0$, $\varrho' = 0$, mit $\sin\vartheta = \pm\frac{r}{a}$, $\varrho' = a$. Weil ϑ nicht grösser als $arc\left(\sin = \frac{a}{r}\right)$ werden kann, ist der Radiusvector ϱ' stets von endlicher Länge. Die Curve (Γ) liegt demnach vollständig im Endlichen, sie besteht aus zwei geschlossenen, congruenten Teilen, die sich in A und B schneiden, so dass diese Punkte Doppelpunkte sind. Für die Bewegung von A aus J nach C_1 und zurück ist $B\,\Gamma\,(\Gamma)\,A\,(\Gamma)\,B$, für diejenige von A aus J nach C_2 und zurück ist $B\,(\Gamma_1)\,A\,(\Gamma_1)\,B$ der entsprechende Teil der Curve (Γ).



Figur 6.

Dritter Fall: $a = r$. Hier kann die Bewegung des Punktes A entweder eine translatorische oder eine oscillatorische sein, je nachdem es dem Systempunkte B gestattet ist, über den Punkt O hinweg oder nicht über denselben hinauszurücken. (Fig. 6.)

Die Gleichungen der Curve der Momentancentra sind hier

$$X^2 + Y^2 = 4r^2, \quad \text{und } \varrho = 2r.$$

Diese krumme Linie ist mithin ein mit dem Radius $2r$ um den Ursprung O als Mittelpunkt beschriebener Kreis.

Ferner sind die Gleichungen der Curve (Γ)

$$X^2 + Y^2 - 2rX = 0, \quad \text{und} \quad \varrho' = 2r\cos\vartheta' = 2r\sin\vartheta,$$

so dass diese Linie ein Kreis vom Halbmesser r mit dem Mittelpunkte in A ist.

In diesem Falle kann die Kurbelbewegung ersetzt werden durch das Rollen eines Systemkreises (Γ) auf der Innenseite eines Kreises (C) von doppelt so grossem Radius, oder durch die Bewegung zweier Systempunkte B und K auf zwei sich rechtwinkelig schneidenden Geraden OX, OY, wobei der unveränderliche Abstand der Punkt B und K gleich $2r$ zu sein

hat. Die Hypocycloidenbewegung, bei rechtwinkeligen Führungsgeraden, ist demnach ein Specialfall der Kurbelbewegung.

Wir begeben uns nun an die Aufsuchung der Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D (Fig. 4, S. 11). Zu diesem Zwecke wählen wir die Gerade AB als Abscissenaxe des beweglichen rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit dem Ursprunge O_1 in der Mitte der Strecke AB, bezeichnen für die beweglichen Axen die Coordinaten O_1D' und $D'D$ des Systempunktes D mit α und β, für die festen Axen OX, OY dieselben, OD'', $D''D$, mit X und Y, den Winkel ABO mit ψ. Die Coordinaten x', y' des Ursprunges O_1 bezüglich der festen Axen sind $x' = r\cos\vartheta + \frac{a}{2}\cos\psi$, $y' = \frac{a}{2}\sin\psi$, mithin die Coordinaten X und Y des Systempunktes D

$$X = r\cos\vartheta + \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)\cos\psi + \beta\sin\psi, \quad Y = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)\sin\psi + \beta\cos\psi.$$

Damit erhalten wir, weil zwischen den Winkeln ϑ und ψ die Relation $r\sin\vartheta = a\sin\psi$ stattfindet,

$$\left.\begin{aligned} X &= \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\psi} + \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)\cos\psi + \beta\sin\psi, \\ Y &= \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)\sin\psi + \beta\cos\psi, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und

$$\left.\begin{aligned} aX &= ar\cos\vartheta + \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta} + \beta r\sin\vartheta, \\ aY &= \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)r\sin\vartheta + \beta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

welches die Gleichungen der Bahn des Punktes D mittelst der Winkel ψ und ϑ sind. Um zu einer Gleichung dieser Curve zwischen X und Y zu gelangen, haben wir entweder zwischen den Relationen (5) den Winkel ψ, oder aus den Gleichungen (6) den Winkel ϑ zu eliminieren, wodurch aber kein practicables Resultat erscheint, so dass es am zweckmässigsten ist, je nach Bedarf, entweder die Gleichungen (5) oder die Gleichungen (6) zur rechnerischen Bestimmung der Bahn (D) zu verwenden, welche die Figur 4 veranschaulicht. Die Figur giebt ferner die Bahn (D_1) des Punktes D_1 mit den Coordinaten $\alpha = 0$, $\beta = -\beta$, ihre Gleichungen sind

$$X = r\cos\vartheta + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta} - \frac{\beta r}{a}\sin\vartheta, \quad Y = \frac{r}{2}\sin\vartheta - \frac{\beta}{a}\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}.$$

Für einen Systempunkt D_2 mit den Coordinaten $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = \beta$, welcher also in der Senkrechten zu AB, durch B, liegt, finden wir die einen Knoten besitzende Bahn (D_3) mit den Gleichungen

$$X = r\cos\vartheta + \sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta} + \frac{\beta r}{a}\sin\vartheta, \quad Y = \frac{\beta}{a}\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}.$$

Ein Systempunkt D_3 mit den Coordinaten $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\beta$, welcher auf dem durch A gehenden zu AB senkrechten Strahle liegt, durchläuft die keinen Knoten besitzende Bahn (D_3) mit den Gleichungen

$$X = r\cos\vartheta - \frac{\beta r}{a}\sin\vartheta, \qquad Y = r\sin\vartheta - \frac{\beta}{a}\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}.$$

Liegt der Systempunkt auf der Geraden AB, so ist $\alpha = \pm\alpha$, $\beta = 0$, und für ein positives α sind die Bahngleichungen

$$X = r\cos\vartheta + \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}\sin^2\vartheta}; \quad Y = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)\frac{r}{a}\sin\vartheta.$$

Der Punkt D_4 ist ein solcher, seine Bahn (D_4) ist besüglich der Abscissenaxe offenbar symmetrisch. Diese Curve schneidet die Abscissenaxe zweimal, nämlich wenn $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, wofür $X = \left(\frac{a}{2} + \alpha\right) \pm r$, $Y = 0$, so dass die wechselseitige Entfernung dieser Schnittpunkte gleich $2r$ ist. Die absolut grössten Ordinatenwerte treten mit $\sin\vartheta = \pm 1$, oder $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ ein, es sind die Coordinaten des höchsten und tiefsten Punktes

$$X = \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \qquad Y = \pm\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)\frac{r}{a}.$$

Mit $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir den Mittelpunkt O_1 der Strecken AB, die Gleichungen seiner Bahn (O_1) sind

$$X = r\cos\vartheta + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}, \qquad Y = \frac{r}{2}\sin\vartheta,$$

oder

$$X = \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\psi} + \frac{a}{2}\cos\psi, \qquad Y = \frac{a}{2}\sin\psi.$$

Aus ihnen ergiebt sich als einzige Bahngleichung

$$X = \sqrt{r^2 - 4Y^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4Y^2},$$

oder

$$Y = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \{\pm\sqrt{4X^2 + 3(a^2 - r^2)} - X\}^2}.$$

Diese Curve schneidet die Abscissenaxe, bezüglich welcher sie symmetrisch ist, in den Abständen $\frac{a}{2} \pm r$ vom Ursprunge O, die Coordinaten ihres höchsten und tiefsten Punktes sind $X = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - r^2}$, $Y = \pm\frac{1}{2}r$. Sind die Coordinaten des fraglichen Systempunktes bezüglich der beweglichen Axen $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = 0$, dann fällt er mit dem Punkte A zusammen, die Gleichungen seiner Bahn sind

$$X = r\cos\vartheta,\quad Y = r\sin\vartheta,\quad \text{woraus folgt}\quad X^2 + Y^2 = a^2,$$
wie dem sein muss.

Wenn die Coordinaten des Systempunktes rücksichtlich der beweglichen Axen $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = 0$ sind, so ergeben sich als Bahngleichungen

$$X = r\cos\vartheta \pm \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\vartheta},\qquad Y = 0.$$

Die Bahn dieses Punktes, welcher kein anderer als der Systempunkt B ist, fällt demnach mit der Abscissenaxe zusammen, wie dem sein muss. Mit $a > r$ gilt nur das obere Vorzeichen der Wurzelgrösse. In diesem Falle erhalten wir mit $\vartheta = 0$, $X = a + r$, mit $\vartheta = \pi$, $X = a - r$, wodurch die Endpunkte der Bahn des Punktes B bestimmt sind. Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$ wird $X = \sqrt{a^2 - r^2}$. Berührt die Systemgerade AB den Führungskreis (A), was bei einem Umlaufe des Punktes A zweimal geschieht, so ist $tg\ \vartheta = \frac{a}{r}$, $X = \sqrt{a^2 + r^2}$. Befindet sich der Punkt B in der Mitte seiner Bahn, dann ist $\cos\vartheta = \frac{r}{2a}$, $X = a$.

Wenn $a < r$ ist, gelten die oben für einen beliebigen Systempunkt D aufgestellten Gleichungen ebenfalls; die Figur 5 (S. 14)zeigt die Gestalt der Bahn eines solchen Punktes in diesem Falle. In dem Specialfalle $a = r$ nehmen die Gleichungen (6) die Form an

$$X = \left(\frac{3}{2}r + \alpha\right)\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta,\qquad Y = \left(\frac{r}{2} - \alpha\right)\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta.$$

Vereinigen wir diese Relationen durch Ausscheidung des Winkels ϑ, so ergiebt sich mit $\left\{\left(\frac{3}{2}r + \alpha\right)\left(\frac{r}{2} - \alpha\right) - \beta^2\right\} = \varDelta$,

$$\varDelta^2 = \left\{\left(\frac{r}{2} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right\}X^2 - 4\beta r\,XY + \left\{\left(\frac{3}{2}r + \alpha\right)^2 + \beta^2\right\}Y^2,$$

als Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D (Fig. 6, S. 15), welche eine Ellipse mit dem Mittelpunkte im Ursprunge O ist. Verlegen wir den Ursprung des beweglichen Coordinatensystemes nach A, dann ist $\left(\alpha - \frac{r}{2}\right)$ für α zu setzen, womit die neue Bahngleichung, in welcher $\varDelta = \{r^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\}$ ist, wird

$$\varDelta^2 = \{(r-\alpha)^2 + \beta^2\}X^2 - 4\beta r\,XY + \{(r+\alpha)^2 + \beta^2\}Y^2,$$

oder, mit $r = \frac{a}{2}$,

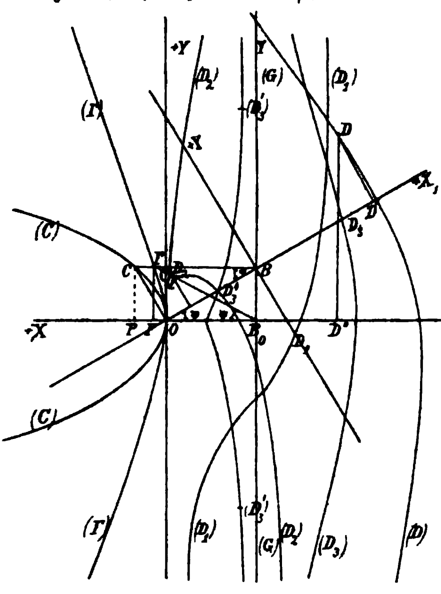
$$\Delta^2 = \left\{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right\} X^2 - 2\,a\,\beta\,X\,Y + \left\{\left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 + \beta^2\right\} Y^2,$$

welches die durch das erste Problem bereits bekannte Gleichung ist, wozu wir in diesem Falle gelangen mussten.

4. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass eine seiner Geraden fortwährend durch einen festen Punkt O hindurch geht und einer ihrer Punkte B eine gerade Linie $B_0 B$ beschreibt (Fig. 7). Die Bewegung des Systemes soll in geometrischer Hinsicht untersucht werden.

Ist OB eine beliebige Lage der Systemgeraden, welche stets durch den festen Punkt O geht und deren Punkt B die gerade Linie $B_0 B$ beschreibt, so ist das Momentancentrum C der Durchschnittspunkt der in O auf OB und in B auf $B_0 B$ errichteten Perpendikel. Für die Bestimmung der Gleichung der Curve (C) wählen wir den Punkt O als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten mit $O B_0 \perp B_0 B$ als Abscissen-, $OY \perp O B_0$ als Ordinatenaxe, beide positiv nach links und oben hin, setzen $OB_0 = a$, $\measuredangle B_0 O B = \psi$, machen $CP \perp OX$, so dass $OP = x$, $PC = y$, die Coordinaten des Momentancentrums C sind, und, wenn wir noch die Linien OC und BC ziehen, auch $\measuredangle OBC = \measuredangle OCP = \psi$ ist. Weil nun $\Delta O B_0 B \sim \Delta OCP$, so besteht die Doppelgleichung $x : y = tg\,\psi = y : a$, woraus folgt

$$y^2 = a\,x.$$



Figur 7.

Die Curve der Momentancentra ist mithin eine gewöhnliche Parabel mit dem Scheitel im festen Punkte O und dem Parameter a. Die Polargleichung dieser Curve ist mit O als Pol, der Ordinatenaxe als Polaraxe und $\varrho = OC$ als Fahrstrahl $\varrho = a \sin\psi \sec^2\psi$.

Konstruieren wir über $B_0 X$ alle rechtwinkeligen Dreiecke BOC = Dreieck $B_0 F \Gamma$, so liegen deren Eckpunkte Γ auf der Curve (Γ). Wählen wir den Punkt B_0 als Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit $B_0 O X$ als Abscissen-, der Linie $B_0 B$ als Ordinatenaxe, so dass $B_0 F = BO = x$, $F\Gamma = OC = y$ die Coordinaten des Punktes Γ sind, dann erhalten wir die Beziehungen $F\Gamma : F B_0 = y : x = tg\,\psi$,

$BO : B_0 O = x : a = 1 : \cos\psi$, aus welchen sich als Gleichung der Curve (Γ) ergiebt

$$a^2(x^2 + y^2) = x^4.$$

Mit $B_0 \Gamma = \varrho'$, also $x = \varrho' \cos\psi$, $y = \varrho' \sin\psi$, geht sie über in eine Polargleichung

$$\varrho' \cos^2\psi = a, \quad \text{oder} \quad \varrho = a \sec^2\psi.$$

Diese krumme Linie schneidet die Abscissenaxe in O, ist bezüglich derselben symmetrisch und erstreckt sich nach ihren beiden Seiten hin bis ins Unendliche.

Für die Bestimmung der Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D nehmen wir B_0 als Ursprung des festen Coordinatensystemes, OB_0 als positive Richtung der Abscissen-, $B_0 B$ als diejenige der Ordinatenaxe desselben, B als Anfangspunkt des beweglichen Coordinatensystemes mit der Abscissenaxe OBX_1, positiv in der Richtung OB, der Ordinatenaxe $BY_1 \perp OBX_1$, positiv aufwärts, setzen die Coordinaten des Punktes D für das letztere System $BD' = \alpha$, $D'D = \beta$, diejenigen für das erstere $B_0 D'' = X$, $D''D = Y$. Weil die Coordinaten des Punktes B für die festen Axen 0 und $a\,tg\,\psi$ sind, so erkennen wir mittelst der Figur sofort, dass

$$X = \alpha \cos\psi - \beta \sin\psi, \qquad Y = a\,tg\,\psi + \alpha \sin\psi + \beta \cos\psi.$$

Durch Elimination des Winkels ψ aus diesen Gleichungen gelangen wir zu

$$\{\beta X^2 + \alpha XY + \alpha\beta X - \beta(\alpha^2 + \beta^2)\}^2 =$$
$$(\beta Y - \alpha X - a\alpha)^2 (\alpha^2 + \beta^2 - X^2),$$

welches die gesuchte Gleichung der Bahn des Systempunktes D ist. Die teilweise Gestalt dieser Curve zeigt die Figur. Ausserdem sind noch verzeichnet die Bahnen (D_1) und (D_2) von zwei weiteren Systempunkten, für den ersteren ist $\alpha = 0$, $\beta = -\beta$, für den letzteren $\alpha = -\alpha$, $\beta = \beta$. Befindet sich der Systempunkt auf der Geraden OB, etwa in D_3 oder D_3', dann ist $\beta = 0$, folglich die Gleichung seiner Bahn

$$XY \mp (X + a)\sqrt{\alpha^2 - X^2} = 0, \text{ oder } Y = \pm\left(\frac{a}{X} + 1\right)\sqrt{\alpha^2 - X^2},$$

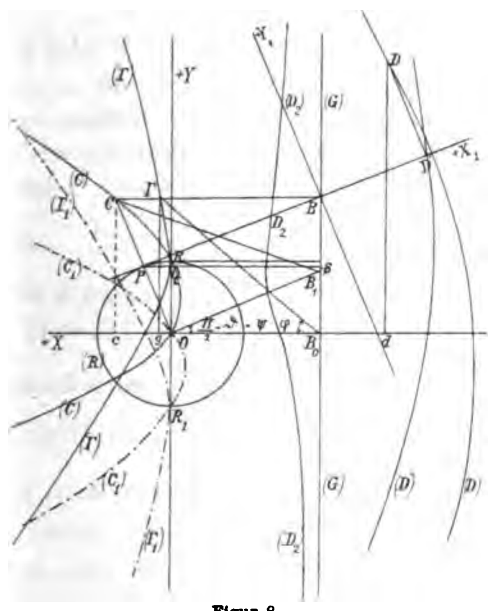
auch $X^4 + 2aX^3 + X^2Y^2 + (a^2 - \alpha^2)X^2 - 2a\alpha^2 X - a^2\alpha^2 = 0,$

und es ist diese somit eine Conchoide. Alle Punkte der Systemgeraden OB beschreiben demnach Conchoiden des Nicomedes.

Näheres über die Conchoide ist zu finden in der Aufgabens. von Sohnke für die Differentialrechnung etc. Band I. S. 158, Band II. S. 111.

5. Ein ebenes, unveränderliches System schreitet in seiner Ebene in der Weise fort, dass ein Punkt B einer Systemgeraden die gerade Linie

$G B_0 B G$ beschreibt und diese Gerade zugleich einen festen Kreis (R), mit dem Mittelpunkte in O und von dem Radius $O R = r$, im Punkte P berührt. Der Punkt O ist von der Führungsgeraden (G) um die Strecke $O B_0 = a$ entfernt (Fig. 8). Die Bewegung des Systemes soll in geometrischer Hinsicht erforscht werden.



Figur 8.

Ist $B P$ eine beliebige Lage der den festen Kreis (R) im Punkte P berührenden Systemgeraden, so ist offenbar das entsprechende Momentancentrum C der Durchschnittspunkt der zu (G) normalen Geraden $B C$ und des Strahles $O P$, wodurch sich die Curve (C) leicht verzeichnen lässt. Je nachdem die Systemgerade $B P$ den Kreis (R) oberhalb oder unterhalb der Linie $O B_0 \perp (G)$ berührt, erhalten wir (C) oder (C_1) als Curve der Momentancentra, die erstere geht durch den höchsten, letztere durch den tiefsten Punkt von (R), (G) vertikal vorausgesetzt, jede läuft durch den Punkt O und schliesst sich im Unendlichen. Um eine Gleichung der Curve (C) zu erhalten, wählen wir die Linie $B_0 O X$ als Plusteil der Abscissenaxe, die Linie $O R Y \perp B_0 X$ als solchen der Ordinatenaxe des festen rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit dem Ursprunge in O, so dass durch $C c \perp O X$, $O c = X$, $c C = Y$ die Coordinaten von C sind, setzen $\measuredangle X O C = \vartheta$, $O C = \varrho$. Ziehen wir noch die Gerade $P Q S \parallel O B_0$, dann ist $\measuredangle P O Q = \measuredangle S P B = \measuredangle P B C = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\Delta BPS \sim \Delta POQ$, folglich

$$\varrho = O C = O P + P C = O P + P B \,.\, tg\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = O P + \frac{P S}{\sin \vartheta} \cot g\ \vartheta$$

$$= O P + \frac{P Q + Q S}{\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta = O P + \frac{O P \cos \vartheta + O B_0}{\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta,$$ woraus sich schliesslich ergiebt

$$\varrho = \frac{r + a \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \quad \text{oder auch } \varrho \sin^2 \vartheta = r + a \cos \vartheta. \qquad (1)$$

Damit ist eine Polargleichung der Curve (C) bekannt. Weil nun aber auch $X = \varrho \cos \vartheta$, $Y = \varrho \sin \vartheta$, erhalten wir hierdurch als Gleichung unserer Linie in rechtwinkeligen Coordinaten

$$Y^4 - (2\,a\,X + r^2)\,Y^2 + (a^2 - r^2)\,X^2 = 0. \qquad (2)$$

Die Coordinaten der Punkte, in welchen die Curve $[(C), (C_1)]$ die Axe der X schneidet, sind $X = 0$, $Y = 0$, und zwar ist der Punkt O ein Doppelpunkt, weil $X = 0$ aus $X^2 = 0$ folgt. Die Axe der Y wird geschnitten in den Punkten mit den Coordinaten $X = 0$, $Y = 0$ oder $= \pm r$, d. h. die Curve geht durch den Punkt O, sowie durch den höchsten und tiefsten Punkt des Kreises (R). Die Coordinaten der Curvenpunkte, in welchen die Tangenten an (C) parallel zur Ordinatenaxe sind, heissen $X = -\dfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - r^2})$, $Y = \pm \sqrt[4]{a^2 - r^2}\sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{2}}$. Mit zunehmendem X wächst Y und wird für $X = \infty$, $= \pm \infty$, es erstrecken sich demnach die beiden Zweige von (C) bis ins Unendliche. Der Fahrstahl ϱ besitzt mit $\vartheta = arc\left(\cos = \mp \dfrac{r}{a}\right)$ seinen kleinsten Wert, nämlich den Wert Null, und schneidet die Curve die Abscissenaxe unter den Winkeln $\pi - arc\left(\cos = \mp \dfrac{r}{a}\right)$. Mit $\vartheta = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3}{2}\pi$, 2π, wird $\varrho = \infty$, r, ∞, r, ∞.

Die Curve (Γ) ergiebt sich entweder dadurch, dass wir über $B\,P$ sämtliche Dreiecke $B\,P\,C$ konstruieren, ihre Eckpunkte C liegen dann auf (Γ), oder wir ziehen die Linie $O\,B_1 \perp O\,P$ und verzeichnen über $B_1\,O$ die Dreiecke $B_1\,O\,C$, endlich können wir über $B_0\,O$ die Dreiecke $B_1\,O\,C$ verzeichnen, was in der Figur geschehen ist, welche so die Gestalt der Curve (Γ) teilweise zeigt. Je nachdem der Berührungspunkt P der Systemgeraden $B\,P$ und des Kreises (R) über $B_0\,O$ oder darunter liegt, ist (Γ) oder (Γ_1) der entsprechende Teil der zu untersuchenden Curve. Nehmen wir B_0 als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten mit $B_0\,O$ als Axe der X, $B_0\,B$ als Axe der Y, dann sind die Coordinaten des Punktes Γ, $B_0\,g = X$, $g\,\Gamma = Y$. Nun ist $B_0\,g = B_1\,O = \dfrac{B_0\,O}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \vartheta\right)} = \dfrac{a}{\sin \vartheta} = X$, $g\,\Gamma = O\,C = \varrho = \dfrac{r + a \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = Y$, woraus als Gleichung der Curve (Γ) folgt

$$(a^2 - r^2)\,X^4 - a^4\,(X^2 + Y^2) + 2\,a^2\,r\,X^2\,Y = 0. \qquad (3)$$

Mit $X = 0$, wird $Y = \pm r$, so dass (Γ) durch den höchsten und den tiefsten Punkt des Kreises (R) läuft. Die Abscissenaxe wird in dem

Punkte $X = \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$, $Y = 0$ geschnitten. Wächst von diesem Werte an X, so wächst auch der positive und der negative Wert von Y, und wird für $X = \infty$, $Y = \pm\infty$, demnach erstrecken sich beide Curvenzweige bis ins Unendliche. Wählen wir B_0 als Pol, $B_0\,O$ als Polaraxe, $\varrho' = B_0\,\Gamma$ als Radiusvektor und $\sphericalangle\, O\,B_0\,\Gamma = \varphi$ als Polarwinkel, dann erhalten wir vermöge (3) die Polargleichung

$$(a^2 - r^2)\,\varrho'^2 \cos^4\varphi + 2\,a^2\,r\,\varrho \sin\varphi \cos^2\varphi = a^4. \tag{4}$$

Zum Zwecke der Ermittelung der Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D wählen wir den Punkt B als Ursprung des mit dem beweglichen Systeme fest verbundenen rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit $P\,B\,X_1$ als Axe der X, $B\,Y_1 \perp B\,X_1$ als Axe der Y, beide Axen positiv nach der Buchstabenfolge, B_0 als Anfangspunkt des festen rechtwinkeligen Coordinatensystemes mit den Axen $O\,B_0\,X$, $B_0\,B\,Y$, positiv nach der Buchstabenfolge, bezeichnen die unveränderlichen Coordinaten des Punktes D, $B\,D'$, $D'\,D$ mit α, β, dessen Coordinaten für die festen Axen $B_0\,d$, $d\,D$ mit X, Y. Hiermit sind die Coordinaten des beweglichen Ursprunges 0, und $B_0\,B = B_0\,B_1 + B_1\,B = a \operatorname{cotg}\vartheta + \frac{r}{\sin\vartheta} = \frac{r + a\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$, folglich die Coordinaten des Punktes D für die festen Axen

$$X = \alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta, \quad Y = \frac{r + a\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta.$$

Durch Elimination des Winkels ϑ aus diesen beiden Relationen ergiebt sich nach einer kleinen Rechnung

$$\{\beta X^2 + \alpha X Y + \alpha\beta X - (\alpha^2 + \beta^2)(\beta + r)\}^2 =$$
$$(\beta Y - \alpha X - a\,\alpha)^2\,(\alpha^2 + \beta^2 - X^2),$$

womit die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes bekannt ist. Die Figur 8 (S. 21) zeigt teilweise die Gestalt der Bahn des Punktes D für den Fall, dass die Systemgerade $B\,P$ den Kreis (R) oberhalb der Abscissenaxe berührt.

Mit $\beta = 0$ liegt der Systempunkt auf dem Strahle $B\,P$, die Gleichung seiner Bahn lautet

$$X Y \mp (a + X)\sqrt{\alpha^2 - X^2} = \alpha\,r.$$

D' ist ein solcher Punkt und (D') seine Bahn.

Fällt der Mittelpunkt O des Kreises (R) mit dem Punkte B_0 der Führungsgeraden (G) zusammen, so ist $a = 0$. Alsdann sind die Gleichungen der Curve der Momentancentra

$$Y^4 - r^2\,(X^2 + Y^2) = 0, \quad \text{und } \varrho = r \operatorname{cosec}^2\vartheta,$$

ferner lautet die Gleichung der Curve (Γ) $X = 0$, welche demnach eine

gerade, augenblicklich mit der Führungsgeraden (G) zusammenfallende Linie ist.

Die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes lautet:

$$\{\beta X^2 + \alpha X Y + \alpha \beta X - (\alpha^2 + \beta^2)(\beta + r)\}^2$$
$$= (\beta Y - \alpha X)^2 (\alpha^2 + \beta^2 - X^2).$$

Berührt der Kreis (R) die Gerade (G), dann ist $a = r$. In solchem Falle sind die Gleichungen der Curve der Momentancentra

$$Y^2 - 2 r X = r^2, \quad \text{und} \quad \varrho = r(1 + \cos\vartheta)\,\mathrm{cosec}^2\vartheta,$$

sie besteht mithin aus zwei Parabeln, diejenigen der Curve (Γ)

$$(X^2 + Y^2) r = 2 X^2 Y, \quad \text{und} \quad 2 \varrho' r \sin\varphi \cos^2\varphi = a^2,$$

und die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D ist

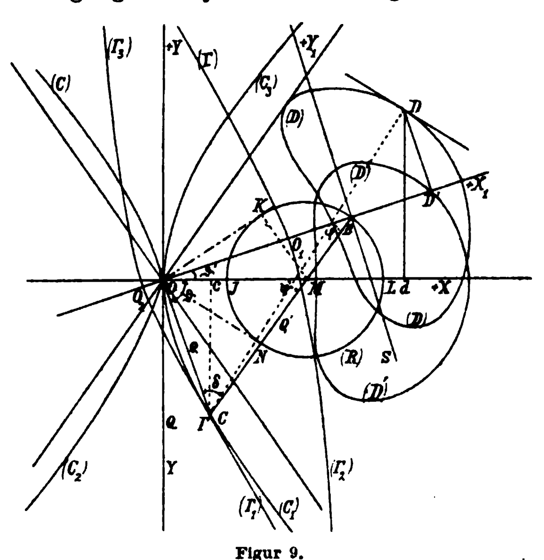
$$\{\beta X^2 + \alpha X Y + \alpha \beta X - (\alpha^2 + \beta^2)(\beta + r)\}^2$$
$$= (\beta Y - \alpha X - \alpha r)^2 (\alpha^2 + \beta^2 - X^2).$$

Mit $r = 0$ geht der Kreis (R) in den Punkt O über, es ist alsdann die Gleichung der Curve (C) für rechtwinkelige Coordinaten $Y^2 = a X$, diejenige der Curve (Γ) $(X^2 + Y^2) a^2 = X^4$, und diejenige der Bahn eines beliebigen Systempunktes D

$$\{\beta X^2 + \alpha X Y + \alpha \beta X - (\alpha^2 + \beta^2)\beta\}^2$$
$$= (\beta Y - \alpha X - a \alpha)^2 (\alpha^2 + \beta^2 - X^2),$$

das ist der unter 5 besonders behandelte Spezialfall.

6. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass ein Punkt B einer seiner Systemgeraden einen festen Kreis (R) beschreibt und diese Gerade stets durch einen festen Punkt O geht. Die Bewegung des Systemes soll in geometrischer Hinsicht erforscht werden.



Figur 9.

Erste Lösung. Es sei (Fig. 9) M der Mittelpunkt des Kreises (R) vom Radius r, O der feste Punkt, durch welchen die Systemgerade OB stets läuft, $OM = e$, OB eine beliebige Lage der die Bewegung des Systemes bedingenden Geraden.

Ziehen wir den Strahl BMC, die Gerade $OC \perp OB$, so ist der Durchschnittspunkt C dieser Linie das entsprechende Momentancentrum des Systemes,

wodurch die Curve (C) leicht konstruiert werden kann. Um die Gleichung dieser Linie zu finden, nehmen wir den Strahl OM als Polaraxe, resp. Abscissenaxe, die zu ihm senkrechte Gerade OY als Ordinatenaxe, setzen $OC = \varrho$, $\sphericalangle XOC = \vartheta$, $\sphericalangle OBC = \varphi$, $\sphericalangle OCB = \delta$, $\sphericalangle BOM = \vartheta'$, die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes C, $Oc = X$, $cC = Y$. Weil das Dreieck BOC bei O rechtwinkelig ist, so haben wir $\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Ferner ist durch das Dreieck OMB, $OM : MB = sin\, \varphi : sin\, \vartheta'$, oder $e : r = sin\, \varphi : cos\, \vartheta$. Das Dreieck OMC giebt: $OC : OM = sin\,(\vartheta + \delta) : sin\, \delta$, oder $\varrho : e = sin\,(\vartheta + \delta) : sin\, \delta$. Damit bekommen wir

$$\frac{\varrho}{e} = \frac{sin(\vartheta+\delta)}{sin\,\delta} = \frac{cos\,(\vartheta - \varphi)}{cos\,\varphi} = \frac{cos\,\vartheta\, cos\,\varphi + sin\,\vartheta\, sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$$

$$= \frac{cos\,\vartheta \sqrt{\frac{r^2 - e^2 cos^2\vartheta}{r^2}} + sin\,\vartheta \frac{e}{r} cos\,\vartheta}{\sqrt{\frac{r^2 - e^2 cos^2\vartheta}{r^2}}};$$

$$\varrho \sqrt{r^2 - e^2 cos^2\vartheta} = e\, cos\,\vartheta \sqrt{r^2 - e^2 cos^2\vartheta} + e^2 sin\,\vartheta\, cos\,\vartheta,$$

woraus folgt

$$\varrho^2 - 2\varrho e\, cos\,\vartheta = \frac{(e^2 - r^2)\, e^2 cos^2\vartheta}{r^2 - e^2 cos^2\vartheta}, \tag{1}$$

und

$$\varrho = e\, cos\,\vartheta \left\{ 1 \pm \frac{e\, sin\,\vartheta}{\sqrt{r^2 - e^2 cos^2\vartheta}} \right\}, \tag{1'}$$

womit eine Polargleichung der Curve der Momentancentra gefunden ist. Mittelst der Gleichung (1) lässt sich bequem diejenige für rechtwinkelige Coordinaten ableiten, wobei nur zu beachten ist, dass $X : \varrho = cos\,\vartheta$, $Y : \varrho = sin\,\vartheta$, was giebt:

$$(X^2 + Y^2 - 2eX)\{(X^2 + Y^2) r^2 - e^2 X\} = (e^2 - r^2)\, e^2 X^2. \tag{2}$$

Konstruieren wir über BO sämtliche Dreiecke $BO\Gamma$, so liegen deren Eckpunkte Γ auf der Curve (Γ) des beweglichen Systemes. Am einfachsten erhalten wir eine Gleichung dieser Curve dadurch, dass wir den Punkt B als Pol, BO als Polaraxe, $B\Gamma = \varrho'$ als Fahrstrahl, $\sphericalangle BOC = \varphi$ als Polarwinkel eines Polarcoordinatensystemes wählen. Weil $cos\,\vartheta = \frac{r}{e} sin\,\varphi$, bekommen wir durch (1)

$$\varrho^2 - 2\varrho r\, sin\,\varphi = \frac{e^2 - r^2}{cos^2\varphi} sin^2\varphi, \quad \frac{\varrho^2}{sin^2\varphi} - \frac{2\varrho r}{sin\,\varphi} = (e^2 - r^2)\, sec^2\varphi,$$

und da $\varrho' sin\,\varphi = \varrho$, so ergiebt sich

$$\varrho'^2 - 2\varrho' r = (e^2 - r^2)\, sec^2\varphi, \tag{3}$$

womit eine Gleichung der Curve (Γ) gefunden ist. Nehmen wir BO als

Abscissen-, die zu ihr normale Gerade BS als Ordinatenaxe eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, dann erhalten wir vermöge (3) und den Relationen $X = \varrho' \cos\varphi$, $Y = \varrho' \sin\varphi$, eine Gleichung für rechtwinkelige Coordinaten, nämlich:

$$(X^2 + Y^2)\,(X^2 + r^2 - e^2)^2 = 4\,r^2 X^4. \tag{4}$$

Behufs der analytischen Darstellung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D wählen wir den Punkt B als Ursprung der beweglichen Coordinatenaxen OBX_1 und $BY_1 \perp BX_1$, O als Anfangspunkt des festen Coordinatensystemes mit den Axen OMX, $OY \perp OX$, setzen, wie oben, den veränderlichen Winkel $BOX = \vartheta'$, die Coordinaten des Punktes D, $BD' = \alpha$, $D'D = \beta$, $Od = X$, $dD = Y$.

Die Polargleichung des Kreises (R) ist, wenn O Pol, OX Polaraxe, ϱ Fahrstrahl, ϑ' Polarwinkel $\varrho^2 - 2\,\varrho\, e \cos\vartheta' = r^2 - e^2$, woraus folgt $\varrho = e \cos\vartheta' \pm \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'}$. Es sind daher die Coordinaten x_0, y_0 des beweglichen Ursprunges B bezüglich des festen Coordinatensystemes

$$x_0 = \varrho \cos\vartheta' = e \cos^2\vartheta' \pm \cos\vartheta' \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'},$$
$$y_0 = \varrho \sin\vartheta' = e \sin\vartheta' \cos\vartheta' \pm \sin\vartheta' \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'}.$$

Dadurch erhalten wir für die Coordinaten X, Y des Systempunktes D

$$\left.\begin{aligned} X &= e \cos^2\vartheta' \pm \cos\vartheta' \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'} + \alpha \cos\vartheta' - \beta \sin\vartheta', \\ Y &= e \sin\vartheta' \cos\vartheta' \pm \sin\vartheta' \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'} + \alpha \sin\vartheta' + \beta \cos\vartheta', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und sind diese zwei Gleichungen diejenigen der Bahn des Punktes D, welche einer einzigen Gleichung zwischen X und Y, wegen ihrer Compliciertheit, vorzuziehen sind.

Befindet sich der Systempunkt D auf der Geraden OB, etwa in D', dann ist $\beta = 0$, folglich sind die Gleichungen seiner Bahn

$$\left.\begin{aligned} X &= e \cos^2\vartheta' \pm \cos\vartheta' \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'} + \alpha \cos\vartheta', \\ Y &= e \sin\vartheta' \cos\vartheta' \pm \sin\vartheta' \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta'} + \alpha \sin\vartheta'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus jeder dieser Gleichungen lässt sich eine Gleichung der Bahn (D') sofort ableiten, wir erhalten mit $OD' = \varrho$

$$\varrho^2 - 2\,\varrho\,(\alpha + e \cos\vartheta') = (r^2 - e^2 - \alpha^2 - 2\,\alpha\, e \cos\vartheta'). \tag{7}$$

Gehen wir von (7) zu rechtwinkeligen Coordinaten über, dann finden wir

$$(X^2 + Y^2 - 2\,e\,X - r^2 + e^2 - \alpha^2)^2 (X^2 + Y^2) = 4\,\alpha^2 (X^2 + Y^2 - e\,X).$$

Damit sind die allgemeinen Gleichungen für die Curven (C), (Γ) und (D) gefunden. Die Gestalt dieser Linien ist abhängig von dem Werte des Verhältnisses $\frac{e}{r}$ und es sind folgende besondere Fälle zu unterscheiden $e > r$, $e < r$, $e = r$, $e = 0$.

Erster Fall: $e > r$. (Fig. 9, S. 24.) Der Kreis (R) schneidet die Gerade OM zwischen O und M in J. Die Grösse des Winkels ϑ', welchen die Systemgerade OB mit der Linie OM einschliesst, liegt zwischen 0

und $arc\left(sin = \pm \frac{r}{e}\right)$, denn die äussersten Lagen der Geraden OB fallen zusammen mit den Tangenten von O an den Kreis (R). Die Grenzlagen des Fahrstrahles ϱ der Curve (C) sind daher bestimmt durch $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $arc\left(cos = \frac{r}{e}\right)$, $arc\left(cos = -\frac{r}{e}\right)$, π etc. Die Gleichung (1) giebt für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = 0$, für $\vartheta = arc\left(cos = \frac{e}{r}\right)$, $\varrho = \infty$, etc. Bewegt sich der Punkt B auf dem Kreise (R) von J aus nach K, B, L, N, J, wobei die Punkte J und L auf der Linie OM liegen, die Punkte K und N die Berührungspunkte der Systemgeraden OB und des Kreises (R) sind, dann ist für ihre Lagen OJ und OL, $\vartheta' = 0$, für die Lagen OK und ON, $\vartheta = arc\left(sin = \frac{r}{e}\right)$ und $= arc\left(sin = -\frac{r}{e}\right)$. Der Bewegung des Punktes B von J bis K entspricht das Curvenstück der Curve der Momentancentra $O(C)\infty$, von K bis L das Stück $\infty\ (C_1)\ CO$, von L bis N der Ast $O\ (C_2)\infty$, von N bis J das Stück $\infty\ (C_3)\ O$, so dass der Lauf der Curve (C) charakterisiert ist durch $0 \pm \infty\, 0 \mp \infty\, 0$. Unsere Curve besitzt in O einen Doppelpunkt, sie zerfällt in zwei Zweige $(C_1)\,O\,(C_3)$ und $(C_2)\,O\,(C)$, welche in der Geraden OY eine gemeinschaftliche Tangente besitzen und bezüglich der Abscissenaxe symmetrisch sind, denn es bestehen die Relationen $cos\ \vartheta = cos\,(2\pi - \vartheta)$, und $cos\,(\pi - \vartheta) = cos\left(\frac{3}{2}\pi - \vartheta\right)$.

Als Polargleichung der Curve (Γ) haben wir die Gleichung (3) erhalten. Nun ist $sin\,\varphi = \frac{e}{r}\ cos\,\vartheta$, also mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$, mit $\vartheta = arc\left(cos = \pm\frac{r}{e}\right)$, $sin\,\varphi = \pm 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3}{2}\pi$ etc., mithin kann der Winkel φ alle Werte zwischen 0 und $\pm\infty$ durchlaufen. Aus (3) folgt

$$\varrho' = r \pm sec\,\varphi \sqrt{e^2 - r^2\, sin^2\,\varphi},$$

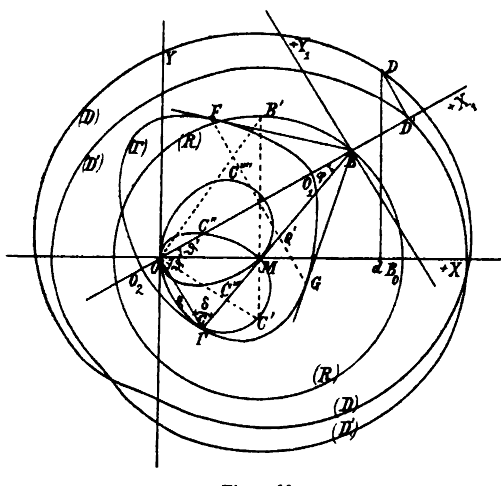
womit sich ergiebt

für $\varphi =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\varrho' =$	$e+r$	∞	$e-r$	∞	$e+r$,

denn es ist im vorliegenden Falle nur das obere Vorzeichen der Wurzelgrösse zu nehmen. Die Curve (Γ) schneidet demnach die Polaraxe in den Punkten O_1 und O_2, welche von dem Pole um die Strecken $e - r$ und $e + r$ entfernt sind, ihre Zweige gehen auf beiden Seiten der Abscissenaxe ins Unendliche und sind bezüglich derselben symmetrisch. Bei der Bewegung des Systemes treffen abwechselnd die Punkte O_1 und O_2 mit dem

Doppelpunkte O der Curve (C) zusammen. Die Figur 9 (S. 24) veranschaulicht deutlich, wie sich die Curve (Γ) auf der Curve (C) abwickelt.

Für einen beliebigen Systempunkt D ist die Bahn (D) verzeichnet, wir erkennen, dass dieselbe von geschlossener, nierenförmiger Gestalt ist, erstere Eigenschaft folgt auch aus ihren Gleichungen (5). Befindet sich der fragliche Systempunkt auf der Geraden OB, etwa in D', dann ist seine Bahn (D') eine geschlossene, nierenförmige, bezüglich der Abscissenaxe OX symmetrische Curve mit der (7) als Polargleichung. Mit $\vartheta'=0$ folgt $\varrho = \alpha + e \pm r$, wodurch ihre Schnitte mit der Axe der X bestimmt sind, die wechselseitige Entfernung derselben ist $= 2r$. Diese Werte von ϱ sind zugleich dessen Maximum und Minimum. Mit endlichen α sind daher alle Fahrstrahlen endlich gross, d. h. die Bahn (D') liegt im Endlichen. Wenn $\alpha = 0$, so bekommen wir $\varrho^2 - 2\varrho\, e \cos\vartheta' = r^2 - e^2$, welches die Gleichung des Kreises (R) ist.



Figur 10.

Zweiter Fall: $e < r$. (Fig. 10.) Jetzt schneidet der Kreis (R) die Abscissenaxe in der Weise, dass die Punkte O und M innerhalb seines Umfanges liegen. Bei der Bewegung des Systemes wächst der Winkel ϑ' beständig, oder er nimmt continuierlich ab, wenn also der Punkt B einen vollen Umlauf auf dem Kreise (R) macht, beschreibt die Gerade OB einen vollen Winkel. Die Länge des Fahrstrahles der Curve der Momentancentra giebt die Gleichung (1′), hiermit und durch die Beziehung zwischen ϑ und ϑ' ist

für $\vartheta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\vartheta' =$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$
$\varrho =$	e	0	e	0	$e.$

Die Curve (C) besitzt mithin in den Punkten O und M Doppelpunkte. Das Maximum von ϱ tritt ein, wenn in dem veränderlichen Dreiecke OCM die Seite OC ihren grössten Wert annimmt, was mit $\measuredangle\, OMC = \frac{\pi}{2}$ der Fall ist und bei einem Umlaufe des Punktes B zweimal eintritt. Mit

$C'MB' \perp OM$, wo B' die C' entsprechende Lage des Punktes B ist, haben wir, zufolge der Ähnlichkeit der Dreiecke $OC'M$ und $OB'M$, $tg\,\vartheta = \frac{e}{r}$, und weil $OC' = e \,.\, sec \measuredangle C'OM = e\sqrt{1 + tg^2 \measuredangle C'OM}$, $\varrho_{max} = \frac{e}{r}\sqrt{e^2 + r^2}$. Dieser Wert von ϱ ist von endlicher Grösse, es sind daher alle Punkte der Curve der Momentancentra im Endlichen gelegen. Von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ ändert der Wert von ϱ sich stetig, woraus hervorgeht, dass die Curve (C) eine stetige in sich selbst zurücklaufende krumme Linie ist. Noch ist dieselbe bezüglich der Abscissenaxe symmetrisch, weil die Bewegung des Systemes bezüglich dieser Linie symmetrisch ist, und besteht sie aus zwei congruenten geschlossenen Teilen. Bewegt sich der Punkt B von B_0 aus nach B' (R), B_0, dann rückt das Momentancentrum in seiner Bahn von O aus nach $C, C', M, C'', O, C''', M, C'''', O$ etc., die beiden congruenten Curventeile sind $OC'MC''O$, und $OC'''MC''''O$.

Die Curve (Γ), welche hier auf der festen Curve (C) rollt, ist eine einfache, geschlossene krumme Linie, für ihre Fahrstrahllängen haben wir

$$\varrho' = r + sec\,\varphi\sqrt{e^2 - r^2 sin^2\varphi},$$

und es ist stets $sin\,\varphi = \frac{e}{r} cos\,\vartheta$, also der dem Winkel φ entsprechende Sinus stets $< +1$ und > -1. Wir erhalten

mit	$\vartheta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$sin\,\varphi =$	$\frac{e}{r}$	0	$-\frac{e}{r}$	0	$\frac{e}{r}$
	$\varrho' =$	r	$r+e$	r	$r-e$	r
mit	$\varphi =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$\varrho' =$	$r+e$	$\infty\sqrt{-1}$	$r-e$	$\infty\sqrt{-1}$	$r+e.$

Der grösste reelle Wert von ϱ' erscheint mit $\varphi = 0$, der kleinste mit $\varphi = \pi$, so dass kein reeller Wert von ϱ' unendlich gross ist. Die Polaraxe wird von der Curve (Γ) in den Punkten O_1 und O_2 geschnitten, es ist $BO_1 = r - e$, $BO_2 = r + e$, $O_1O_2 = 2r$. Die Curve liegt in dem Winkelraume $2\varphi = 2\,arc\left(sin = \frac{e}{r}\right)$. Den Werten von $sin\,\varphi = \pm\frac{e}{r}$ entsprechen die Fahrstrahllängen r, deren Endpunkte die Curvenpunkte G und F geben, und es sind die Strahlen BG, BF Tangenten an (Γ) in G und F. Die Curve ist bezüglich der Polaraxe symmetrisch und eine geschlossene Linie.

Für einen beliebigen Systempunkt D ist die Bahn (D) verzeichnet. Die Bahn (D') eines auf der Systemgeraden OB gelegenen Systempunktes ist wieder rücksichtlich der Abscissenaxe symmetrisch, sie schneidet die

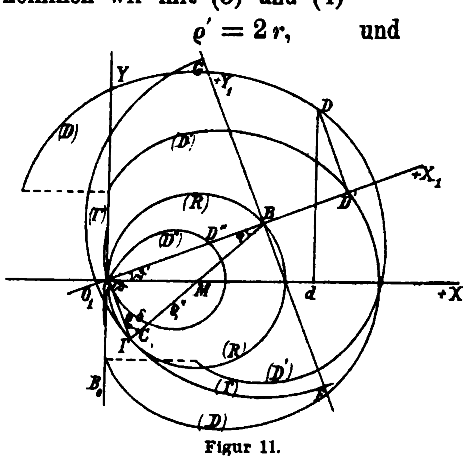
Abscissenaxe in den Abständen $(r+e+\alpha)$ und $-(r-e+\alpha)$, die Ordinatenaxe in den Entfernungen $\pm(\alpha-\sqrt{r^2-e^2})$ vom Ursprunge O.

Dritter Fall: $e=r$. (Fig. 11.) Nach (1) und (2) sind hier Gleichungen der Curve (C)

$$\varrho = 2r\cos\vartheta, \quad \text{und} \quad X^2+Y^2-2rX=0,$$

sie fällt mit dem Führungskreise (R) zusammen. Für die Curve (Γ) bekommen wir mit (3) und (4)

$$\varrho' = 2r, \quad \text{und} \quad X^2+Y^2=4r^2.$$



womit sich dieselbe als eine Kreislinie vom Radius $2r$ und mit dem Mittelpunkte B herausstellt. Weil aber hier der Winkel φ nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ und 2π liegen kann, so kommt nur die Hälfte FO_1G dieser Linie in Frage. Bei der Bewegung des Systemes schwingt der Halbkreis FO_1G des Systemes um den festen Kreis (C), denn die Bewegung der Systemgeraden OB ist eine schwingende, indem die OB, wenn B mit O zusammenfällt, die Berührungslinie OB_0 des Kreises (R) wird.

Die von einem beliebigen Systempunkte D durchlaufene Bahn ist deshalb keine in sich selbst zurückkehrende Linie. Bei einem positiven α wird die Abscissenaxe einmal, bei einem negativen α wird sie zweimal geschnitten. Die zwei Gleichungen der Curve (D) sind nach (5)

$$X=2r\cos^2\vartheta'+\alpha\cos\vartheta'-\beta\sin\vartheta', \quad Y=r\sin 2\vartheta'+\alpha\sin\vartheta'+\beta\cos\vartheta'.$$

Durch Elimination von ϑ' folgt aus ihnen die Bahngleichung zwischen X und Y

$$\{(\alpha X+\beta Y)^2-(X^2+Y^2-2rX)^2\}(X^2+Y^2)^2+\{(\alpha Y-\beta X)(X^2+Y^2-2rX)+2rY(\alpha X+\beta Y)\}^2=0.$$

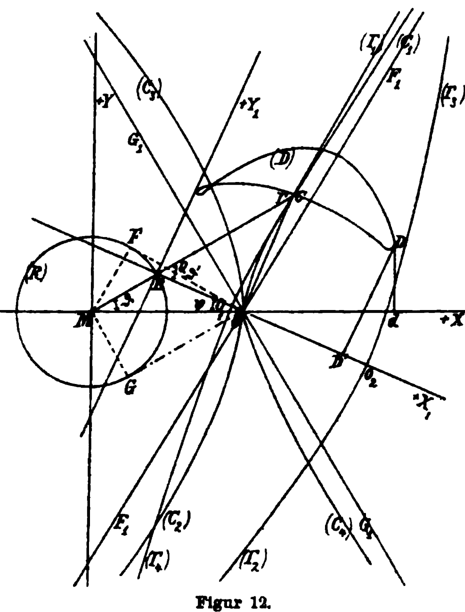
Mit $\beta=0$ liegt der fragliche Systempunkt auf dem Strahle OB, die Gleichungen seiner Bahn sind

$$(X^2+Y^2-2rX)^2=\alpha^2(X^2+Y^2), \quad \text{und} \quad \varrho=\alpha+2r\cos\vartheta'.$$

Die Figur zeigt ausser der Bahn (D) eines beliebigen Systempunktes D noch die Bahnen (D') und (D'') zweier auf der Geraden OB gelegener Punkte D' und D'' mit positivem und negativem α.

Vierter Fall: $e=o$. Unter dieser Annahme ist die Gerade OB stets senkrecht zum Führungskreise (R), die Strecke OB ein Halbmesser desselben. Die Curve (C) reduciert sich auf den Punkt O, die Curve (Γ)

ist imaginär, das System rotirt um den Punkt O und jeder seiner Punkte beschreibt einen mit dem Führungskreise (R) concentrischen Kreis, seine Gleichung ist $X^2 + Y^2 = (r + \alpha)^2 + \beta^2$.



Figur 12.

Zweite Lösung. Es sei (Fig. 12) OB eine beliebige Lage der Systemgeraden, für welche die Bewegung gegeben ist. Um eine Gleichung der Curve der Momentancentra zu erhalten, wählen wir jetzt den Mittelpunkt M des Führungskreises (R) vom Radius $MB = r$ als Ursprung, die Gerade MOX als Abscissen-, die zu ihr senkrechte Linie MY als Ordinatenaxe eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, welches auch zur Bestimmung der Bahn (D) verwendet werden soll. Ziehen wir den Strahl MB, durch O einen senkrechten Strahl zu OB, so schneiden sich diese Linien in dem Momentancentrum C. Nun sei MX Polaraxe, $MC = \varrho$ Fahrstrahl der Curve (C), $\measuredangle\, OMB = \vartheta$ Polarwinkel, ferner sei $\measuredangle\, MOB = \psi$. Damit ergiebt sich aus den Dreiecken BOC und MOB, wenn die veriable Länge $OB = l$ gesetzt wird,

$$BC.\cos(\vartheta + \psi) = OB, \quad \text{oder} \quad \varrho - r = \frac{l}{\cos(\vartheta + \psi)},$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2 - 2\,.\,OM\,.\,MB\cos\vartheta,$$

oder

$$l^2 = e^2 + r^2 - 2er\cos\vartheta.$$

Nun ist $\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\vartheta$, $\cos\psi = \frac{e - r\cos\vartheta}{l}$, so dass $\cos(\vartheta + \psi) = \frac{e\cos\vartheta - r}{l}$.

Dadurch erhalten wir als Polargleichung der Curve (C)

$$\varrho = e\,\frac{e - r\cos\vartheta}{e\cos\vartheta - r}. \tag{1}$$

Setzen wir hier $\varrho\cos\vartheta = X$, $\varrho\sin\vartheta = Y$, dann geht diese Gleichung über in diejenige für rechtwinkelige Coordinaten, und ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$(X - e)^2 (X^2 + Y^2) + \frac{r^2}{e^2}(X^2 - eX + Y^2)^2. \tag{2}$$

Ferner ist eine Gleichung der Curve (Γ) zu bestimmen. Zu dem Ende wählen wir den Punkt B als Ursprung, die Gerade BO als Polaraxe, resp.

Abscissenaxe, bezeichnen den Fahrstrahl $B\Gamma$ mit ϱ', den Polarwinkel $OB\Gamma$ mit ϑ'. Damit erhalten wir für den Radiusvector ϱ', wenn die erste Relation für ϱ beachtet wird,

$$\varrho' = \varrho - r = \frac{l}{\cos\vartheta'} = \frac{l}{\cos(\vartheta + \psi)} = \frac{e^2 + r^2 - 2er\cos\vartheta}{e\cos\vartheta - r}.$$

Nun ist $\cos\vartheta = \frac{l\cos\vartheta' + r}{e}$, $\quad l = -r\cos\vartheta' + \sqrt{e^2 - r^2\sin^2\vartheta'}$, mit welchen Werten sich ergiebt

$$\varrho' = \sec\vartheta' \sqrt{e^2 - r^2\sin^2\vartheta'} - r, \tag{3}$$

und dieses ist die gewünschte Polargleichung. Mit (3) ist zugleich ein weiterer Ausdruck für den Radiusvector der Curve (C) gefunden, nämlich

$$\varrho = \sec\vartheta' \sqrt{e^2 - r^2\sin^2\vartheta'}.$$

Aus (3) entsteht die Gleichung der Curve (Γ) in rechtwinkeligen Coordinaten mit $X = \varrho'\cos\vartheta'$, $Y = \varrho'\sin\vartheta'$, dieselbe lautet

$$(r + \sqrt{X^2 + Y^2})^2 X^2 = e^2 X^2 + (e^2 - r^2) Y^2. \tag{4}$$

Um die Gleichungen der Bahn eines beliebigen Systempunktes D zu erlangen, wählen wir das bewegliche Coordinatensystem so, dass der Punkt B Ursprung, BO Abscissenaxe, die auf ihr senkrechte Gerade BY Ordinatenaxe, bezeichnen die Coordinaten des Punktes D für beide Systeme wie gewöhnlich; diejenigen des beweglichen Ursprunges sind $r\cos\vartheta$, und $r\sin\vartheta$. Damit ergiebt sich

$$X = r\cos\vartheta + \alpha\cos\psi + \beta\sin\psi, \quad Y = r\sin\vartheta - \alpha\sin\psi + \beta\cos\psi. \tag{5}$$

und wenn die Werte von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ substituiert werden

$$\left.\begin{aligned} X &= r\cos\vartheta + \frac{1}{\sqrt{e^2 + r^2 - 2er\cos\vartheta}}\left\{\alpha(e - r\cos\vartheta) + \beta r\sin\vartheta\right\} \\ Y &= r\sin\vartheta - \frac{1}{\sqrt{e^2 + r^2 - 2er\cos\vartheta}}\left\{\alpha r\sin\vartheta - \beta(e - r\cos\vartheta)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

womit zwei Gleichungen für die Bahn (D) gefunden sind.

Erster Fall: $e > r$. (Fig. 12, S. 31.) Für die Curve (C) ergiebt sich mit (1) wenn $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, $\varrho = e, \frac{e^2}{r}, e, \frac{e^2}{r}, e$ und mit $e\cos\vartheta - r = 0$, d. i. mit $\cos\vartheta = \frac{r}{e}$, wird $\varrho = \infty$. Der Lauf der Curve der Momentancentra ist, wenn der Polarwinkel von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ wächst, $OC(C_1)\infty(C_2)\infty O(C_3)\infty(C_4)O$. Die äussersten Lagen der Systemgeraden AB fallen mit den von O aus an den Kreis (R) gezogenen Tangenten OF, OG zusammen, für dieselben ist $\psi = arc\left(\sin = \pm\frac{e}{r}\right)$, $\vartheta = arc\left(\cos = \pm\frac{r}{e}\right)$. Die durch O zu den Radien MF und MG gezo-

genen Parallelen enthalten mithin die unendlich fernen Punkte der Curve (C), sie liegt in dem Scheitelwinkelraum $2 . arc\left(cos = \frac{r}{e}\right)$.

Die Gleichungen der Curve (Γ) sind

$$\varrho' = \frac{e^2 + r^2 - 2\,er\cos\vartheta}{e\cos\vartheta - r} = \sec\vartheta' \sqrt{e^2 - r^2 \sin^2\vartheta'} - r, \qquad (3')$$

wobei $\cos\vartheta' = \frac{e\cos\vartheta - r}{\sqrt{e^2 + r^2 - 2er\cos\vartheta}}$, $\cos\vartheta = \frac{r}{e}\sin^2\vartheta' \pm \frac{\cos\vartheta'}{e}\sqrt{e^2 - r^2\sin^2\vartheta'}$.

Hiermit ergiebt sich

für	$\vartheta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$\vartheta' =$	0	$arc\left(cos = -\frac{r}{\sqrt{e^2 + r^2}}\right)$	π	$arc\left(cos = -\frac{r}{\sqrt{e^2 + r^2}}\right)$	2π
	$\varrho' =$	$e - r$	$\frac{e^2 + r^2}{r}$	$e + r$	$\frac{e^2 + r^2}{r}$	$e - r$
für	$\vartheta' =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$\vartheta =$	0	$arc\left(cos = \frac{r}{e}\right)$	π	$arc\left(cos = \frac{r}{e}\right)$	2π
	$\varrho' =$	$e - r$	∞	$e + r$	∞	$e - r$

Unsere Curve schneidet die Polaraxe zweimal, in den Abständen $BO_1 = e - r$ und $BO_2 = e + r$ vom Ursprunge B, besteht aus zwei Zweigen, welche sich auf beiden Seiten dieser Axe ins Unendliche erstrecken und auf derselben Seite der Ordinatenaxe BY liegen. Ändert sich der Winkel ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$, dann ist der Lauf der Curve (Γ), $O_1\,\Gamma(\Gamma_1)\infty(\Gamma_2)\,O_2\,(\Gamma_3)\infty(\Gamma_4)\,O_1$.

Zweiter Fall: $e > r$. (Fig. 10, S. 28.) Die in O auf OB errichtete Senkrechte trifft den Halbmesser MB stets innerhalb des Kreises (R), so dass die Curve der Momentancentra nur endlich ferne Punkte besitzt. Hier kann $r - e\cos\vartheta$ nie gleich Null werden, weil stets $r > e\cos\vartheta$ ist, was nur endliche Fahrstrahllängen ϱ bedingt. Für $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, ist $\varrho = e, \frac{e^2}{r}, e, \frac{e^2}{r}, e$. Mit $r\cos\vartheta - e = 0$ ist $\cos\vartheta = \frac{e}{r}$, $\varrho = 0$, welcher Wert von ϱ bei einem vollen Umlaufe des Punktes B zweimal erscheint, wodurch die Curve (C) in M und O Doppelpunkte besitzt. Das Maximum von ϱ tritt ein mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$, es ist $\varrho_{max} = \frac{e^2}{r}$. Beschreibt der Strahl MB um M einen vollen Winkel von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$, dann ist der Weg des Momentancentrums $O\,C'\,M\,C''\,O\,C'''\,M\,C''''\,O$.

Aus der Gleichung (3') für die Curve (Γ) folgt mit $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$,

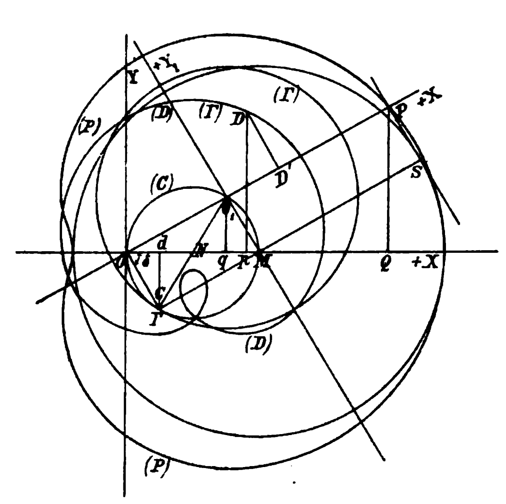
2π, $\varrho = r - e$, $i\infty$, $r + e$, $i\infty$, $r - e$; mit $e^2 - r^2 \sin^2 \vartheta' = 0$, wird $\sin \vartheta' = \frac{e}{r}$, $\varrho = r$, und giebt $\sin \vartheta' = \pm \frac{e}{r}$ die Grenzwerte des Winkels ϑ' für reelle Werte von ϱ'. Die Curve (Γ) (Fig. 10, S. 28) ist bezüglich der Polaraxe symmetrisch, sie schneidet dieselbe in den Abständen $(r - e)$ und $(r + e)$ vom Pole B und besitzt keinen Doppelpunkt.

Dritter Fall: $e = r$. (Fig. 11, S. 30). Hier sind die Polargleichungen der Curven (C) und (Γ) $\varrho = r$, und $\varrho' = 2r$, erstere Linie fällt mit dem Führungskreise (R) zusammen, letztere ist eine Kreislinie von zweifachem Halbmesser etc. wie unter der ersten Lösung.

Vierter Fall: $e = 0$. Die Gleichungen der Curven (C) und (Γ) sind $\varrho = 0$, und $\varrho' = r\ (1 - i\, tg\, \vartheta)$, woraus folgt, dass das System um den Punkt M rotiert.

Was nun die Gleichungen der Bahnen der einzelnen Systempunkte bei diesen Specialfällen betrifft, so kann deren Aufstellung mit Rücksicht auf die (6) und die erste Lösung dem Studierenden überlassen werden. Die Figur 12, (S. 31) giebt die Bahn eines beliebigen Systempunktes D.

7. Die Bewegung eines ebenen, unveränderlichen Systemes in seiner Ebene ist so beschaffen, dass eine der zwei im Punkte P fest mit einander verbundenen Systemgeraden OP und PS (Fig. 13), welche sich rechtwinkelig schneiden, immer durch den festen Punkt O geht, die andere Gerade PS an einem in der Ebene des Systemes festliegenden Kreise mit dem Mittelpunkte M hingleitet. Die Bewegung des Systemes soll geometrisch untersucht werden.



Figur 13.

Wir bezeichnen den wechselseitigen Abstand der Punkte O und M mit e, den Halbmesser des Führungskreises (R) mit r, und wählen die Linie OP als eine beliebige Lage der durch den Punkt O gehenden Systemgeraden.

Errichten wir in O eine Senkrechte OC zu OP und legen durch den entsprechenden Berührungspunkt S der Geraden PS mit dem festen Kreise (R) die Normale SM zu PS, dann schneiden sich die Linien OC und SM in dem entsprechen-

den Momentancentrum C. Es ist nun das Dreieck OCM bei C stets rechtwinkelig, seine Hypotenuse $OM = e$ bleibt für alle Lagen des Systemes konstant, mithin ist die Curve der Momentancentra ein über OM als Durchmesser beschriebener Kreis. Mit O als Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, dessen Axen OMX, $OY \perp OX$, letztere positiv nach oben, sind die Coordinaten des Punktes C, $Od = X$, $dC = -Y$, so dass — $\sphericalangle COX = \vartheta$ setzend — die Gleichungen der Geraden OC und MS sind $Y = -X \operatorname{tg} \vartheta$, $Y = (X - e) \operatorname{cotg} \vartheta$. Aus diesen Relationen resultiert, durch Elimination des Winkels ϑ, als Gleichung des Ortes der Momentancentra

$$X^2 + Y^2 - eX = 0, \tag{1}$$

welche dem bereits genannten Kreise angehört.

Die Curve (Γ) des Systemes ist ein Kreis vom Durchmesser $2 . OM = 2e$, sein Mittelpunkt ist für die gegebene Lage von OP der Eckpunkt O_1 des in dem Kreise (C) liegenden Rechteckes $OCMO_1$, denn das Viereck $OCMO_1$ bleibt für alle Lagen des Systemes ein Rechteck mit constanten Diagonalen $OM = CO_1 = e$. Weil die Curve (Γ) der geometrische Ort der Eckpunkte Γ der Dreiecke POC resp. $PO\Gamma$ über PO ist, wählen wir zur Ableitung ihrer Gleichung das Coordinatensystem so, dass der Punkt P Ursprung, die Linie PO Abscissen-, der Strahl PS Ordinatenaxe, für welches $PO = X$, $O\Gamma = Y$, die Coordinaten des Punktes Γ sind, und setzen $\sphericalangle OO_1C = \varphi$. Dadurch lassen sich die Relationen aufstellen $X = PO = PO_1 + O_1O = r + e \cos \varphi$, $Y = e \sin \varphi$, womit sich, φ eliminierend, ergiebt

$$(X - r)^2 + Y^2 = e^2. \tag{2}$$

Verlegen wir den Ursprung nach O_1, die Axen parallel mit sich selbst verschiebend, so ist für dieses Coordinatensystem

$$X^2 + Y^2 = e^2, \tag{2'}$$

die Gleichung der Curve (Γ), welche demnach ein mit dem Radius e um O_1 als Centrum beschriebener Kreis ist. Die Curven (C) und (Γ) sind von der Grösse des Führungskreises (R) unabhängig. Die Bewegung des Systemes kann mithin aufgefasst werden als das Rollen eines Systemkreises (Γ) mit seiner Innenseite auf der äusseren Seite eines festen Kreises (C) von halb so grossem Radius.

Die Bahn eines beliebigen Systempunktes D ist durch die Bewegung der Geraden OP und $O_1M \parallel PS$, das ist durch diejenige des Durchschnittspunktes O_1 der ebengenannten Linien geregelt. Wir wollen daher, zum Zwecke der Aufstellung einer Gleichung dieser Bahn, das bewegliche Coordinatensystem so annehmen, dass O_1 Ursprung, die Geraden OO_1PX_1, MO_1Y_1, positiv im Sinne der Buchstabenfolge, Axen desselben sind, als festes Coordinatensystem das oben gewählte beibehalten. Die Coordinaten des Punktes D seien für diese beiden Systeme α, β und X, Y; der von den beiden

Abscissenaxen eingeschlossene, veränderliche Winkel sei gleich ϑ. Sind nun m, n die Coordinaten des beweglichen Ursprunges O_1, dann ist

$$X = m + \alpha \cos\vartheta - \beta \sin\vartheta, \qquad Y = n + \alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta.$$

Weil aber die Polargleichung des Kreises (C), auf welchem sich der Ursprung O_1 bewegt, $\varrho = e \cos\vartheta$ für das leicht zu erkennende Coordinatensystem ist, so haben wir $m = \varrho \cos\vartheta = e \cos^2\vartheta$, $n = \varrho \sin\vartheta = e \sin\vartheta \cos\vartheta$, mit welchen Werten sich ergiebt

$$X = e \cos^2\vartheta + \alpha \cos\vartheta - \beta \sin\vartheta, \quad Y = e \sin\vartheta \cos\vartheta + \alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta.$$

Durch Elimination des Winkels ϑ aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\{X^2 + Y^2 - eX\}^2 = \{\alpha Y - \beta(X - e)\}^2 + \{\alpha X + \beta Y\}^2, \tag{3}$$

welches die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D ist, der auch die Form gegeben werden kann

$$X^4 - 2eX^3 + (e^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2Y^2)X^2 - 2eXY^2 + 2\beta^2 eX - 2\alpha\beta eY$$
$$- (\alpha^2 + \beta^2)Y^2 + Y^4 - \beta^2 e^2 = 0. \tag{3'}$$

Die Bahnkurve (D) ist mithin vom vierten Grade, ihre Gestalt ist aus der Figur ersichtlich. Befindet sich der Systempunkt auf der Geraden OP, dann ist $\beta = 0$, folglich die Gleichung seiner Bahn

$$\{X^2 + Y^2 - eX\}^2 = \alpha^2 \{X^2 + Y^2\},$$

oder $X^4 - 2eX^3 + (e^2 - \alpha^2 + 2Y^2)X^2 - 2eXY^2 - \alpha^2 Y^2 + Y^4 = 0$.
Die Curve schneidet die Coordinatenaxen in den Punkten $X = e \pm \alpha$, $Y = 0$, und $X = 0$, $Y = \pm \alpha$.

Die Coordinaten α, β des Punktes P sind r, 0, er beschreibt die sogenannte Fusspunktcurve des Kreises (R), deren Gleichung ist

$$\{X^2 + Y^2 - eX\}^2 = r^2 \{X^2 + Y^2\},$$

sie schneidet die Coordinatenaxen in den Punkten $X = e \pm r$, $Y = 0$, und $X = 0$, $Y = \pm r$. Bezüglich der festen Abscissenaxe sind die Bahnen aller Punkte (α, 0) symmetrisch.

Wenn $\alpha = \beta = 0$ ist, so fällt der Systempunkt mit dem Ursprunge O_1 zusammen, die Gleichung seiner Bahn (O_1) ist $X^2 + Y^2 - eX = 0$, diejenige der Curve (C).

Mit $\alpha^2 + \beta^2 = e^2$ liegt der Systempunkt auf dem Kreise (Γ), es ist die Gleichung seiner Bahn

$$(X^2 + Y^2 - eX)^2 = \{\alpha Y - (X - e)\sqrt{e^2 - \alpha^2}\}^2 + \{\alpha X + Y\sqrt{e^2 - \alpha^2}\}^2,$$

und wenn $\alpha = e$ ist

$$(X^2 + Y^2 - eX)^2 = e^2(X^2 + Y^2),$$

oder $$X^4 - 2eX^3 + (2X^2 - 2eX - e^2)Y^2 + Y^4 = 0.$$

Zum Schlusse wollen wir noch die relative Bahn eines beliebigen Systempunktes D ermitteln. Damit wir zu der Gleichung dieser Bahn gelangen können, haben wir uns das Coordinatensystem mit den Axen O_1X_1, O_1Y_1 als fest, dasjenige mit den Axen OX, OY als beweglich vorzustellen, so dass α und β jetzt die laufenden Coordinaten sind. Aus Gleichung (3') folgt

$$(X^2 + Y^2)\,\alpha^2 + 2e\,Y\alpha\beta + \{(X-e)^2 + Y^2\}\,\beta^2 = (X^2 + Y^2 - e\,X)^2,$$

oder
$$A\alpha^2 + B\,\alpha\beta + C\beta^2 = F.$$

Diese Gleichung zweiten Grades sagt, dass die relative Bahn des Punktes D ein Kegelschnitt ist. Weil in ihr die Glieder der ersten Dimension von α und β fehlen, fällt dessen Mittelpunkt mit dem Ursprunge O_1 zusammen; ferner ist $B^2 - 4\,.\,A\,.\,C = -4\,\{X^2 + Y^2 - e\,X\}^2$, also negativ, folglich ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse.

Die Bestimmung der Lage und Grösse dieser Ellipse ist Sache der analytischen Geometrie, beide sind gegeben, wenn wir die Richtung und Grösse der Hauptaxen kennen.

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die eine Hauptaxenrichtung mit der Abscissenaxe $O_1\,X_1$ einschliesst, so ist $tg\,2\,\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{2\,Y}{2\,X - e}$.
Um die Gleichung der Ellipse auf ihre einfachste Form zu bringen, haben wir die Relation zu bilden

$$R^2 - 2\,(A + C)\,R - B^3 + 4\,A\,C = 0;$$

$$\text{d. i. } R^2 - 2\,\{2\,(X^2 + Y^2 - e\,X) + e^2\}\,R + 4\,(X^2 + Y^2 - e\,X)^2 = 0,$$

und die Wurzeln dieser Gleichung zu suchen, welche sind

$$\left.\begin{matrix} R' \\ R'' \end{matrix}\right\} = 2\,(X^2 + Y^2 - e\,X) + e^2 \pm e\sqrt{4\,(X^2 + Y^2 - e\,X) + e^2}.$$

Bezeichnen jetzt η und ζ die Coordinaten eines beliebigen Ellipsenpunktes für die Hauptaxen als Coordinatenaxen, dann ist die Gleichung unserer Curve

$$\frac{1}{2}R'\,\eta^2 + \frac{1}{2}R''\,\zeta^2 = (X^2 + Y^2 - e\,X)^2,$$

oder
$$\frac{\eta^2}{\sqrt{\left\{\frac{2\,(X^2 + Y^2 - e\,X)^2}{R'}\right\}^2}} + \frac{\zeta^2}{\sqrt{\left\{\frac{2\,(X^2 + Y^2 - e\,X)^2}{R''}\right\}^2}} = 1,$$

so dass ihre Halbaxenlängen $a = (X^2 + Y^2 - e\,X)\sqrt{\frac{2}{R'}}$, $b = (X^2 + Y^2 - e\,X)\sqrt{\frac{2}{R''}}$.
Damit sind die nötigen Daten zur Berechnung und Konstruktion der relativen Bahn eines beliebigen Systempunktes D gegeben.

Ist z. B. $e = 1$, $X = 3$, $Y = 6$, so bekommen wir für die relative Bahn (D) die Gleichung

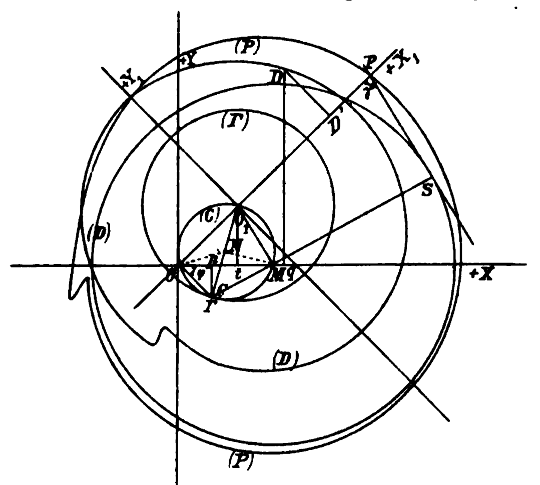
$$45\,\alpha^2 + 12\,\alpha\beta + 40\,\beta^2 = 1764.$$

Daraus folgt $R' = 98$, $R'' = 72$, womit die Richtungen der Hauptaxen sich bestimmen durch $cotg\,\varphi_1 = \frac{B}{R' - 23} = 1\cdot 5$, es ist $\varphi_1 = 33^0\,41'\,24\cdot 2''$, $\varphi_2 = 123^0\,41'\,24\cdot 2''$. Die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung der Ellipse lautet $\frac{\eta^2}{6^2} + \frac{\zeta^2}{7^2} = 1$, so dass $a = 6$, $b = 7$.

Die hier behandelte Bewegung ist die Umkehrung der unter 1 betrachteten Bewegung, dort rollt der Kreis (Γ) in dem Kreise (C), sie ist wichtig für die Konstruktion der Ovalwerke (Ellipsendrehbank), welche Leonardo da Vinci erfand.

Siehe auch: **Schell**, Theorie der Bewegung etc. B. 1. S. 237. etc.

8. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene in der Weise, dass die eine der zwei Systemgeraden OP, PS, welche einen beliebigen spitzen Winkel $OPS = \gamma$ mit einander einschliessen, stets durch den festen Punkt O geht, die andere Linie PS an einem in der Ebene der Bewegung festliegenden Kreise (R), dessen Mittelpunkt M nicht mit O zusammenfällt, hingleitet. Die Curven (C), (Γ), (D) und die relative Bahn eines beliebigen Systempunktes D sollen bestimmt werden.



Figur 14.

Es sei (Fig. 14) $OM = e$, der Radius des Führungskreises $(R) = r$, OP, PS seien die augenblicklichen Lagen der die Bewegung des Systemes bedingenden Geraden, von denen die letztere (R) in S berührt.

Curve der Momentancentra. Ziehen wir die Strahlen $OC \perp OP$, $SMC \perp PS$, so schneiden sich dieselben in dem Momentancentrum C, und machen wir noch die Linie $MO_1 \parallel PS$, so entsteht das Kreisviereck $OCMO_1$, denn die Winkel COO_1 und CMO_1 sind rechte Winkel, der Mittelpunkt N des umschriebenen Kreises liegt auf der Diagonale CO_1. Wir nehmen durchweg das in der Ebene der Bewegung feste Coordinatensystem so an, dass der Punkt O Ursprung, die Gerade OM Abscissen-, die zu ihr normale Gerade OY Ordinatenaxe, beide positiv nach der Buchstabenfolge. Die Coordinaten des Momentancentrums C sind, mit $Cp \perp OX$, $Op = X$, $pC = -Y$. Setzen wir $\measuredangle MOC = \varphi$, beachten, dass $\measuredangle OO_1M = \gamma$, also $\measuredangle OCM = 2\pi - \gamma$, folglich $\measuredangle CMX = 2\pi + \varphi - \gamma$, dann bestehen für die Geraden OC und MS die Gleichungen $Y = -X tg\, \varphi$, und $Y = (X - e)\, tg\, (\varphi - \gamma)$, aus welchen durch Elimination von φ folgt

$$X^2 + Y^2 - e(X + Y cotg\, \gamma) = 0, \tag{1}$$

welches die einen Kreis bedeutende Gleichung der Curve (C) ist. Dieser Kreis geht durch die Punkte O und M, denn für $Y = 0$ ist $X = 0$ und $= e$; mithin ist die Curve (C) der dem Vierecke $OCMO_1$ umschriebene Kreis. Die Mittelpunktscoordinaten dieses Kreises sind $x_0 = \frac{e}{2}$, $y_0 = \frac{e}{2} cotg\, \gamma$. Verlegen wir den Coordinatenursprung durch Parallelverschiebung der Axen nach diesem Punkte und bezeichnen die laufenden Coordinaten

des Kreises für das neue Coordinatensystem mit x, y, dann ist die neue Gleichung der Curve (C) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} e^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma$; daraus folgt, dass der Radius der Curve (C) gleich $\frac{1}{2} e \operatorname{cosec} \gamma$ und die Diagonale $C O_1$ des Viereckes $O C M O_1$ gleich $e \operatorname{cosec} \gamma$, also konstant ist.

Die Curve (Γ). Um diese Systemcurve zu erhalten, haben wir von P aus über PO sämtliche Dreiecke POC zu verzeichnen, ihre Eckpunkte C resp. Γ geben den Ort der Punkte Γ. Mit Zugrundelegung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, dessen Ursprung P, dessen Abscissenaxe PO, dessen Ordinatenaxe PS, und setzend $\sphericalangle O O_1 C = \psi$, $O_1 C = a$, sind die Coordinaten des Punktes Γ, welcher augenblicklich mit C zusammenfällt, $X = r \operatorname{cosec} \gamma + a \cos \psi$, $Y = a \sin \psi$, womit sich als Gleichung der Curve (Γ) ergiebt

$$X^2 + Y^2 - 2 r \operatorname{cosec} \gamma \,.\, X = a^2 - r^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma, \tag{2}$$

welche demnach ein Kreis mit den Mittelpunktscoordinaten $x_0 = r \operatorname{cosec} \gamma$, $y_0 = 0$ ist, welche Coordinaten dem Punkte O_1 angehören. Mit dem nach O_1 als Anfangspunkt verschobenen Coordinatensysteme bekommen wir die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = a^2 = e^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma. \tag{2'}$$

Dass die Curve (Γ) ein um O_1 als Mittelpunkt mit dem Radius $O_1 C = e \operatorname{cosec} \gamma$ beschriebener Kreis ist, konnte aus dem unveränderlichen Abstande des Punktes O_1 von dem Momentancentrum C, während der ganzen Bewegung des Systemes, auch sofort gefolgert werden.

Die Bahn eines beliebigen Systempunktes D. Die Gleichung dieser krummen Linie suchen wir ganz ebenso wie in dem vorhergehenden Falle auf. Wir nehmen das bewegliche rechtwinkelige Coordinatensystem so an, dass O_1 Ursprung, $O_1 P X_1$ Axe der X_1, $O_1 Y_1$ Axe der Y_1, für welches $O_1 D' = \alpha$, $D' D = \beta$ die Coordinaten des Punktes D, während für das feste Coordinatensystem $O q = X$, $q D = Y$ die Coordinaten dieses Punktes sind, setzen $\sphericalangle X_1 O X = \vartheta$, die Coordinaten des beweglichen Ursprunges O_1, $O t = m$, $t O_1 = n$. Damit erhalten wir

$$X = m + \alpha \cos \vartheta - \beta \sin \vartheta, \qquad Y = n + \alpha \sin \vartheta + \beta \cos \vartheta.$$

Die Polargleichung des Kreises, welchen der Ursprung O_1 beschreibt, ist $\varrho = e(\cos \vartheta + \operatorname{cotg} \gamma \sin \vartheta)$, wenn O Pol, OX Axe, ϑ Winkel, ϱ Fahrstrahl des Polarcoordinatensystemes, mithin sind die Coordinaten des Punktes O_1

$$m = \varrho \cos \vartheta = e(\cos \vartheta + \operatorname{cotg} \gamma \sin \vartheta) \cos \vartheta,$$
$$n = \varrho \sin \vartheta = e(\cos \vartheta + \operatorname{cotg} \gamma \sin \vartheta) \sin \vartheta.$$

Diese Werte von m und n in die Gleichungen für X und Y substituiert giebt mit $e \operatorname{cotg} \gamma = \mu$

$$X = e\,cos^2\vartheta + \mu\,sin\,\vartheta\,cos\,\vartheta + \alpha\,cos\,\vartheta - \beta\,sin\,\vartheta,$$
$$Y = e\,sin\,\vartheta\,cos\,\vartheta + \mu\,sin^2\vartheta + \alpha\,sin\,\vartheta + \beta\,cos\,\vartheta.$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen den veränderlichen Winkel ϑ, so folgt als Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes

$$\left.\begin{array}{l} \{X^2 + Y^2 - eX - \mu Y\}^2 = \{\alpha Y - \beta(X-e)\}^2 \\ \qquad + \{\alpha X + \beta(Y-\mu)\}^2, \end{array}\right\} \quad (3)$$

welche vom vierten Grade ist und in nach Potenzen von X geordneter Form lautet

$$\left.\begin{array}{l} X^4 - 2eX^3 + (2Y^2 - 2\mu Y - \alpha^2 - \beta^2 + e^2)X^2 \\ \quad - 2\{eY^2 - e\mu Y - \beta(\beta e + \mu\alpha)\}X - 2\beta(\alpha e + \mu\beta)Y \\ \quad - (\alpha^2 + \beta^2 - \mu^2)Y^2 - 2\mu Y^3 + Y^4 \\ \quad - \beta^2(e^2 + \mu^2) = 0. \end{array}\right\} \quad (3')$$

Einen Spezialfall herausgreifend, erhalten wir mit $\alpha = r\,cosec\,\gamma$, $\beta = 0$, die Bahn des Punktes P durch die Gleichung dargestellt

$$\{X^2 + Y^2 - eX - \mu Y\}^2 = r^2 cosec^2\gamma\,(X^2 + Y^2).$$

Die Figur 14 zeigt sowohl die Bahn eines beliebigen Systempunktes D, als auch diejenige des Punktes P.

Die relative Bahn eines beliebigen Systempunktes D. Diese erhalten wir dadurch, dass wir das Coordinatensystem $X_1 O_1 Y_1$ als fest, dasjenige XOY als beweglich ansehen, also α und β zu laufenden Coordinaten machen, ihre Gleichung folgt aus (3′), deren Glieder wir einfach nach α und β zu ordnen haben, was giebt

$$(X^2 + Y^2)\alpha^2 + 2(eY - \mu X)\alpha\beta + \{(X-e)^2 + Y^2 - 2\mu Y + \mu^2\}\beta^2$$
$$= (X^2 + Y^2 - eX - \mu Y)^2$$

oder
$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = F.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Curve zweiten Grades sind $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, ferner ist $B^2 - 4.A.C = -4(X^2 + Y^2 - eX + \mu Y)^2$. Daraus folgt, dass die relative Bahn des Punktes D eine Ellipse mit dem Mittelpunkte im Coordinatenursprunge O_1 ist.

Die Richtung der Hauptaxen dieser Ellipse bestimmt sich mittelst der Relation

$$tg\,2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{2(eY - \mu X)}{2(eX - \mu Y) - e^2 - \mu^2},$$

ferner ist ihre Hauptaxengleichung

$$\frac{1}{2}R'\eta^2 + \frac{1}{2}R''\zeta^2 = (X^2 + Y^2 - eX - \mu Y)^2,$$

wo R' und R'' die Wurzeln der Gleichung sind

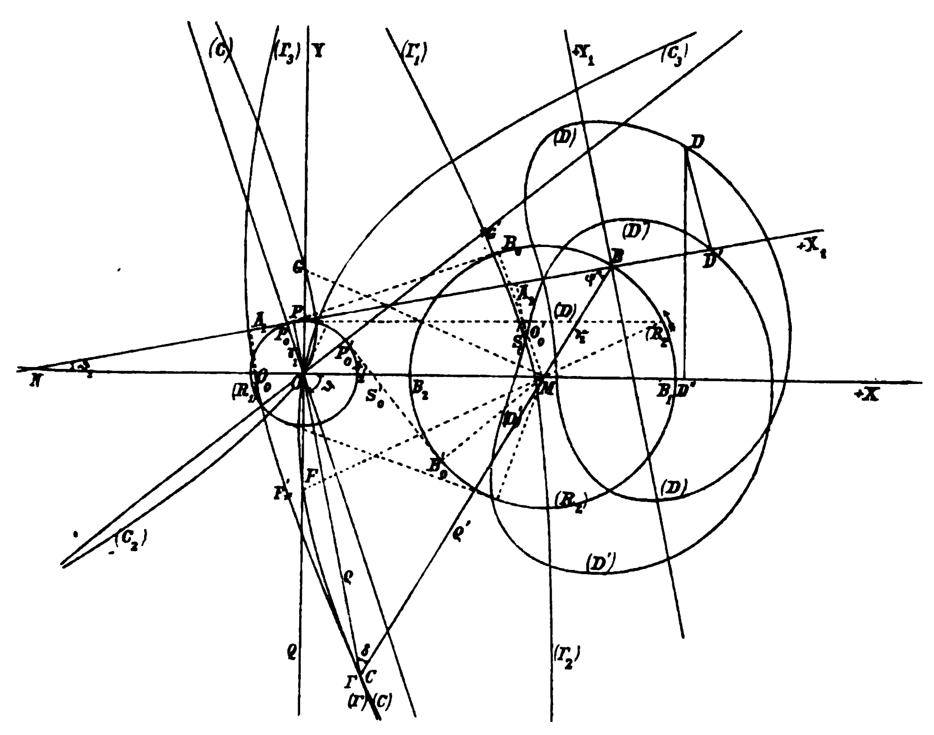
$$R = \{2(X^2 + Y^2 - eX - \mu Y) + e^2 + \mu^2\}$$
$$\pm\sqrt{4(X^2 + Y^2 - eX)(e^2 + \mu^2) + 4\mu\{(e^2 - 4X^2 + \mu^2)Y + e\mu^2\} + e^4 + \mu^4}.$$

Die hier behandelte Bewegung ist die Umkehrung der unter 2 betrachteten Bewegung.

Mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$, also $cotg\,\gamma = 0$, wird $\mu = e\,cotg\,\gamma = 0$, sämtliche Glie-

der mit μ verschwinden in diesem Falle und die sich ergebenden Gleichungen reduzieren sich auf die entsprechenden des vorhergehenden Problems, denn die Systemgeraden OP und PS stehen jetzt senkrecht aufeinander.

9. Die Bewegung eines ebenen, unveränderlichen Systemes in seiner Ebene ist so beschaffen, dass eine seiner Geraden PB stets einen festen Kreis (R_1) im Punkte P berührt, während ihr Punkt B einen festen Kreis (R_2) beschreibt. Die Bewegung des Systemes soll in geometrischer Hinsicht untersucht werden.



Figur 15.

Es sei (Fig. 15) O der Mittelpunkt des von der Systemgeraden PB im Punkte P berührten Kreises (R_1) vom Radius r_1, M derjenige des Kreises (R_2) mit dem Halbmesser r_2, welcher von dem Systempunkte B beschrieben werden muss, $OM = e$.

Die Curve der Momentancentra. Für die gegebene Phase ist der Durchschnittspunkt C der Strahlen OP und MB Momentancentrum. Behufs Aufstellung von Gleichungen der Curve (C) nehmen wir ein Polarcoordinaten- und ein rechtwinkeliges Coordinatensystem so an, dass der Punkt O Ursprung, die Gerade OMX Polaraxe, resp. Abscissenaxe, die zu ihr senkrechte Linie OQ Ordinatenaxe, die Richtung dieser Linien

positiv nach der Buchstabenfolge denkend, $\measuredangle MOC = \vartheta$ Polarwinkel, $OC = \varrho$ Fahrstrahl. Ferner verlängern wir BP bis zum Schnittpunkte N mit der Polaraxe, setzen $\measuredangle MBN = \varphi$, $\measuredangle PNO = \vartheta_1$, $\measuredangle OCM = \delta$, die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes $C = X, Y$. Weil die Dreiecke NPO und CPB bei P rechtwinkelig sind, erhalten wir mit Berücksichtigung der Figur

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta,\ \delta = \frac{\pi}{2} - \varphi,\ \sin\varphi = \frac{NM}{MB}\sin\vartheta_1 = \frac{NO + OM}{MB}\cos\vartheta$$
$$= \frac{r_1 + e\cos\vartheta}{r_2},\ \sin\delta = \cos\varphi = \frac{1}{r_2}\sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e\cos\vartheta)^2},$$
$$\cos\delta = \sin\varphi = \frac{r_1 + e\cos\vartheta}{r_2}.$$

Ferner ergiebt sich durch das Dreieck OMC

$$OC : OM = \sin(\vartheta + \delta) : \sin\delta, \qquad \text{oder } \varrho = \frac{e\sin(\vartheta + \delta)}{\sin\delta}$$

Daraus folgt durch Elimination des Winkels δ

$$\varrho^2 - 2\varrho e\cos\vartheta = e^2\frac{(r_1 + e\cos\vartheta)^2 - r_2{}^2\cos^2\vartheta}{r_2{}^2 - (r_1 + e\cos\vartheta)^2}, \qquad (1)$$

welches eine Polargleichung der Curve (C) ist. Setzen wir in (1) $\varrho\cos\vartheta = X$, $\varrho\sin\vartheta = Y$ und entwinkeln, so erhalten wir als deren Gleichung für rechtwinkelige Coordinaten

$$\left.\begin{array}{l} 4e^2 r_1{}^2 X^2\{(X-e)^2 + Y^2\}^2(X^2+Y^2) \\ = \{[X^2 + Y^2 - 2eX][(X^2+Y^2)(r_1{}^2 - r_2{}^2) - e^2X^2] \\ - e^2[r_1{}^2(X^2+Y^2) + (e^2 - r_2{}^2)X^2]\}^2. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Curve (Γ) des Systemes, welche auf der Curve (C) rollt. Diese krumme Linie erhalten wir durch Konstruktion sämtlicher Dreiecke BPC von B aus über BN, ihre Eckpunkte C resp. Γ geben den Ort der Punkte Γ. Zur Bestimmung einer Gleichung der Curve (Γ) legen wir ein Polarcoordinatensystem zugrunde mit dem Pole B, der Polaraxe BPN, dem Fahrstrahle $BC = \varrho'$, dem Polarwinkel $CBP = \varphi$. Beachten wir, dass

$$\sin\varphi = \frac{r_1 + e\cos\vartheta}{r_2}, \qquad \text{also } \cos\vartheta = \frac{r_2\sin\varphi - r_1}{e}, \qquad \varrho' = \frac{\varrho + r_1}{\sin\varphi},$$

so bekommen wir mit (1), nach einer kleinen Rechnung, die Polargleichung

$$\varrho'^2 - 2r_2\varrho' = \{e^2 - r_2{}^2 - r_1{}^2 + 2r_1r_2\sin\varphi\}\sec^2\varphi. \qquad (3)$$

Zu rechtwinkeligen Coordinaten, mit B als Ursprung und der Polaraxe als Abscissenaxe, von (3) übergehend, finden wir die Gleichung der Curve (Γ)

$$(X^2 + Y^2)\{X^2 + r_1{}^2 + r_2{}^2 - e^2\}^2 Y^2 = 4r_2{}^2\{X^2 Y + r_1\}^2. \qquad (4)$$

Die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes D. Wir wählen das mit dem Systeme sich bewegende rechtwinkelige Coor-

dinatensystem so, dass B dessen Ursprung, die Linien PBX_1, $BY_1 \perp BX_1$, erstere positiv von links nach rechts, letztere positiv nach oben, Axen der X_1, Y_1 sind. Zu festen Coordinatenaxen nehmen wir die Linien OMX und $OY \perp OX$, bezeichnen die Coordinaten des Punktes D für das erstere System mit α, β, diejenigen für das letztere mit X, Y und den Winkel BNX, welcher früher ϑ_1 genannt wurde, hier mit ϑ. Die Coordinaten x_0, y_0 des beweglichen Ursprunges sind

$$x_0 = e + r_2 \cos(\vartheta + \varphi),\quad y_0 = r_2 \sin(\vartheta + \varphi),$$

und wenn wir die oben für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ angeschriebenen Werte beachten

$$x_0 = e \cos^2\vartheta - r_1 \sin\vartheta + \cos\vartheta \sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e \sin\vartheta)^2},$$
$$y_0 = (e \sin\vartheta + r_1)\cos\vartheta + \sin\vartheta \sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e \sin\vartheta)^2}.$$

Für die Coordinaten X, Y des Systempunktes D erhalten wir

$$X = x_0 + \alpha \cos\vartheta - \beta \sin\vartheta,\qquad Y = y_0 + \alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta,$$

oder, mit den Werten von x_0 und y_0,

$$\left.\begin{aligned} X &= \left\{e \cos\vartheta + \alpha + \sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e \sin\vartheta)^2}\right\}\cos\vartheta \\ &\quad - (\beta + r_1)\sin\vartheta, \\ Y &= (e \sin\vartheta + \beta + r_1)\cos\vartheta \\ &\quad + \left\{\alpha + \sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e \sin\vartheta)^2}\right\}\sin\vartheta. \end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

Diese zwei Gleichungen zusammen geben die Bahn des Punktes D; es sind für gegebene Werte von ϑ mit ihrer Hilfe die Coordinaten X, Y dieses Punktes zu berechnen; eine aus ihnen abgeleitete einzige Gleichung zwischen X und Y ist unpraktikabel.

Befindet sich der fragliche Systempunkt auf der Geraden BP, dann ist $\beta = 0$, und sind die Gleichungen seiner Bahn

$$\left.\begin{aligned} X &= \left\{e \cos\vartheta + \alpha + \sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e \sin\vartheta)^2}\right\}\cos\vartheta \\ &\quad - r_1 \sin\vartheta, \\ Y &= (e \sin\vartheta + r_1)\cos\vartheta \\ &\quad + \left\{\alpha + \sqrt{r_2{}^2 - (r_1 + e \sin\vartheta)^2}\right\}\sin\vartheta. \end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

Wir haben die Gleichungen der Curven (C), (Γ) und (D) ermittelt, ohne auf das Verhältnis der Grössen e, r_1 und r_2 zu einander Rücksicht zu nehmen, so dass die gefundenen Resultate ganz allgemein gültig sind. Die Gestalt dieser Curven lässt sich bequem durch ihre Verzeichnung erkennen, sie ist abhängig von der gegenseitigen Lage der beiden Kreise (R_1) und (R_2), sowie von dem Verhältnisse der Durchmesser dieser Kreise. Einige Spezialfälle sollen hier etwas näher betrachtet werden.

Erster Fall: $e > r_1 + r_2$, $r_2 > r_1$ (Fig. 15, S. 41). Hier liegt der Kreis (R_1) ganz ausserhalb des Kreises (R_2). Die Bewegung des Systemes bleibt dieselbe, gleichviel ob $r_1 \lesseqgtr r_2$ ist. Die Bewegung der Systemgeraden BP erfolgt zwischen einer äusseren und einer inneren Tangente

an die beiden Kreise (R_1) und (R_2), so dass, wenn der Punkt B den Kreis (R_2) im Sinne des Pfeiles beschreibt, der Berührungspunkt P nicht den ganzen Umfang des Kreises (R_2), sondern nur einen Bogen $P_0 P'_0$ desselben durchläuft. Die Winkel, welche diese Grenzlagen der Geraden BP mit der Abscissenaxe einschliessen, lassen sich bequem bestimmen. Denken wir uns durch P_0, d. i. der der äusseren Grenzlage entsprechende Punkt P, zu OX eine Parallele gezogen, so erhalten wir das rechtwinkelige Dreieck $P_0 B_0 S_0$ mit einem Winkel ϑ_1 bei P_0, für welchen $\sin\vartheta_1 = \frac{r_2 - r_1}{e}$, womit die äussere Grenzlage bestimmt ist. Für die innere Grenzlage haben wir zufolge der Ähnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke $OP'_0 S'_0$ und $MB'_0 S'_0$, wenn $\sphericalangle P'_0 S'_0 O = \vartheta_2$, $OS'_0 = x$ gesetzt wird, $r_1 : x = r_2 : (e - x) = \sin\vartheta_2$, woraus $\sin\vartheta_2 = \frac{r_1 + r_2}{e}$. Der von dem Punkte P durchlaufene Bogen $P_0 P'_0$ ist gleich $r_2 (\vartheta_1 + \vartheta_2) = r_1 \left\{arc\left(\sin = \frac{r_2 - r_1}{e}\right) + arc\left(\sin = \frac{r_1 + r_2}{e}\right)\right\}$. Die den Grenzlagen von BP entsprechenden Richtungen des Fahrstrahles ϱ der Curve der Momentancentra bestimmen sich durch die Relationen $\cos\vartheta = \frac{r_2 - r_1}{e}$, und $\cos\vartheta = -\frac{r_1 + r_2}{e}$. Aus der Gleichung (1) folgt für die Länge des Radiusvektor der Curve (C) bei gegebenem Polarwinkel

$$\varrho = e\cos\vartheta \pm \frac{e\,(r_1 + e\cos\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{r_2^2 - (r_1 + e\cos\vartheta)^2}}.$$

Der Polarwinkel liegt zwischen $\vartheta = arc\left(\cos = \pm\frac{r_2 - r_1}{e}\right)$ und $\vartheta = arc\left(\cos = \mp\frac{r_1 + r_2}{e}\right)$, die Curve befindet sich innerhalb der von den Strahlen OP_0 und OP_0' begrenzten Flächenräume mit den Winkeln $arc\left(\sin = \frac{r_2 - r_1}{e}\right) + arc\left(\sin = \frac{r_1 + r_2}{e}\right)$. Wir bekommen für $\cos\vartheta = \frac{r_2 - r_1}{e}$ und $\cos\vartheta = -\frac{r_1 + r_2}{e}$, $\varrho = \infty$, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$, $\varrho = \frac{e r_1}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}$, dieser Fahrstrahllänge entsprechen die Curvenpunkte F und G, welches die Schnittpunkte der Curve (C) und der Ordinatenaxe sind. Für $\varrho = 0$, erhalten wir $\cos\vartheta = -\frac{r_1}{e + r_2}$, und $\cos\vartheta = -\frac{r_1}{e - r_2}$, wobei $\frac{r_1}{e + r_2} < \frac{r_1 + r_2}{e}$, und $\frac{r_1}{e - r_2} < \frac{r_1 + r_2}{e}$, so dass der Punkt O ein Doppelpunkt der

Curve ist. Dieser Wert von ϱ tritt ein, wenn der Punkt B mit den Schnittpunkten B_1 und B_2 des Kreises (R_2) und der Centrallinie OM beider Kreise zusammenfällt. Lassen wir das System sich in der Weise bewegen, dass der Punkt B von B_1 aus seine Bahn im Sinne des Pfeiles durchläuft, so rückt das Momentancentrum von O aus nach $F, C, (C)$ und gelangt ins Unendliche, wenn der Punkt B in B_0' ankommt. Bewegt sich der Punkt B nun von B_0' aus nach B_1 hin, dann geht das Momentancentrum aus ∞ nach (C_1), G, O; beim weiteren Fortschreiten nach B_0 durchläuft der Punkt C die Bahn $O(C_2)\infty$; schliesslich durchfährt dieser Punkt das Curvenstück $\infty(C_3)O$, wenn der Punkt B seinen Bogen $B_0 B_1$ zurücklegt. Damit ist die Curve (C) und die Bewegung des Momentancentrums charakterisiert.

Für den Lauf der Curve (Γ) des Systemes ergiebt sich das folgende: Aus ihrer Polargleichung (3) ersehen wir, dass

$$\varrho' = r_2 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{e^2 - (r_2 \sin\varphi - r_1)^2}.$$

Die Winkel φ und ϑ stehen zueinander in der Beziehung $\sin\varphi = \frac{r_1 + e\cos\vartheta}{r_2}$. Für die Grenzwerte von ϑ haben wir $\cos\vartheta = \frac{r_2 - r_1}{e}$, und $\cos\vartheta = -\frac{r_1 + r_2}{e}$, die entsprechenden Werte von φ ergeben sich aus $\sin\varphi = \pm 1$, so dass dieselben sind $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$. Mit $\varphi = 0$ ist $\cos\vartheta = -\frac{r_1}{e}$, $\varrho' = r_2 \pm \sqrt{e^2 - r_1^2}$, es sind daher die Abstände der Schnittpunkte A_1 und A_2 der Curve (Γ) und der Polaraxe vom Pole $BA_1 = r_2 + \sqrt{e_2 - r_1^2}$, $BA_2 = \sqrt{e^2 - r_1^2} - r_2$. Mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ist $\varrho' = \infty$, der erstere Wert korrespondiert ϱ, wenn dieser Fahrstrahl normal zur äusseren Tangente, der letztere, wenn er senkrecht zur inneren Tangente an beide Kreise ist. Für $\varrho = 0$ ist $\cos\vartheta = -\frac{r_1}{e + r_2}$ und $= -\frac{r_1}{e - r_2}$, die entsprechenden Werte von φ ergeben sich aus $\sin\varphi = \frac{r_1}{e + r_2}$, und $-\frac{r_1}{e + r_2}$, die zugehörigen Fahrstrahllängen der Curve (Γ) sind $\varrho' = e \pm r_2$, O_0 und O'_0 sind die Endpunkte dieser Radiivektores. Von Interesse sind noch diejenigen Punkte von (Γ), welche den Punkten F und G von (C) entsprechen, für welche $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ ist. In diesem Falle haben wir $\sin\varphi = \frac{r_1}{r_2}$, $\varrho' = r_2\left(1 \pm \frac{e}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}\right)$, F' und G' sind die zugehörigen

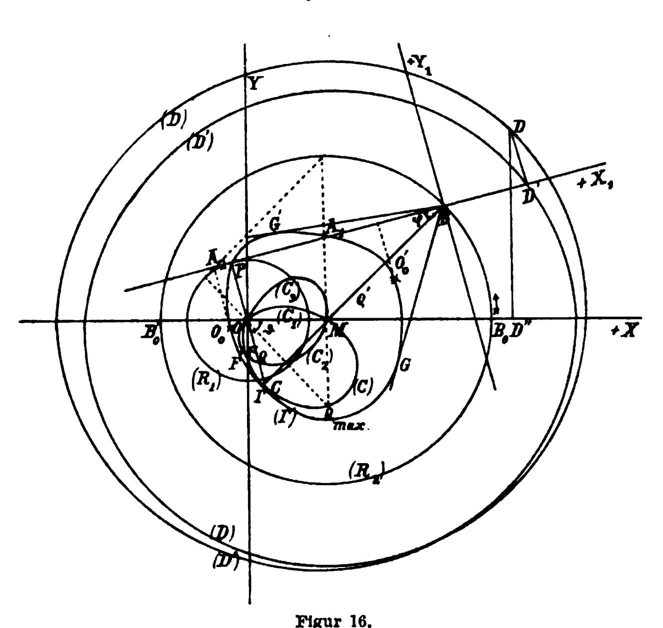
Punkte von (Γ). Bewegt sich der Punkt B der Systemgeraden $B\,P$ von B_1 aus im Sinne des Pfeiles einmal auf seinem Kreise, so ist der Lauf der Curve (Γ) $O_0\,F'\,\Gamma(\Gamma)\infty(\Gamma_1)\,G'\,A_2\,O'_0\,(\Gamma_2)\infty\,(\Gamma_3)\,A_1\,O_0$.

Die Bahn eines beliebigen im Endlichen gelegenen Systempunktes D, welche die Gleichungen (5) bestimmen, ist die geschlossene Curve (D). Die Bahn (D') eines auf der Systemgeraden $B\,P$ liegenden Punktes D' ist mittelst der Gleichungen (6) zu berechnen.

Zweiter Fall: $e = r_1 + r_2$. Hier berühren sich die beiden Kreise (R_1) und (R_2) äusserlich. Eine Modifikation der Bewegung, rücksichtlich des ersten Falles, tritt nur in sofern ein, als die Berührungspunkte der inneren Tangente jetzt in einem Punkte zusammenfallen, welcher auf der Centralen $O\,M$ sich befindet. Die Curve (C) nähert sich asymptotisch der Abscissenaxe.

Dritter Fall: $e = r_2, \gtrless r_1$. Der Kreis (R_2) berührt die Ordinatenaxe und schneidet den Kreis (R_1). Jetzt können nur die beiden äusseren Tangenten an die Kreise (R_1) und (R_2) gezogen werden. Der Punkt B schwingt zwischen den Schnittpunkten beider Kreise auf dem ausserhalb des Kreises (R_1) gelegenen Peripherieteile des Kreises (R_2).

Vierter Fall: $e \gtreqless r_1$, $e + r_1 < r_2$. (Fig. 16). Jetzt befindet sich der Kreis (R_1) innerhalb des Kreises (R_2) ohne denselben zu berühren. In der Figur wurde $e > r_1$ gewählt. Hier durchläuft der Winkel ϑ alle Werte zwischen 0 und 2π, denn die Gerade $B\,P$ kann bei ihrer Bewegung niemals Tangente des Kreises (R_2) werden. Verzeichnen wir die Curve der Momentancentra, so ergiebt sich eine verschlungene, in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, alle ihre Punkte liegen im Endlichen, die Punkte O und M sind Doppelpunkte derselben.



Figur 16.

Wir finden, dass mit $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \varrho = e, \frac{e r_1}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}, e, -\frac{e r_1}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}, e$ etc. Die Fahrstrahllänge ist gleich Null, wenn $\vartheta = arc\left(cos = -\frac{r_1}{e + r_2}\right)$ und $\vartheta = arc\left(cos = -\frac{r_1}{e - r_2}\right)$. Der grösste Wert von ϱ tritt ein, wenn das Dreieck OMC bei M rechtwinkelig ist, was mit $\vartheta + \delta = \frac{\pi}{2}$, oder $cos(\vartheta + \delta) = 0$, der Fall ist. Dadurch ergiebt sich als entsprechender Polarwinkel mit Rücksicht auf $cos\,\delta = \frac{r_1 + e\,cos\,\vartheta}{r_2}$, $\vartheta = arc\left\{cos = -\frac{1}{e^2 + r_2^2}\right\}\left\{e r_1 \mp r_2 \sqrt{e^2 + r_2^2 - r_1^2}\right\}$, wo gegenwärtig das obere Zeichen vor der Wurzelgrösse zu nehmen ist, und folgt mit diesem Werte

$$\varrho_{max} = \frac{e}{cos\,\vartheta} = \frac{e(e^2 + r_2^2)}{r_2\sqrt{e^2 + r_2^2 - r_1^2} - e r_1}.$$

Dieser Betrag von ϱ ist endlich, denn der Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung ist grösser als Null. Daraus folgt, dass sämtliche Punkte der Curve (C) im Endlichen gelegen sind. Lassen wir den Punkt B der Geraden BP den Kreis (R_2) von B_1 aus einmal durchlaufen, dann ist der entsprechende Weg des Momentancentrums $OFC\,(C)$ $M(C_1)\;OF(C_2)\;M(C_3)\;O$. Der Punkt F, welcher mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ erreicht wird, ist ebenfalls ein Doppelpunkt.

Für die Curve (Γ) des Systemes bekommen wir eine einfache in sich selbst zurücklaufende krumme Linie. Der Polarwinkel φ durchläuft hier nicht alle Werte zwischen 0 und 2π, denn durch die Relation $sin\,\varphi = \frac{r_1 + e\,cos\,\vartheta}{r_2}$ erhalten wir für $\vartheta = 0$ und $= \pi$, $\frac{r_1 \pm e}{r_2} \lesseqgtr \pm 1$.

Mit Hilfe der Gleichung unserer Curve sehen wir leicht, dass:

für $\varphi =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\varrho' =$	$r_2 \pm e\sqrt{e^2 - r_1^2}$	$\pm\infty\sqrt{-1}$	$r_2 \mp e\sqrt{e^2 - r_1^2}$
für $\varphi =$		$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\varrho' =$		$\mp\infty\sqrt{-1}$	$r_2 \pm \sqrt{e^2 - r_1^2}$.

für $\vartheta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\varphi =$	$\frac{r_1+e}{r_2}$	$\frac{r_1}{r_2}$	$\frac{r_1-e}{r_2}$
$\varrho' =$	r_2	$r_2\left(1+\frac{e}{\sqrt{r_2^2-r_1^2}}\right)$	r_2
für $\vartheta =$		$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\varphi =$		$\frac{r_1}{r_2}$	$\frac{r_1+e}{r_2}$
$\varrho' =$		$r_2\left(1-\frac{e}{\sqrt{r_2^2-r_1^2}}\right)$	r_2

Wenn $\varrho = 0$ ist, dann ist $\cos\vartheta = -\frac{r_1}{e+r_2}$ und $= -\frac{r_1}{e-r_2}$, folglich $\sin\varphi = \frac{r_1}{e+r_2}$ und $= -\frac{r_1}{e-r_2}$, so dass die entsprechenden Werte von $\varrho' = r_2 \pm e$. Den Punkten O, O der Curve (C) entsprechen die Punkte O_0, O'_0 der Curve (Γ). Den Werten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ entsprechen die auf der Polaraxe gelegenen Curvenpunkte A_1 und A_2. Innerhalb des Winkelraumes von $\varphi = arc\left(\sin = \frac{r_1+e}{r_2}\right)$ bis $\varphi = arc\left(\sin = \frac{r_1-e}{r_2}\right)$ liegen nur imaginäre Curvenpunkte, die zu diesen Winkeln gehörigen Fahrstrahlen BG und BG' sind Tangenten an die Curve (Γ) in den Punkten G und G'. Der Wert des Radiusvektor ϱ' wird zu einem Maximum, wenn das Dreieck $M\Gamma O$ ein bei O rechtwinkeliges ist, d. i. wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so dass $\varrho'_{max} = r_2\left(1+\frac{e}{\sqrt{r_2^2-r_1^2}}\right)$, welcher Fahrstrahl dem Punkte F', dem der Doppelpunkt F von (C) entspricht, angehört. Weil dieser Wert von ϱ' endlich ist, so liegen alle Punkte der Curve (C) im Endlichen. Lassen wir wieder den Punkt B der Systemgeraden BP von B_1 auf seinem Kreise sich bewegen, dann ist der Ort der Punkte Γ, O_0 F' (Γ) $G O'_0$ A_1 G' A_2 O_0.

Die Figur (S. 46) zeigt noch die Bahn (D) eines beliebigen Systempunktes D, sowie die Bahn (D') eines auf der Systemgeraden BP gelegenen Punktes D'; beide Curven laufen in sich selbst zurück und besitzen keine Doppelpunkte.

Die Bildung weiterer Spezialfälle ist dem Studierenden anzuraten. Mit $r_1 = 0$ kommen wir auf das Problem 6 zurück, denn unter dieser Annahme geht der Kreis (K_1) in den Punkt O über.

Die Lösung des hier behandelten Problems in der Weise, dass der Mittelpunkt M des Kreises (R_2) als Ursprung des festen Coordinatensystemes gewählt wird, soll dem Studierenden zur selbständigen Übung anheim gegeben werden.

Es ist sehr zweckmässig alle derartigen Aufgaben nicht nur analytisch, sondern auch konstruktiv durchzuarbeiten, letzteres wirkt sehr anregend auf das Studium dieses Teiles der Mechanik. — Die eingehende Untersuchung der Curven (C), (Γ), (D) gehört in die analytische Geometrie, sie würde hier zu weit führen.

10. Der Ort des Momentancentrums C und die Bahn (D) eines Punktes des Systemes sind gerade Linien, beide schneiden sich unter einem gegebenen Winkel α. Zu beweisen, dass die Curve (Γ) des Systemes eine logarithmische Spirale mit dem Pole auf der Geraden (D) ist.

11. Die Bahn (D) eines Punktes des Systemes ist eine Kettenlinie, die Curve (C) ihre Direktrix. Zu beweisen, dass die Curve (Γ) dann eine Parabel ist.

12. Es soll dargethan werden, dass der Brennpunkt einer Parabel eine Kettenlinie beschreibt, wenn die Parabel auf einer Geraden rollt.

Die Lösungen der drei letzten Aufgaben siehe Schell, Theorie der Bewegung etc. B. I. S. 240—241.

Zweiter Teil.

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bewegung eines Punktes.

Erstes Kapitel.

Projektionen, Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Punktes.

a) Die Geschwindigkeit.

Sind v_x, v_y, v_z die Projektionen der Geschwindigkeit v eines Punktes auf drei zu einander rechtwinkelige Axen der x, y, z, α, β, γ die Neigungen der Tangente im Punkte (x, y, z) der Bahn gegen diese Axen, so haben wir, wenn t die Zeit bezeichnet, die Beziehungen

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos\alpha, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v \cos\beta, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = v \cos\gamma,$$

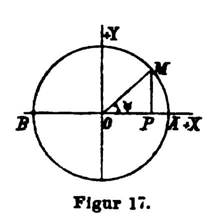
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \qquad \frac{\cos\alpha}{v_x} = \frac{\cos\beta}{v_y} = \frac{\cos\gamma}{v_z}.$$

Projizieren wir die Bewegung eines Punktes auf eine der Coordinatenebenen, etwa diejenige der xy, bezeichnet ds das Bogenelement der Hauptbahn, $d\sigma$ dasjenige der Projektionsbahn des Punktes, γ die Neigung der Tangente im Punkte (x, y, z) der Hauptbahn gegen die Ebene der xy, dann ist die Projektionsgeschwindigkeit

$$v_{xy} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cos\gamma.$$

1. Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem Kreise, seine Bewegung wird auf einen Durchmesser der Bahn projiziert. Welches ist die Projektionsbewegung und die Projektionsgeschwindigkeit?

Es sei (Fig. 17, S. 51) $AB = 2r$ der Diameter der Bahn, auf welchen die Bewegung des Punktes zu projizieren ist, A die Lage des sich mit der Geschwindigkeit $v = a$ bewegenden Punktes zur Zeit $t = 0$, M sein



Figur 17.

Ort zur Zeit $t = t$, O das Kreiscentrum, $\sphericalangle AOM = \psi$, $MP \perp OA$, $OP = x$, s = Bogen AM = dem in der Zeit t von dem Punkte zurückgelegten Wege, ω die Winkelgeschwindigkeit des Punktes M.

Weil $\quad s = a\,t = r\,\psi = r\,\omega\,t,$

$$x = r\cos\psi = r\cos\frac{at}{r} = r\cos\omega\,t,$$

so ist $\quad v_x = -r\,\omega\sin\omega\,t = -a\sin\omega\,t = -a\sin\psi = -a\sin\frac{a\,t}{r}.$

Die Projektionsbahn und die Projektionsgeschwindigkeit sind periodische Funktionen der Zeit, so dass die Projektionsbewegung eine oszillierende ist. Mit $\psi = 0$, und $\psi = \pi$, ist $x = r$, und $x = -r$, $v_x = 0$; mit $\psi = \frac{\pi}{2}$, und $\psi = \frac{3}{2}\pi$, ist $x = 0$, $v_x = -a$, und $v_x = a$. Die Minimalwerte von v_x fallen mit den Maximas von x zusammen, nämlich in den Punkten A und B. Das Maximum von v_x tritt ein, wenn x sein Minimum annimmt, nämlich so oft die Projektion des Punktes M durch das Centrum O geht. Bezeichnet T die Schwingungszeit des Punktes P, so ist $\cos\frac{aT}{r} = 1$, also $T = \frac{2\pi r}{a} = \frac{2\pi}{\omega}$. Die Periode der Bewegung ist bei der Haupt- und bei der Projektionsbewegung dieselbe.

2. Ein Punkt bewegt sich auf einem Kreise vom Radius a mit der konstanten Geschwindigkeit c, oder der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Die Bewegung des Punktes wird auf eine Ebene projiziert, welche die Ebene der Bewegung unter einen Winkel γ schneidet. Die Projektionsbewegung soll untersucht werden.

Die Projektionsbahn ist eine Ellipse mit den Halbaxen $a = a$, und $b = a\cos\gamma$. Für den Kreis sind die Projektionsbewegungen bezüglich zweier sich rechtwinkelig schneidender, mit den Hauptaxen der Ellipse gleich liegender Durchmesser $x = a\cos\omega\,t$, $y = a\sin\omega\,t$, und die entsprechenden Projektionsgeschwindigkeiten $v_x = -a\,\omega\sin\omega\,t$, $v_y = a\,\omega\cos\omega\,t$; daher haben wir für die Projektionsbewegungen auf den Hauptaxen der Ellipse: $x' = a\cos\omega\,t$, $y' = b\sin\omega\,t$, $v'_x = -a\,\omega\sin\omega\,t$, $v'_y = b\,\omega\cos\omega\,t$, $v'^2 = \omega^2(a^2\sin^2\omega\,t + b^2\cos^2\omega\,t)$, oder auch $v = \frac{a\,b}{\varrho}\,\omega$, denn die Polargleichung der Ellipse ist $\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\omega\,t + b^2\cos^2\omega\,t}$. Für die Neigung β der Geschwindigkeit v' gegen die grosse Axe besteht die Relation $tg\,\beta = \frac{v'_y}{v'_x} = -\frac{b}{a}\cot g\,\omega\,t = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'}{y'}$. Die Schwingungszeit der Hauptbewegung und diejenige der Pro-

jektionsbewegung ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$. v'_x wird jedesmal zu einem Maximum, wenn die Projektion des Punktes einen Endpunkt der kleinen Axe passiert, v'_y wird jedesmal zu einem solchen, wenn die Projektion des Punktes mit einem der Endpunkte der grossen Axe zusammenfällt, dann ist $v'_x = \mp a\omega = \mp c$, $v'_y = \pm \frac{b}{a} c$. Für die Endpunkte der grossen Axe ist v'_x, für diejenigen der kleinen v'_y ein Minimum, nämlich gleich Null.

3. Es sind gegeben die Projektionen einer ebenen Bewegung bezüglich zweier sich rechtwinkelig schneidender Axen durch die Gleichungen $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$. Man soll bestimmen α) die Bahn, β) die Projektionen der Geschwindigkeit, γ) die Geschwindigkeit selbst und ihre Richtung.

α) Der Punkt beschreibt eine Ellipse, denn es ist $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \omega t$, $\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t$, woraus folgt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, als Bahngleichung.

β) $v_x = - a\omega \sin \omega t = - c \sin \omega t, \quad v_y = b\omega \cos \omega t = \frac{b}{a} c \cos \omega t.$

γ) $v = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t} = \frac{a b}{\varrho} \omega = \frac{c}{a^2 b} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$, $tg\, \alpha = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$.

4. Die Projektionen einer ebenen Bewegung auf zwei rechtwinkelig sich schneidende, in der Ebene der Bewegung gelegene Axen sind $x = ct$, $y = \frac{1}{2} g t^2$. Welche Bewegung ist durch diese Gleichungen dargestellt? Eliminieren wir aus diesen Gleichungen die Zeit, so folgt als Bahngleichung des Punktes $x^2 = \frac{2c^2}{g} y$, derselbe beschreibt mithin eine Parabel vom Parameter $\frac{2c^2}{g}$. Die Projektionen der Geschwindigkeit sind $v_x = c$, $v_y = gt = \frac{g}{c} x$. Sonach erfolgt die Bewegung in der Richtung der Abscissenaxe mit konstanter, in der Richtung der Ordinatenaxe mit einer der Zeit proportional sich vergrössernden Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit des Punktes ist $v = \sqrt{c^2 + g^2 t^2} = \frac{1}{c} \sqrt{c^4 + g^2 x^2}$, und ihre Neigung gegen die Abscissenaxe bestimmt sich durch $tg\, \alpha = \frac{g}{c} t = \frac{g}{c^2} x$.

5. Die Projektionen einer ebenen Bewegung auf zwei rechtwinkelig sich schneidende, in der Bewegungsebene gelegene Axen sind $x = a t$,

$y = b\,t - \frac{1}{2} g\,t^2$. Welche Bewegung ist durch diese Gleichungen dargestellt?

Die Elimination von t aus den gegebenen Gleichungen führt zu $y = \frac{b}{a}\,x - \frac{x^2}{\frac{2\,a^2}{g}}$; es ist daher die Bahn des Punktes eine Parabel, welche die Abscissenaxe in den Punkten $x = 0$, und $x = \frac{2\,a\,b}{g}$ schneidet, und deren höchster Punkt die Coordinaten $x = \frac{a\,b}{g}$, $y = \frac{b^2}{2\,g}$ besitzt. Verlegen wir den Ursprung des Coordinatensystemes nach diesem höchsten Punkte, die Coordinatenaxen parallel mit sich selbst verschiebend, und nehmen wir die neue Ordinatenaxe im entgegengesetzten Sinne positiv, dann ist die Bahngleichung für das neue System $x^2 = \frac{2\,a^2}{g}\,y$; mithin $\frac{2\,a^2}{g}$ der Parameter der Bahn. Die Projektionsgeschwindigkeiten sind $v_x = a$, $v_y = b - g\,t$. Ferner ist $v = \sqrt{a^2 + (b - g\,t)^2}$, und der Winkel, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Abscissenaxe einschliesst, ist $\alpha = arc\left(t\,g = \frac{a\,b - g\,x}{a^2}\right) = arc\left(tg = \frac{b - g\,t}{a}\right)$. Weil die Geschwindigkeiten v_y und v von der Zeit t abhängig, so sind dieselben während der Bewegung des Punktes nicht konstant.

6. Auf einem Kegelschnitte $y^2 = 2mx + nx^2$ bewegt sich ein Punkt mit der konstanten Geschwindigkeit c. Welches sind die Projektionen seiner Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen?

Bezeichnet α den Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, y) der Bahn mit der Abscissenaxe einschliesst, so ist $t\,g\,\alpha = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{m + n\,x}{y}$, folglich $v_x = c\,cos\,\alpha = \frac{c\,y}{\sqrt{y^2 + (m + n\,x)^2}}$, $v_y = c\,sin\,\alpha = \frac{c\,(m + n\,x)}{\sqrt{y^2 + (m + n\,x)^2}}$.

7. Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c auf einer Cycloide, die Gleichungen dieser Curve sind $x = a\,(\varphi - sin\,\varphi)$, $y = a\,(1 - cos\,\varphi)$. Welches sind die Projektionsgeschwindigkeiten und die Projektionsbahnen dieses Punktes bezüglich der Coordinatenaxen?

Bezeichnet α den Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, y) der Bahn mit der Abscissenaxe einschliesst, dann ist

$$t\,g\,\alpha = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{a\,sin\,\varphi\,d\,\varphi}{a\,(1 - cos\,\varphi)\,d\,\varphi} = \frac{sin\,\varphi}{1 - cos\,\varphi} = cotg\,\frac{\varphi}{2},$$

folglich $v_x = c\,cos\,\alpha = c\,sin\,\frac{\varphi}{2}$, $v_y = c\,sin\,\alpha = c\,.\,cos\,\frac{\varphi}{2}$.

Für die Ermittelung der Projektionsbahn nehmen wir der Einfachheit halber an, dass zur Zeit $t = 0$ der Punkt im Coordinatenursprunge sich befindet.

Weil $v_y = \frac{dy}{dt}$, so ist $a \sin\varphi \, d\varphi = c \cos\frac{\varphi}{2} \, dt$,

oder $$2a \sin\frac{\varphi}{2} \, d\varphi = c\, dt,$$

folglich: $$2a \int_0^{\varphi} \sin\frac{\varphi}{2} \, d\varphi = c \int_0^t dt, \text{ d. i. } 4a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = ct = s.$$

Damit ergiebt sich $\cos\varphi = \frac{8a(a-ct) + c^2t^2}{8a^2}$, $\sin\varphi = \frac{4a-ct}{8a^2}\sqrt{(8a-ct)ct}.$

Durch Einsetzung dieser Werte von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in die Gleichungen der Cycloide erhalten wir die Projektionsbahnen

$$x = a\left\{arc\left(\cos = \frac{8a(a-ct) + c^2t^2)}{8a^2} + \frac{ct - 4a}{8a^2}\sqrt{(8a-ct)ct}\right\},\right.$$

$$y = \frac{(8a - ct)ct}{8a},$$

oder $$x = a\left\{arc\left(\cos = \frac{8a(a-s) + s^2}{8a^2}\right) + \frac{s - 4a}{8a^2}\sqrt{(8a - s)s}\right\}.$$

$$y = \frac{(8a - s).s}{8a}.$$

Weil $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4a}\sqrt{(8a - ct)ct}$, $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{4a - ct}{4a}$, so sind die Projektionsgeschwindigkeiten auch

$$v_x = \frac{c}{4a}\sqrt{(8a - ct)ct} = \frac{c}{4a}\sqrt{(8a - s)s}, \quad v_y = \frac{4a - ct}{4a}c = \frac{4a - s}{4a}c$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$v = c, \; tg\,\alpha = \frac{4a - ct}{\sqrt{(8a - ct)ct}} = \frac{4a - s}{\sqrt{(8a - s)s}}.$$

Die gefundenen Gleichungen führen uns zu den nachstehenden Resultaten: Mit $t = 0$, resp. $s = 0$, ist $v_x = 0$, $v_y = c$, $x = 0$, $y = 0$. Mit $s = 4a$, d. i. zur Zeit $t = \frac{4a}{c}$, wenn also der Punkt den Scheitel der Cycloide passiert, ist $v_x = c$, $v_y = 0$, $x = a\pi$, $y = 2a$. Mit $s = 8a$, d. i. zur Zeit $t = \frac{8a}{c}$, wenn also der Punkt wieder auf der Abscissenaxe angekommen ist, haben wir $v_x = 0$, $v_y = -c$, $x = 2a\pi$, $y = 0$. Die Maxima und Minima der Projektionsgeschwindigkeiten sind dann vorhanden, wenn der Punkt mit den Spitzen und dem Scheitel der Curve zusammenfällt, dem Minimum von v_x entspricht das Maximum von v_y, und umgekehrt. Die Projektion der Bahn auf die Abscissenaxe wächst von $t = 0$, bis $t = \frac{8a}{c}$, d. i. von $s = 0$,

bis $s = 8a$. Die Projektion der Bahn auf die Ordinatenaxe wächst von $t = 0$, bis $t = \frac{4a}{c}$, d. i. von $s = 0$, bis $s = 4a$, und nimmt dann wieder ab von $t = \frac{4a}{c}$, bis $t = \frac{8a}{c}$, d. i. von $s = 4a$, bis $s = 8a$, in welchem Momente sie wieder gleich Null wird. Durchläuft der Punkt die ganze Cycloide, dann ist die Projektionsbahn auf die Axe der x gleich ihrer Basis, diejenige auf die Axe der y gleich der doppelten Curvenaxe; es werden die Hauptbahn und Projektionsbahnen in der Zeit $T = \frac{8a}{c}$ beschrieben.

8. Ein Punkt bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit c auf einer gemeinen Schraubenlinie. Die Bewegung des Punktes wird auf drei zu einander rechtwinkelige Axen, nämlich auf zwei zu einander senkrechte Durchmesser des Basiskreises und die Schraubenaxe projiziert. Welches sind die Gleichungen seiner Projektionsbewegungen und die Geschwindigkeiten derselben? Welches sind die Projectionsbewegungen in den Ebenen der drei Axen und ihre Geschwindigkeiten?

a) Nehmen wir die Axe der Schraubenlinie zur Axe der z, so dass in der Ebene der xy der Basiskreis der Curve liegt, bezeichnen mit α den konstanten Winkel, welchen die Schraubenlinie mit der Ebene der xy einschliesst, mit (x, y, z) die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes, mit φ den Winkel, welche die durch den Punkt (x, y, z) und die Schraubenlinienaxe gelegte Ebene mit der Ebene der xz einschliesst, und mit a den Halbmesser des Basiskreises, dann sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Schraubenlinie, annehmend, dass dieselbe in der Axe der x beginnt,

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = a \sin\varphi, \qquad z = a\, tg\,\alpha \,.\, \varphi = m\varphi,$$

wo $m = a\, tg\,\alpha$, den sogenannten Parameter der Curve darstellt. Damit ergeben sich als Gleichungen der Projektionen der Curve auf die Ebene xy, xz und yz

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad x = a \cos\frac{z}{m}, \qquad y = a \sin\frac{z}{m}.$$

Zunächst bestimmen wir die Projektionsgeschwindigkeiten für die drei Axen. Die Winkel, welche die Tangente im Curvenpunkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen einschliesst, seien α_1, β_1, γ_1. Aus den Gleichungen für die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes folgt:

$$dx = -a \sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = a \cos\varphi\, d\varphi, \quad dz = m\, d\varphi,$$

$$ds = \sqrt{a^2 + m^2}\, d\varphi = a \sec\alpha\, d\varphi,$$

so dass $\cos\alpha_1 = \frac{dx}{ds} = -\cos\alpha \sin\varphi$, $\qquad \cos\beta_1 = \frac{dy}{ds} = \cos\alpha\cos\varphi$,

$\cos\gamma_1 = \frac{dz}{ds} = \sin\alpha$.

Mithin sind die Projektionsgeschwindigkeiten für die Coordinatenaxen

$$\left.\begin{array}{c} v_x = c\cos\alpha_1 = -c\cos\alpha\sin\varphi, \quad v_y = c\cos\beta_1 = c\cos\alpha\cos\varphi, \\ v_z = c\cos\gamma_1 = c\sin\alpha. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Weiter sind die Projektionsbewegungen bezüglich der Coordinatenaxen zu bestimmen. Wir nehmen an, dass zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten des Punktes $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ sind. Weil $dx = v_x\,dt$, so ist

$-a\sin\varphi\,d\varphi = -c\cos\alpha\sin\varphi\,dt$, oder $a\,d\varphi = c\cos\alpha\,dt$, wodurch $a\int_0^\varphi d\varphi = c\cos\alpha\int_0^t dt$, folglich $a\varphi = ct\cos\alpha$, was giebt $\varphi = \frac{ct}{a}\cos\alpha = \frac{s}{a}\cos\alpha$.

Durch Einsetzung dieses Wertes von φ in die Relationen für x, y, z erhalten wir die Gleichungen der Projektionsbahnen

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos\left(\frac{ct}{a}\cos\alpha\right) = a\cos\left(\frac{s}{a}\cos\alpha\right), \\ y = a\sin\left(\frac{ct}{a}\cos\alpha\right) = a\sin\left(\frac{s}{a}\cos\alpha\right), \\ z = ct\,.\sin\alpha = s\,.\sin\alpha. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Setzen wir die konstante Grösse $\frac{c\cos\alpha}{a} = \omega$, so ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Horizontalprojektion des Punktes, womit die Gleichungen (1) und (2) übergehen in

$$v_x = -a\omega\sin\omega t, \qquad v_y = a\omega\cos\omega t, \qquad v_z = a\,tg\,\alpha\,.\,\omega = m\omega. \quad (3)$$
$$x = a\cos\omega t, \qquad y = a\sin\omega t, \qquad z = a\,tg\,\alpha\,.\,\omega t = m\,.\,\omega t. \quad (4)$$

Die Projektionsbewegungen für die Axen der x und der y sind oszillatorisch; die Schwingungsperioden sind gleich, es ist die Zeit einer vollen Schwingung $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\,.\,\frac{a}{c}\sec\alpha$. Die Maxima und Minima der Geschwindigkeiten sind gleich, nämlich $c\cos\alpha = a\omega$, und Null. Einem Maximum von v_x entspricht stets ein Minimum von v_y, und umgekehrt. Die Projektionsbewegung bezüglich der Axe der Schraubenlinie ist eine gleichförmige, sie erfolgt mit der Geschwindigkeit $c\sin\alpha = m\omega$. Aus den Gleichungen für die Projektionsgeschwindigkeiten folgt als Geschwindigkeit des Punktes $v = \sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z} = a\omega\,.\sec\alpha = c$.

Die Projektionsgeschwindigkeiten für die Ebenen der drei Axen können auf zweierlei Weise gefunden werden. Sind α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche die Tangente im Punkte (x, y, z) der Bahn mit den Coordinatenebenen einschliesst, so haben wir

$$\cos\alpha_2 = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{ds^2}} = \cos\alpha, \qquad \cos\beta_2 = \sqrt{\frac{dx^2 + dz^2}{ds^2}} =$$

$\cos\alpha\sqrt{\sin^2\varphi + tg^2\alpha}, \quad \cos\gamma_2 = \sqrt{\frac{dy^2 + dz^2}{ds^2}} = \cos\alpha\sqrt{\cos^2\varphi + tg^2\alpha},$

womit sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned} v_{xy} = c\cos\alpha, \quad v_{xz} = c\cos\alpha\sqrt{\sin^2\varphi + tg^2\alpha}, \\ v_{yz} = c\cos\alpha\sqrt{\cos^2\varphi + tg^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Weil aber $\cos\alpha = \frac{a}{c}\omega$, $\sin\varphi = \sin\omega t$, $\cos\varphi = \cos\omega t$, so lässt sich auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} v_{xy} = a\omega, \quad v_{xz} = a\omega\sqrt{\sin^2\omega t + tg^2\alpha}, \\ v_{yz} = a\omega\sqrt{\cos^2\omega t + tg^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wenn v_x, v_y, v_z bekannt sind, wie dieses hier der Fall ist, dann ergeben sich die soeben ermittelten Geschwindigkeiten rascher, wir haben einfach:

$$v_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega, \quad v_{xz} = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = a\omega\sqrt{\sin^2\omega t + tg^2\alpha},$$
$$v_{yz} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = a\omega\sqrt{\cos^2\omega t + tg^2\alpha}.$$

Weil v_{xy} konstant ist, so folgt, dass die Horizontalprojektion des Punktes sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die Gleichung der Projektionsbahn für die Ebene der xy folgt aus $x = a\cos\omega t$ und $y = a\sin\omega t$, sie ist $x^2 + y^2 = a^2$. Die Gleichung der Projektionsbahn für die Ebene der xz folgt aus $x = a\cos\left(\frac{ct}{a}\cos\alpha\right)$, und $z = ct\sin\alpha$, sie ist $x = a\cos\frac{z}{a\,tg\,\alpha} = a\cos\frac{z}{m}$. Die Gleichung der Projektionsbahn für die Ebene der yz folgt aus $y = a\sin\left(\frac{ct}{a}\cos\alpha\right)$, und $z = ct\sin\alpha$. sie ist $y = a\sin\frac{z}{a\,tg\,\alpha} = a\sin\frac{z}{m}$. Diese Gleichungen müssen natürlich mit denjenigen der Projektionen der Schraubenlinie auf die Coordinatenebenen identisch sein.

Für die Projektion des Punktes auf die Ebene der xz sind die Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit $v_x = -a\omega\sin\omega t$, $v_z = c\sin\alpha = m\omega$; für seine Projektion auf die Ebene der yz sind dieselben Geschwindigkeiten $v_y = a\omega\cos\omega t$, $v_z = m\omega$; ferner sind die entsprechenden Projektionsbahnen $x = a\cos\omega t$, $z = m\omega t$, und $y = a\sin\omega t$, $z = m\omega t$. Die Projektionsbewegungen auf diesen Ebenen sind mithin gleiche oszillatorishe Bewegungen. Die Projektionen des Punktes schwingen mit konstanter Geschwindigkeit aufsteigend zwischen zwei zur Axe der Schraubenlinie parallelen Geraden, welche einen wechselseitigen Abstand gleich dem Durchmesser des Basiskreises besitzen. Die Zeit einer vollen Schwingung

ist $T = \frac{2\pi a}{c \cos\alpha} = \frac{2\pi}{\omega}$, innerhalb welcher der Punkt eine Höhe $h = 2\pi m$, oder einen Weg $s = 2\pi a \sec\alpha$ auf der Schraubenlinie durchläuft.

b) Denken wir uns den mit der Geschwindigkeit c auf der Schraubenlinie sich bewegenden Punkt, so legt derselbe in der Zeit t den Weg $s = ct$ zurück. Weil nun die Curve unter konstantem Winkel gegen die Ebene der $x\,y$ geneigt ist, so ist die Geschwindigkeit der Horizontalprojektion des Punktes und seine Vertikalgeschwindigkeit konstant, so dass sich der Punkt, weil die Horizontalprojektion der Hauptbahn ein Kreis ist, mit einer konstanten, horizontalen Winkelgeschwindigkeit ω bewegt. Die Coordinaten des Punktes (x, y, z) der Schraubenlinie sind

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = a\,tg\,\alpha\,.\,\varphi = m\varphi.$$

Es ist aber hier $\varphi = \omega t$, mithin werden die Projektionsbewegungen des Punktes bezüglich der Coordinatenaxen durch die Gleichungen repräsentiert

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = m\,.\,\omega t.$$

Daraus ergeben sich die entsprechenden Projektionsgeschwindigkeiten

$$v_x = -a\omega\sin\omega t, \quad v_y = a\omega\cos\omega t, \quad v_z = m\,.\,\omega.$$

Weil $\omega = \frac{c}{a}\cos\alpha$, so lassen sich diese Ausdrücke leicht in die unter (a) durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen Resultate umwandeln. Für die Bewegung der Projektion des Punktes in der Ebene der $x\,y$ bestehen die Gleichungen

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad \text{woraus folgt} \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

und ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Projektion den Basiskreis durchläuft $v_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\,\omega$. Die Projektionsbewegung in der Ebene der $x\,z$ ist durch die Gleichungen gegeben

$$x = a\cos\omega t, \quad z = m\omega t, \quad \text{woraus} \quad x = a\cos\frac{z}{m}$$

als Gleichung der Projektionsbahn sich ergiebt. Die Geschwindigkeit der Projektion des Punktes in dieser Ebene ist

$$v_{xz} = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = a\,\omega\sqrt{\sin^2\omega t + tg^2\alpha}.$$

Die Projektionsbewegung in der Ebene der $y\,z$ ist durch die Gleichungen gegeben

$$y = a\sin\omega t, \quad z = m\omega t, \quad \text{woraus} \quad y = a\sin\frac{z}{m}$$

als Gleichung der Projektionsbahn folgt, die mit der Geschwindigkeit $v_{yz} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = a\,\omega\sqrt{\cos^2\omega t + tg^2\alpha}$ beschrieben wird.

Die weitere Ausführung ergiebt sich durch die erste Lösung.

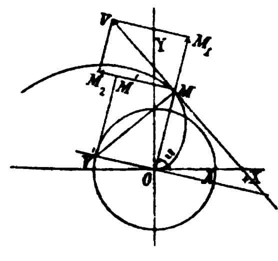
b) Roberval's Tangentenkonstruktionen.

Roberval (1602—1675) hat eine sehr geistreiche Anwendung auf die Konstruktion der Tangenten von Curven gemacht, die von einem beweglichen Punkte beschrieben werden. Derselbe zerlegte die Bewegung in zwei oder mehrere Componenten, bestimmte die Verhältnisse der Geschwindigkeiten und suchte hieraus die Richtung ihrer Resultanten, welche diejenige der Tangente ist. Diese Methode hat er auf 13 Curven angewendet.

α) Tangente und Normale für Polarcurven.

Ist $r = f(\vartheta)$ die Polargleichung der Curve, so sind die Geschwindigkeiten des die Curve beschreibenden Punktes längs des Fahrstrahles und senkrecht dazu $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\vartheta}{dt}$, mithin ist deren Verhältnis $\frac{dr}{r\,d\vartheta} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r}$. Vermöge dieses Verhältnisses können wir das Parallelogramm der Geschwindigkeiten oder ein ihm ähnliches konstruieren, seine durch den Curvenpunkt gehende Diagonale giebt dann die Richtung der Tangente für diesen Punkt. Wird dieses Parallelogramm im Sinne der Rotation gedreht, annehmend der Punkt bewege sich vom Pole aus, um einen rechten Winkel, dann wird die Richtung dieser Diagonale zur Richtung der Normalen des fraglichen Curvenpunktes.

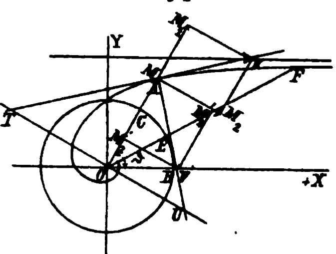
1. Die archimetische Spirale. Bezeichnet a denjenigen konstanten Radiusvektor, welcher dem Bogen $\vartheta = 1$ entspricht, so ist die Gleichung der Curve $r = a\,\vartheta$. Nun sei, wie auch in der Folge, die Geschwindigkeit in der Richtung des Radiusvektor r gleich v_r, diejenige senkrecht dazu gleich v_s, dann haben wir $\frac{v_r}{v_s} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r} = \frac{a}{r}$. Ist daher im Curvenpunkte M (Fig. 18)



Figur 18.

eine Tangente zu ziehen, so machen wir auf dem Fahrstrahle $M M_1 = a = O A$, die zu ihm senkrechte Gerade $M M_2 = r = O M$, verzeichnen mit $M M_1$, $M M_2$ das Parallelogramm $M M_1 V M_2$ und ziehen den Strahl $M V$, letzterer ist die verlangte Berührungslinie. Drehen wir dieses Parallelogramm $M M_1 V M_2$ um den Punkt M durch einen rechten Winkel in die Lage $M M'_1 V' O$, so giebt die Diagonale $M V'$ die Richtung der Normalen des Punktes M, denn es ist $\sphericalangle V M V' = \sphericalangle V M M_2 + \sphericalangle M_2 M V' = \sphericalangle O M V' + \sphericalangle M_2 M V' = \frac{\pi}{2}$. Die Strecke $O V'$ ist immer konstant, es ist $O V' = a$, sie ist die Projektion der Normalen auf die zum Fahrstrahle senkrechte Gerade durch O, also die Länge der Subnormalen, so dass die Länge der Subnormalen der archimetischen Spirale eine konstante Grösse ist.

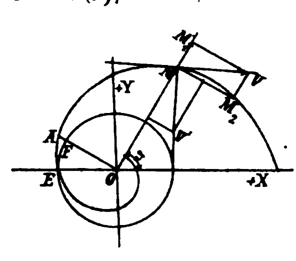
2. Die hyperbolische Spirale. (Fig. 19.) Die Gleichung dieser Curve ergiebt sich durch Vertauschung der rechtwinkeligen Coordinaten in der Gleichung $xy = a$, der gleichseitigen Hyperbel mit den Polarcoordinaten r und ϑ, sie ist $r\vartheta = a$. Damit finden wir $\frac{v_r}{v_s} = -\frac{1}{\vartheta}$. Hier ist $OA = a$ der dem Bogen $BEC = OB = 1$ entsprechende Fahrstrahl.



Figur 19.

Halbieren wir den Bogen BC in E und machen auf dem Strahle OE, $OF = 2 . OA = 2a$, so ist F ein weiterer Curvenpunkt u. s. f. Soll nun im Punkte M die Tangente gezogen werden, so machen wir auf seinem Fahrstrahle $MM_1 = OB = 1$, $MM_2 \perp OM$ und gleich Bogen BC, zeichnen über MM_1 und MM_2 das Parallelogramm MM_1VM_2 und dessen Diagonale MV, letztere giebt die Richtung der verlangten Tangente. Die Diagonale MV' dieses um 90° gedrehten Parallelogrammes, des Rechteckes $MM'_1\ V'M'_2$, ist die Richtung der Normalen des Punktes M. Die Tangente und Normale des Punktes M treffen den durch O gehenden, zu dem Radiusvektor OM senkrechten Strahl in den Punkten T und U. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke TOM, MOU, MM'_2V' folgt $OT = \frac{M'_2M}{M'_2V'}\, OM = a$, es ist daher die Subtangente dieser Curve eine konstante Grösse.

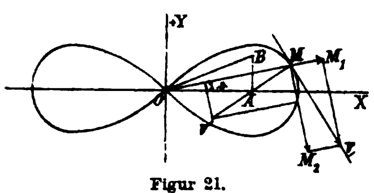
3. Die logarithmische Spirale. Die Gleichung dieser Linie ist $r = r_0\, a^{\vartheta}$, wo r_0 gewöhnlich gleich der Einheit genommen wird, so dass $\frac{v_r}{v_s} = l(a)$. Mit $r_0 = 1$ und a als Basis eines Logarithmensystemes ist $\vartheta = l(r)$, der Polarwinkel Logarithmus des Leitstrahles. Ist nun (Fig. 20) $OE = r_0 = 1$, der Primradiusvektor, $OA =$ dem Fahrstrahle a, so ist der mit dem Halbmesser OE von O aus beschriebene Kreisbogen EF zwischen OE und OA gleich $l(a)$. Soll daher im Punkte M die Tangente gezogen werden, dann machen wir $MM_1 =$ Bogen EF, $MM_2 \perp OM$ und $= OE$, verzeichnen das Parallelogramm MM_1VM_2, worauf die Berührungslinie durch den vierten Eckpunkt V dieses Viereckes geht. Bezeichnet μ den Winkel zwischen Fahrstrahl und Tangente, so ist



Figur 20.

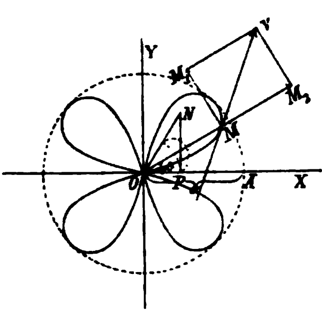
$$tg\,\mu = \frac{1}{l(a)},$$ also konstant.

4. Die Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$. In diesem Falle ist $\frac{v_r}{v_s} = -tg\, 2\vartheta$.

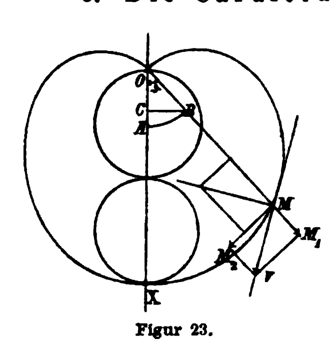

Figur 21.

Um die Tangente für den Punkt M (Fig. 21) zu verzeichnen, machen wir $\sphericalangle XOB = 2\sphericalangle XOM$, nehmen OA beliebig, ziehen $AB \perp OX$ bis OB, machen $MM_1 = AB$, $MM_2 \perp OM$ und $= OA$, konstruieren das bekannte Parallelogramm MM_1VM_2 und ziehen den Strahl MV, dieser ist die Berührungslinie.

5. Die Curve deren Gleichung ist $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. Zu Polarcoordinaten übergehend, erhalten wir die Gleichung $r = a \sin 2\vartheta$, wodurch die Curve leicht verzeichnet werden kann (Fig. 22), es ist $\frac{v_r}{v_s} = \frac{2}{tg\, 2\vartheta} = 2 \cot g\, 2\vartheta$. Machen wir daher $\sphericalangle XON = 2\sphericalangle XOM$, OP auf OX beliebig gross, $PN \perp OX$, $MM_1 = PN$, $MM_2 \perp OM$ und $= 2 . OP$, konstruieren damit das bekannte Parallelogramm und ziehen den Strahl MV, so ist dieser Tangente im Punkte M der Curve.

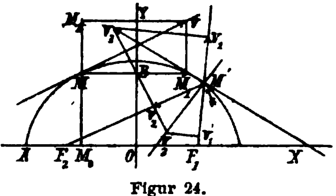

Figur 22.

6. Die Cardioide $r = 2a \cos \vartheta \pm a$. (Fig. 23.) Hier ist $\frac{v_r}{v_s} = -\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta \mp 2}$. Um die Tangente für den Curvenpunkt M zu erhalten, schlagen wir von O aus mit dem beliebig grossen Radius OA den Kreisbogen AB, machen $BC \perp OX$, wodurch $BC = \sin \vartheta$, $OC = \cos \vartheta$. Nun zeichnen wir $MM_1 = BC$, $MM_2 \perp OM$ und $= 2 \cdot OA - OC$, verzeichnen das bekannte Rechteck und den Strahl MV, letzterer ist Berührungslinie.


Figur 23.

β) Tangente und Normale für andere Curven.

1. Die Kegelschnitte. a) Ellipse. Die Projektionsgeschwindigkeiten für die Hauptaxen der Curve sind, wenn $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, ihre Gleichung ist, $v_x = \frac{c a^2 y}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}$, $v_y = -\frac{c b^2 x}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}$, so dass $\frac{v_y}{v_x} = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Ist die Tangente für den Curvenpunkt M (Fig. 24)



Figur 24.

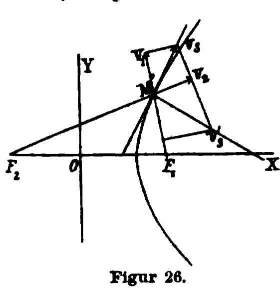
zu konstruieren, so machen wir auf den Parallelen durch M zu den Axen $M M_1 = a^2 y = O A^2 . M_0 M_1$, $M M_2 = b^2 x = \overline{O B}^2 . O M_0$, was arithmographisch bewirkt werden kann, bilden das Rechteck $M M_1 V M_2$ und ziehen den Strahl $M V$, dieser ist die verlangte Tangente. Ein anderes Verfahren ist einfacher. Sind $F_1 M'$, $F_2 M'$ die Fahrstrahlen des Punktes M' von den Brennpunkten F_1 und F_2 aus, so nimmt bei der Bewegung des Punktes M', wenn er die Curve beschreibt, weil immer $F_1 M' + F_2 M' = 2a =$ konst, der grössere Fahrstrahl $F_2 M'$ um ebensoviel ab, als der kleinere $F_2 M'$ zunimmt, wenn die Bewegung im Sinne des Pfeiles erfolgt. Zerlegen wir die Geschwindigkeit des Punktes M' längs eines jeden Radiusvektor und senkrecht dazu, so ist die Componente längs des wachsenden Fahrstrahles nach dem Aussenraume, längs des abnehmenden nach dem Innenraume der Curve gerichtet. Machen wir daher $M' V_1 = M' V_2$, gleich den Geschwindigkeiten, mit welchen die Zu- und Abnahme der Vektorenlängen erfolgt, und errichten in V_1, V_2 Senkrechte $V_1 V_3$, $V_2 V_3$ zu $F_1 M'$, $F_2 M'$, so schneiden sich diese in dem Punkte V_3, welcher der vierte Eckpunkt der beiden Parallelogramme ist, von denen $M' V_1$ und $M' V_2$ Seiten sind, es ist $M' V_3$ die gemeinschaftliche Diagonale beider Parallelogramme und daher der Strahl $M' V_3$ die Tangente an die Ellipse im Punkte M'. Machen wir noch $M' V'_1 = M' V_1$, $V'_1 V'_3 \perp F_1 M'$, $V_2 V'_3 \perp F_2 M'$, dann ist offenbar der Schnittpunkt V'_3 dieser beiden Senkrechten ein Punkt der Normalen für den Curvenpunkt M'.

b. Parabel. Ist $y^2 = 2px$ die Gleichung der Curve, dann sind die Projektionsgeschwindigkeiten eines sie beschreibenden Punktes für die Coordinatenaxen $v_x = \frac{cy}{\sqrt{p^2+y^2}}$, $v_y = \frac{cp}{\sqrt{p^2+y^2}}$, folglich ist $\frac{v_y}{v_x} = \frac{p}{y}$. Um hiermit die Tangente für den Punkt M (Fig. 25) zu konstruieren, machen wir auf den Parallelen, durch M, zu den Coordinatenaxen $M M_1 = M_0 M = y$, $M M_2 = 2 \cdot A F = p =$ dem Halbparameter, zeichnen über diesen Strecken das Rechteck $M M_1 V M$ und ziehen den Strahl $M V$, dieser ist die gesuchte Linie. Drehen wir dieses Rechteck um den Punkt M durch einen Winkel von 90^0 im Sinne des Pfeiles, dann wird sein Eckpunkt V zu einem Punkte der Normalen in M. Bei Beachtung, dass der zweite Brennpunkt der Parabel im Unendlichen liegt, können wir nach dem für die Ellipse gegebenen zweiten Verfahren die Tangente

Figur 25.

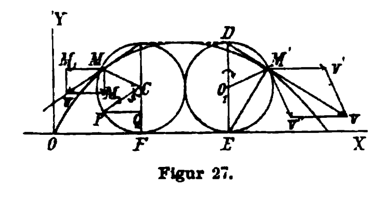
eines beliebigen Punktes M' finden. Durch M' legen wir einen Brennpunktsstrahl und eine Parallele zur Axe, machen $M'V_1 = M'V_2$, $V_1 V_3 \perp FM'$, $V_2 V_3 \perp M'V_2$, dann ist der Schnittpunkt V_3 dieser Senkrechten ein weiterer Punkt der Tangente. Ferner ist mit $M'V' = M'V_2$, $V'V'' \perp FM'$, $V_2 V'' \perp OX$, V'' ein Punkt der Curvennormalen in M'.

c. Hyperbel. Ist $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ die Gleichung der Curve, dann sind die Projektionsgeschwindigkeiten des sie erzeugenden Punktes $v_x = \frac{ca^2y}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}$, $v_y = \frac{cb^2x}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}$, folglich $\frac{v_x}{v_y} = \frac{a^2y}{b^2x}$. Mittelst dieses Verhältnisses kann wie bei der Ellipse die Tangente eines Curvenpunktes (x, y) gefunden werden, wobei nur zu beachten ist, dass hier v_y entgegengesetzte Richtung besitzt. Benutzen wir für die Konstruktion der Tangente im Punkte M' (Fig. 26) die Brennstrahlen, so bekommen wir mit $M'V_1 = M'V_2$ das Viereck $M'V_1V_3V_2$, seine Diagonale $M'V_3$ giebt die verlangte Tangentenrichtung.



Figur 26.

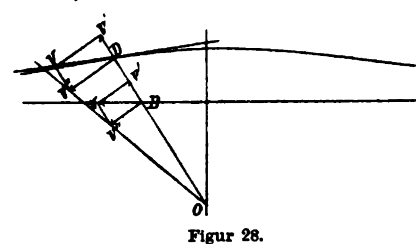
2) Die gemeine Cycloide. Sind $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ die Gleichungen der Curve, so sind die Projektionsgeschwindigkeiten für die Coordinatenaxen $v_x = c\sin\frac{\varphi}{2}$, $v_y = \cos\frac{\varphi}{2}$ wodurch $\frac{v_y}{v_x} = \cot g\frac{\varphi}{2}$. Soll nun im Punkte M (Fig. 27) die Curventangente gezogen werden, so verzeichnen wir die diesem Punkte entsprechende Lage des Rollkreises. C ist sein Mittelpunkt, ziehen CM, $CF \perp OX$, womit $\measuredangle FCM = \varphi$, halbieren Bogen FM durch P, machen $PQ \parallel OX$, womit $\measuredangle FCP = \frac{\varphi}{2}$, $tg\frac{\varphi}{2} = PQ : CQ$. Jetzt legen wir durch M Parallele zu den Coordinatenaxen, machen auf diesen $MM_1 = PQ$, $MM_2 = CQ$, konstruieren das Rechteck MM_1VM_2, seine Diagonale MV giebt die Richtung der Tangente. Eine andere einfachere Lösung ist die folgende. Die Cycloide wird durch einen Punkt eines auf einer Geraden seiner Ebene rollenden Kreises beschrieben. Ist M' ein beliebiger Punkt der Curve, O_1 der Mittelpunkt des Rollkreises in entsprechender Lage, DE dessen vertikaler Durchmesser, (die Basis horizontal vorausgesetzt) zerlegen wir die Geschwindigkeit des Punktes M' in zwei Componenten, parallel zur Basis und senkrecht zum Rollkreise, so entspricht diese Zerlegung einer Teilung der Elementarbewegung um das Momentancentrum E des Systemes in eine Translation parallel zur Basis und in eine Rotation um O_1. Be-



Figur 27.

zeichnet $d\vartheta$ die Elementaramplitude um E, dann ist die Componente parallel zur Basis $M'V' = EO_1 \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, die Tangentialcomponente $M'V'' = O_1 M' \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, und es sind mithin diese beiden Seitengeschwindigkeiten von gleicher Grösse. Machen wir daher $M'V' = M'V''$, zeichnen das Parallelogramm $M'V'VV''$ und die Gerade $M'V$, so ist letztere die gewünschte Tangente. Die Dreiecke $M'VV''$ und EO_1M' sind ähnlich, weil $VV'' \perp EO_1$, $M'V'' \perp O_1M'$, daher ist auch $EM' \perp M'V$, mithin geht die Tangente durch den Scheitelpunkt D des Rollkreises, wodurch sich eine weitere Tangentenkonstruktion ergiebt.

3) Die Conchoide. Diese Curve (Fig. 28) wird von dem Punkte D einer Geraden beschrieben, welche stets durch einen festen Punkt O geht und mit einem Punkte B auf einer festen Geraden gleitet, wobei die Strecke BD unveränderlich bleibt. Die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punkt B auf der festen Geraden fortrückt, können wir nach den Richtungen parallel und senkrecht zum Fahrstrahle OB zerlegen, es seien v', v'' diese Componenten, so dass v'' die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes B um O repräsentiert. Weil der Abstand des Punktes D vom Punkte B sich nicht ändert, so ist dessen Vektorengeschwindigkeit gleich derjenigen von B; seine Rotationsgeschwindigkeit und diejenige des Punktes B um O stehen hingegen in dem Verhältnisse ihrer Abstände vom Punkte O. Ziehen wir daher den Strahl Ov'', machen DV' auf dem Strahle OD gleich Bv', $DV'' \perp OD$, verzeichnen das Parallelogramm $DV'VV''$ und den Strahl DV, so ist letzterer die Tangente des Curvenpunktes D.



Figur 28.

Siehe auch Schell, Theorie der Bewegung etc. Bd. I. S. 206—208.

c) Die Beschleunigung eines Punktes.

Projizieren wir die Bewegung eines Punktes auf drei rechtwinkelige Axen der x, y, z, bezeichnet φ seine Beschleunigung, deren Richtung mit diesen Axen die Winkel α, β, γ einschliesst, sind $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ die Projektionen der Acceleration φ auf die genannten Axen, dann bestehen die Relationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x = \varphi \cos\alpha; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y = \varphi \cos\beta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z = \varphi \cos\gamma,$$

$$\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2; \quad \frac{\cos\alpha}{\varphi_x} = \frac{\cos\beta}{\varphi_y} = \frac{\cos\gamma}{\varphi_z} = \frac{1}{\varphi}.$$

1. Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise vom Halbmesser r. Welches sind die Projektionsbeschleunigungen für zwei sich rechtwinkelig schneidende Diameter?

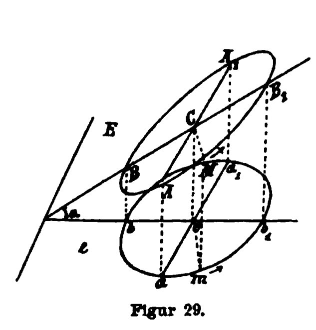
Bezeichnet c die konstante Geschwindigkeit des Punktes, ω seine Winkelgeschwindigkeit, so ist $\omega = \frac{c}{r}$, und für seine Projektionsbewegungen haben wir bekanntlich $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$. Diese Gleichungen geben durch Differentiation nach t

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t,$$

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2 \cos \omega t \qquad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

womit die verlangten Beschleunigungen bestimmt sind. Beide Projektionsbewegungen sind oszillatorisch, von gleicher Periode mit der Schwingungszeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$, sie sind an und für sich identisch, jedoch sind ihre Epochen so verschoben, dass die Maxima der Projektionsbahn, Geschwindigkeit und Beschleunigung der einen Bewegung, in absolutem Sinne genommen, mit den Minimalwerten der entsprechenden Grössen der anderen Bewegung korrespondieren. Die Beschleunigung des Punktes ist $\varphi = \sqrt{\varphi_x^{\,2} + \varphi_y^{\,2}} = r\omega^2$, für ihre Neigung α gegen die Axe der x besteht die Relation $tg\,\alpha = \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = tg\,\omega t$, d. i. $\alpha = \omega t$. Damit haben wir den bekannten Satz, dass die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung das Produkt aus dem Kreishalbmesser und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit ist, dass sie stets nach dem Mittelpunkte des Kreises hin gerichtet ist.

2. Ein Punkt bewegt sich auf einem Kreise vom Radius a mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, seine Bewegung wird auf eine die Ebene des Kreises unter dem Winkel α schneidende Ebene projiziert. Wie ist die Projektionsbewegung bezüglich der Beschleunigung beschaffen?


Figur 29.

Ist (Fig. 29) $A\,B_1\;A_1\;B$ der Kreis in der Ebene E mit dem Mittelpunkte C, $a\,b_1\;a_1\,b$ seine Projektion auf die Ebene e, welche eine Ellipse mit dem Mittelpunkte c ist, so sind mit $A\,A_1 \parallel a\,a_1 \parallel$ zur Schnittlinie beider Ebenen, $B\,B_1 \perp A\,A_1$ in der Ebene E, $b\,b_1 \perp a\,a_1$ in der Ebene e, die Halbaxen der Projektionsbahn $a\,a_1 = a$, $b\,b_1 = a \cos \alpha = b$. Für die Projektionsbewegungen bezüglich der Hauptaxen der Ellipse haben wir

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = a\cos\alpha\sin\omega t = b\sin\omega t,$$

daher

$$v_x = -a\omega\sin\omega t, \qquad v_y = b\omega\cos\omega t,$$
$$\varphi_x = -a\omega^2\cos\omega t, \qquad \varphi_y = -b\omega^2\sin\omega t,$$

und für die Projektion m des Punktes M ist

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t} = \frac{ab}{\varrho}\,\omega,$$
$$\varphi = \sqrt{\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2} = \omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t} = \omega^2\sqrt{x^2+y^2} = \omega^2\varrho,$$

wenn ϱ den Radiusvektor der Ellipse für den Pol c bezeichnet. Die Umlaufszeit des Punktes m ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$, oder auch, weil der vom Radiusvektor ϱ durchfahrene Flächenraum der Zeit proportional ist, wenn wir die in der Zeiteinheit vom Fahrstrahle beschriebene Fläche mit c bezeichnen, $T = \frac{ab\pi}{c}$, daraus folgt noch $\varphi = \omega^2\varrho = \frac{4\pi^2}{T^2}\varrho = \frac{4c^2}{a^2b^2}\varrho$.

Die Neigung ϑ der Acceleration φ gegen die Axe $a a_1$ ergiebt sich durch $tg\,\vartheta = \frac{b}{a}\,tg\,\omega t$. Die Beschleunigung φ ist mithin proportional dem Radiusvektor ϱ und nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtet.

3. Die Projektionen einer ebenen Bewegung auf zwei rechtwinkelig in der Bewegungsebene sich schneidende Axen sind $x = at$, $y = bt - \frac{1}{2}gt^2$. Welches sind die Projektionsbeschleunigungen, und welches ist die Beschleunigung des Punktes?

Der Punkt bewegt sich bekanntlich in einer Parabel und finden wir

$$v_x = a, \qquad v_y = b - gt, \qquad \varphi_x = 0, \qquad \varphi_y = -g, \qquad \varphi = -g.$$

Der Punkt bewegt sich mit einer Acceleration $-g$ parallel zur Ordinatenaxe.

4. Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c auf einer Schraubenlinie $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = m\varphi$. Welches sind die Projektionsbeschleunigungen für die Coordinatenaxen? Welches ist die Hauptbeschleunigung?

Nach Aufgabe 8 unter (a) sind mit $\frac{c}{a}\cos\alpha = \omega$, da $m = a\,tg\,\alpha$, die Projektionen der Bahn auf die Coordinatenaxen

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = a\sin\omega t, \qquad z = m\omega t,$$

wodurch sich ergiebt

$$v_x = -a\omega\sin\omega t, \quad v_y = a\omega\cos\omega t, \quad v_z = m\omega,$$
$$\varphi_x = -a\omega^2\cos\omega t, \quad \varphi_y = -a\omega\sin\omega t, \quad \varphi_z = 0, \quad \varphi = a\omega^2.$$

Die Beschleunigung φ ist konstant, sie ist nach der Axe der Curve gerichtet und wirkt in einer zum Basiskreise parallelen Ebene.

Welches sind die Projektionsbeschleunigungen für die Coordinatenebenen?

$$\varphi_{xy} = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = a\,\omega^2,\quad \varphi_{xz} = a\,\omega^2 \cos\omega t = \varphi_x;\quad \varphi_{yz} = a\,\omega^2 \sin\omega t = \varphi_y.$$

Weitere hierher gehörende Anwendungen können aus den folgenden Kapiteln dieses Teiles geschöpft werden.

Zweites Kapitel.

Freie geradlinige Bewegung eines Punktes.

Bezeichnet v die Geschwindigkeit, φ die Beschleunigung mit welcher, t die Zeit während welcher sich ein Punkt in gerader Linie um den Weg s fortbewegt, so sind die allgemeinen Gleichungen zur analytischen Bestimmung der Bewegung des Punktes

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2)$$

aus welchen die zwei folgenden abgeleitet werden können

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi, \quad (3) \qquad v\frac{dv}{ds} = \varphi, \quad (4)$$

und

$$\Phi\,(s, v, \varphi, t) = 0, \quad (5)$$

wobei die Gleichung (5) die individuelle Natur der Bewegung giebt.

Die vier ersten Gleichungen, welche den vollständigen Ausdruck der Beschaffenheit geradliniger Bewegung in der Sprache der Differentialrechnung für jede Bedingung betreffs der Beschleunigung oder Verzögerung in sich schliessen, sind Varignon zu verdanken, sie wurden zuerst in Les Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1700, p. 22 veröffentlicht. Es ist indessen zu erwähnen, dass lange vorher durch Newton geradlinige Bewegungen mit veränderlichen Beschleunigungen (Kräften) auf geometrischem Wege untersucht worden sind (Principia, Lib. I. sect. 7; Lib. II. sect. 1).

Aus der Formel $v\,dv = \varphi\,ds$ erkennen wir, dass dv^2 sich wie $\varphi\,ds$ ändert. Daniel Bernoulli war der Meinung, dass kein Grund vorhanden sei, dieses als das einzig mögliche Gesetz der Variationen zu betrachten, z. B. dass auch wohl dv^r proportional $\varphi\,ds$ vorkommen könne (Comment. Petrop. 1727, p. 136), wo r eine beliebige Grösse bedeutet. Im Gegensatze zu Bernoulli's Ansicht bemühte sich Euler eifrig, zu beweisen, dass das Gesetz des Quadrates das richtige sei (Mechanica, Tom. I. p. 62 et seq.), und D'Alembert zeigte, dass die Wahrheit dieses Gesetzes einfach von der Erklärung der Bedeutung des Symboles φ abhängig sei (Traité de Dynamique).

Die vollständige Lösung einer die geradlinige Bewegung betreffenden Aufgabe besteht in der Bestimmung von Relationen zwischen je zweien der Grössen s, v, φ, t. Nun bieten uns aber die allgemeinen Bewegungsgleichungen (1), (2), (3), (4) nur zwei unabhängige Beziehungen zwischen diesen vier Grössen dar, es ist daher klar, dass in jeder Aufgabe Angaben enthalten sein müssen, die durch eine besondere Gleichung zwischen s, v, φ, t Ausdruck finden können, welches die Gleichung (5) ist, wodurch im Ganzen drei Gleichungen zur Verfügung stehen, welche die vier Variablen verbinden.

Die Funktion $\Phi\,(s, v, \varphi, t)$ kann zwei, drei oder alle von den Grössen s, v, φ, t enthalten. Durch die Combinationslehre wissen wir, dass hier sechs Variationen der ersten und vier der zweiten Klasse vorhanden sind. Es löst sich daher das allgemeine

Problem der geradlinigen Bewegung in elf verschiedene Klassen von Aufgaben auf. Wir werden uns indessen auf die Betrachtung jener zwei Klassen beschränken, in welchen die gegebene Funktion entweder s und φ allein, oder s, v und φ enthält, denn die anderen Klassen sind von keiner physikalischen Bedeutung. In dem ersten Abschnitte befassen wir uns mit der Bewegung eines Punktes im leeren Raume, in dem zweiten mit derjenigen im widerstehenden Mittel.

Erster Abschnitt.

Bewegung im leeren Raume.

1. Ein Punkt bewegt sich geradlinig mit der Beschleunigung $\varphi = 0$. Welches ist der von der Zeit t_0 bis zur Zeit t zurückgelegte Weg?

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind in diesem Falle:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \text{oder} \quad ds = v\,dt \quad (1), \qquad dv = 0. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $v = konst = v_0$. Die Substitution dieses Wertes in (1) giebt, wenn der Abstand des Punktes von einem festen Orte seiner Bahn zur Zeit t_0 gleich s_0, zur Zeit t gleich s ist,

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_{t_0}^{t} dt, \quad \text{so dass} \quad s - s_0 = v_0 (t - t_0).$$

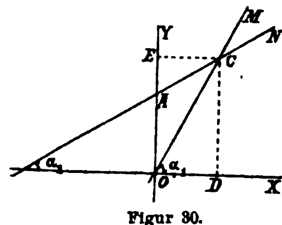
Mit $s_0 = 0$, und $t_0 = 0$ erscheint die einfache Gleichung $s = v_0 t$ für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Auf der letzten Gleichung beruht die Lösung einer Reihe einfacher Bewegungsaufgaben, welche nur die Formierung von Gleichungen ersten und zweiten Grades fordert. Solche Aufgaben findet der Leser in der Sammlung von Aufgaben für die Arithmetik und Algebra von Heis und in dem Lehrbuche der Elementarmechanik von Wernicke.

2. Zwei Punkte A, B bewegen sich in einer Geraden von zwei Orten A_1, B_1, welche um die Strecke s_0 von einander entfernt sind, mit den konstanten Geschwindigkeiten c_1, c_2 in derselben Richtung. Wann und wo werden diese Punkte zusammentreffen, und in welchem Falle ist die Lösung der Aufgabe unmöglich?

Sind s_1, s_2 die von den Punkten A, B gleichzeitig vom Beginn der Bewegungen bis zu ihrem Zusammentreffen nach der Zeit t zurückgelegten Wege, so ist $s_1 = c_1 t$, $s_2 = c_2 t$, $s_1 - s_2 = s_0$. Daraus folgt die bis zu ihrem Zusammentreffen verfliessende Zeit $t = \frac{s_0}{c_1 - c_2}$, und die Entfernungen der Punkte in diesem Momente von den Orten A und B sind $s = \frac{c_1}{c_1 - c_2} s_0$,

$s_2 = \frac{c_2}{c_1 - c_2} s_0$. Mit $c_1 = c_2$ und $s_0 > 0$ ist die Lösung der Aufgabe unmöglich, denn dann ist $t = \infty$. Mit $c_1 = c_2$ und $s_0 = 0$, ist $t = \frac{0}{0}$, welcher Ausdruck jede beliebige Zeit bedeutet. Ist $c_1 < c_2$, so wird $\frac{s_0}{c_1 - c_2}$ negativ, d. h. die beiden Punkte trafen vor t Zeiteinheiten zusammen. Unsere Aufgabe lässt sich aber auch geometrisch lösen, indem wir die Bewegung beider Punkte auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem beziehen, dessen eine Axe OX die Zeitaxe, dessen andere OY die Wegaxe ist. Die Weggleichungen der beiden Punkte sind $y = c_1 t$ und $y = s_0 + c_2 t$. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der durch diese Gleichungen gegebenen Geraden liefern die Zeit und den vom Punkte A zurückgelegten Weg bis zum Zusammentreffen, nämlich $t = \frac{s_0}{c_1 - c_2}$, $y = s_1 = \frac{c_1}{c_1 - c_2} s_0$. Mit OA (Fig. 30) $= s_0$, den Geraden OM, AN, unter den Winkeln $\alpha_1 = arc\,(tg = c_1)$, $\alpha_2 = arc\,(tg = c_2)$ gegen die Abscissenaxe geneigt, sind die durch die Gleichungen $y = c_1 t$, $y = s_0 + c_2 t$ gegebenen Linien dargestellt, welche sich im Punkte C schneiden. Die Abscisse OD des Schnittpunktes C repräsentiert die bis zum Zusammentreffen verfliessende Zeit t, seine Ordinate $DC = OE$ den vom Punkte A in dieser Zeit zurückgelegten Weg, die Strecke $AE = s_2$ den entsprechenden Weg des Punktes B und E ist der Ort des Zusammentreffens.



Figur 30.

Bewegen sich die Punkte A, B einander entgegen, dann ist $t = \frac{s_0}{c_1 + c_2}$, $s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} s_0$, $s_2 = \frac{c_2}{c_1 + c_2} s_0$.

3. Ein Punkt bewegt sich geradlinig mit der konstanten Beschleunigung a, zur Zeit t_0 ist seine Geschwindigkeit v_0 und von gleicher oder entgegengesetzter Richtung mit der Beschleunigung. Welches ist die Geschwindigkeit und der Weg am Ende der Zeit t?

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2) \qquad \varphi = \pm a. \quad (3)$$

Mit (2) und (3) wird

$$dv = \pm a\,dt, \text{ also } \int_{v_0}^{v} dv = \pm a \int_{t_0}^{t} dt, \; v - v_0 = \pm a (t - t_0),$$

oder

$$v = v_0 \pm a (t - t_0), \quad (4)$$

womit die Geschwindigkeit bestimmt ist. Für den Weg s folgt aus (1) und (4), wenn derselbe zur Zeit t_0 gleich s_0 gedacht wird,

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \pm a(t - t_0), \int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_{t_0}^{t} dt \pm a \left\{ \int_{t_0}^{t} t\,dt - t_0 \int_{t_0}^{t} dt \right\},$$

$$s - s_0 = v_0(t - t_0) \pm \frac{a}{2}(t - t_0)^2, \quad s = s_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \quad (5)$$

Zu denselben Resultaten führt auch folgender Weg. Aus den Gleichungen (1), (2), (3) erhalten wir $\frac{d^2 s}{dt^2} = \pm a,$

und giebt die Integration dieser Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = v = \pm a t + C; \qquad s = \pm \frac{a}{2} t^2 + Ct + D.$$

Zur Zeit $t = t_0$ ist aber $v = v_0$, $s = s_0$, womit die Werte der Integrationskonstanten sind $C = s_0 \pm a t_0$, $D = s_0 - s_0 t_0 \pm \frac{a}{2} t_0{}^2$, und folglich ergiebt sich

$$v - v_0 = \pm a(t - t_0), \quad s - s_0 = v_0(t - t_0) \pm \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

Dieses sind die beiden Hauptgleichungen für die gleichförmig beschleunigte und die gleichförmig verzögerte Bewegung eines Punktes. Eliminieren wir aus diesen Relationen die Zeit oder die Acceleration, so erhalten wir die weiteren Beziehungen

$$s - s_0 = \frac{v^2 - v^2{}_0}{\pm 2a}, \qquad \text{und} \qquad s - s_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)(t - t_0).$$

Rechnen wir von der Zeit $t_0 = 0$ an, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, dann ist $s_0 = 0$, v_0 die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit, und die allgemeinen Gleichungen nehmen die Form an

$$v - v_0 = \pm a t, \quad s = v_0 t \pm \frac{a}{2} t^2, \quad s = \frac{1}{2}(v + v_0) t, \quad v^2 - v_0{}^2 = \pm 2as.$$

Ist in diesem Falle $v_0 = 0$, dann haben wir

$$v = at, \qquad s = \frac{a}{2} t^2, \qquad s = \frac{1}{2} v t, \qquad v^2 = 2as,$$

wobei nur das obere Zeichen berücksichtigt ist, weil die Bewegung lediglich in der Richtung der Acceleration erfolgen kann. Mit $a = g =$ der Beschleunigung der Schwere gehen die sämtlichen Resultate über in diejenigen für die vertikale Bewegung eines Punktes im luftleeren Raume.

4. Ein Punkt steigt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 im luftleeren Raum vertikal aufwärts. 1) Welches ist seine Steighöhe H und seine Steigzeit T? 2) Nach welcher Zeit T' kehrt der Punkt in seine Anfangslage zurück? 3) Wann erreicht der Punkt den n^{ten} Teil der Steighöhe und wie gross ist daselbst seine Geschwindigkeit?

Nehmen wir die Geschwindigkeit v_0 positiv, dann ist die auf den Punkt wirkende Fallbeschleunigung g negativ. Zur Zeit $t = 0$ ist $v = v_0$, $s = 0$; zur Zeit $t = t$ bestehen die Beziehungen

$$v = v_0 - g\,t, \quad s = v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t, \quad v^2 - v_0{}^2 = -2\,g\,s.$$

1) Im höchsten Punkte der Bahn ist $v = 0$, daher $v_0{}^2 = 2\,g\,H$, also die Steighöhe $H = \frac{v_0{}^2}{2\,g}$, ferner $0 = v_0 - g\,T$, folglich die Steigzeit $T = \frac{v_0}{g}$, und $H = \frac{v_0}{2}\,T$.

2) Die vom Beginn der Bewegung bis zur Rückkehr des Punktes in seine Anfangslage verfliessende Zeit ist, weil während derselben der Punkt die Steighöhe zu durchlaufen und sodann diese Höhe ohne Anfangsgeschwindigkeit zu durchfallen hat, $T' = T + \sqrt{\frac{2\,H}{g}} = 2\frac{v_0}{g} = 2\,T =$ der doppelten Steigzeit.

3) Aus der zweiten Gleichung folgt $t = \frac{v_0}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\,g\,s}{v_0{}^2}}\right)$, so dass mit $s = \frac{H}{n} = \frac{v_0{}^2}{2\,n\,g}$, $t = \frac{v_0}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = T\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$, die entsprechende Steigzeit, und $v = v_0\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ die Geschwindigkeit des Punktes am Ende dieser Zeit ist. Für die halbe Steighöhe ergiebt sich, da dann $n = 2$, $t = 0{\cdot}293\,\frac{v_0}{g} = 0{\cdot}293\,T$, $v = 0{\cdot}7071\,v_0$.

5. Zwei Punkte A und B befinden sich an den Orten A_1 und B_1 einer vertikalen Geraden und bewegen sich im luftleeren Raume auf der Linie $A_1\,B_1 = a$ zu gleicher Zeit gegeneinander. Der frei herabfallende Punkt A besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit; der Punkt B wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal in die Höhe geschleudert. Wann und wo treffen sich die Punkte? Wie gross muss die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes B sein, wenn die Punkte in der Mitte von $A_1\,B_1$ sich treffen sollen?

Bezeichnet x den Abstand des Kollisionspunktes vom Punkte B_1, t die bis zum Zusammentreffen verfliessende Zeit, so sind die bis dahin von A und B zurückgelegten Wege $s_1 = a - x = \frac{1}{2}gt^2$, und $s_2 = x = v_0\,t - \frac{1}{2}g\,t^2$, aus welchen Gleichungen, durch Elimination von x, als gesuchte Zeit folgt $t = \frac{a}{v_0}$, und die bis zur Kollision von A und B durchlaufenen

Wege sind $s_1 = \frac{1}{2} g \left(\frac{a}{v_0}\right)^2$, $s_2 = a\left(1 - \frac{1}{2}\, g\, \frac{a}{{v_0}^2}\right)$. Damit die Punkte in der Mitte von $A_1 B_1$ zusammentreffen, muss $x = \frac{1}{2} a = s_1 = s_2$ sein, mit welchem Werte sich für die erforderliche Anfangsgeschwindigkeit des Punktes B ergiebt $v_0 = \sqrt{a\, g}$.

Kurdwanowski, Mém. de l'Acad. des Scienes de Berlin, 1755, p. 394.

6. Ein Punkt fällt im leeren Raume. Wie ist die Bewegung beschaffen, wenn die Veränderlichkeit der Beschleunigung der Schwere berücksichtigt wird, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der Erde ist, und der Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt?

Es sei R der Halbmesser der kugelförmig gedachten Erde, a der Abstand des Punktes vom Erdmittelpunkte, für welche Lage $v = 0$, $t = 0$, s sein Fallraum nach t Sekunden, g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, φ diejenige im Abstande $a - s$ vom Erdcentrum.

Zwischen den Beschleunigungen g und φ besteht die Beziehung $g : \varphi = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{(a-s)^2}$, so dass die hier in Frage kommenden Fundamentalgleichungen sind

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2) \qquad \varphi = \frac{R^2}{(a-s)^2} g. \quad (3).$$

Aus diesen Relationen folgt:

$$v\, dv = \frac{R^2}{(a-s)^2} g \,.\, ds, \quad \text{durch Integration} \quad \frac{v^2}{2} = \frac{g R^2}{a-s} + C.$$

Nun ist zur Zeit $t = 0$, $v = 0$, $s = 0$, daher $C = -\frac{g}{a} R^2$, mithin die Geschwindigkeit des Punktes

$$v = R \sqrt{\frac{2 g s}{a(a-s)}}. \qquad (4)$$

Um die Fallzeit zu erhalten, substituieren wir diesen Wert von v in (2), was nach einer kleinen Umformung giebt

$$dt = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \sqrt{\frac{a-s}{s}}\, ds, \quad \text{also ist} \int_0^t dt = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_0^s \sqrt{\frac{a-s}{s}}\, ds,$$

und giebt die Ausführung der Integration

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \left\{ \sqrt{s(a-s)} + a\, arc\left(sin = \sqrt{\frac{s}{a}}\right)\right\}. \qquad (5)$$

Gelangt der Punkt bis zur Erdoberfläche, dann ist $s = a - R$, so dass in diesem Falle, vermöge (4) und (5),

$$v = \sqrt{\frac{2 g R (a-R)}{a}}, \quad t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \left\{ \sqrt{R(a-R)} + a\, arc\left(sin = \sqrt{\frac{a-R}{a}}\right)\right\}.$$

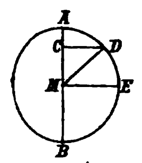
Die Gleichungen (4) und (5) gelten nur innerhalb der Grenzen $s = 0$, und $s = a - R$, aber nicht für $s > a - R$, da dann ein anderes Fallgesetz eintritt.

Ist der Fallraum sehr klein und geht die Bewegung in der Nähe der Erdoberfläche vor sich, so kann, ohne merklichen Fehler, an Stelle von $a - s$ und a, a und R gesetzt werden, auch ist in (5) der Sinus des sehr kleinen Bogens mit seinem Bogen vertauschbar, wodurch unter dieser Annahme

$$\varphi = g, \qquad v = \sqrt{2gs}, \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{g}},$$

welche Formeln die gewöhnlichen Fallgesetze geben.

7. Beim Fallen eines Punktes innerhalb der Erdoberfläche ist die Beschleunigung seiner Entfernung vom Erdmittelpunkte direkt proportional. Welches ist die Geschwindigkeit v und die Fallzeit t, wenn der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit von der Erdoberfläche aus den Raum s zurücklegt?



Figur 31.

Es sei (Fig. 31) $AM = R$ der vertikale Erdhalbmesser, auf welchem der Punkt sich bewegt, nach der Zeit t befinde er sich in der Tiefe $AC = s$ unter der Oberfläche, g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, v die Geschwindigkeit und φ die Beschleunigung an der beliebigen Stelle C zwischen A und dem Erdmittelpunkte. Die Grundgleichungen für die Bewegung sind damit hier

$$v\,dv = \varphi\,ds, \quad (1) \qquad ds = v\,dt, \quad (2) \qquad \varphi = \frac{R-s}{R}\,g. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$v\,dv = g\,\frac{R-s}{R}\,ds, \quad \int_0^v v\,dv = \frac{g}{R}\int_0^s (R-s)\,ds, \quad \frac{v^2}{2} = \frac{g}{R}\left(R - \frac{s}{2}\right)s,$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{2Rs - s^2}. \qquad (4)$$

Machen wir $CD \perp AM$, so ist $CD = \sqrt{2Rs - s^2}$, demnach die Geschwindigkeit in C dieser Ordinate proportional. Für den Oberflächenpunkt A ist diese Linie gleich Null, für den Erdmittelpunkt M ist sie ein Maximum, so dass der fallende Punkt mit seiner grössten Geschwindigkeit im Erdmittel ankommt. Im zweiten Oberflächenpunkte B des Durchmessers AB ist die Geschwindigkeit, wenn der Punkt von M aus weiter fällt, wieder gleich Null, es erfolgt jetzt seine Anziehung von M aus, wie vorhin in A, wodurch der Diameter AB von dem Punkte rückwärts gerade so durchlaufen wird wie vorwärts. Demnach besitzt der

Punkt zwischen den Endpunkten des Durchmessers AB eine schwingende Bewegung und lässt sich der Halbkreis $ADEB$ als Geschwindigkeitscurve ansehen.

Durch die Gleichungen (2) und (4) erhalten wir

$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{ds}{\sqrt{2Rs - s^2}}, \quad \int_0^t dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2Rs - s^2}},$$

und giebt die Ausführung der Integrationen als Fallzeit

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \, arc\left(cos = \frac{R - s}{R}\right). \tag{5}$$

Beschreibt der Punkt den Radius AM, so ist $s = R$, daher ergiebt sich für den Augenblick der Ankunft im Erdcentrum aus (4) und (5)

$$v = \sqrt{gR}, \quad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Mit $s = 2R$ durchfällt der Punkt einen Durchmesser, bei seiner Ankunft in B ist $v = 0$, $t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, letztere ist zugleich die Zeit einer halben Schwingung.

8. Ein Punkt wird von der Erdoberfläche aus mit einer Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geschleudert. Welches ist seine Steighöhe H und seine Steigzeit T im luftleeren Raume, wenn die Veränderlichkeit der Beschleunigung der Schwere berücksichtigt wird?

Bezeichnet R den Erdradius, s den Abstand des steigenden Punktes vom Erdcentrum zur Zeit t, so haben wir, weil

$$\varphi = -g\frac{R^2}{s^2}, \qquad v\,dv = -\varphi\,ds,$$

$$v\,dv = -g\frac{R^2}{s^2}ds, \qquad \int_{v_0}^{v} v\,dv = -gR^2\int_R^s \frac{ds}{s^2},$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gR^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{R}\right),$$

woraus folgt
$$s = \frac{2gR^2}{2gR + v^2 - v_0^2}.$$

In dem Augenblicke des grössten Abstandes des Punktes vom Erdcentrum ist $v = 0$, daher die verlangte Steighöhe

$$H = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} - R = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Wenn $v_0 > \sqrt{2gR}$, kann der Punkt nie fallen.

Die dem Abstande s des Punktes vom Erdcentrum entsprechende Zeit folgt aus den Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = -g\frac{R^2}{s^2},$$

mit ihnen ergiebt sich

$$dv = -g\frac{R^2}{s^2}dt, \qquad \int_{v_0}^{v} dv = -g\frac{R^2}{s^2}\int_0^t dt, \qquad v - v_0 = -g\frac{R^2}{s^2}t,$$

so dass

$$t = (v_0 - v)\frac{s^2}{gR^2}.$$

Für das Maximum von s ist $v = 0$, mithin die Steigzeit

$$T = \frac{v_0}{gR^2}(H + R)^2 = \frac{4gR^2 v_0}{(2gR - v_0{}^2)^2}.$$

9. Die Beschleunigung eines Punktes ist fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und direkt proportional seinem Abstande vom Centrum. Zur Zeit $t = 0$ ist seine Geschwindigkeit $v = 0$, seine Entfernung vom Centrum gleich a. Wie ist die Bewegung beschaffen?

Ist die Beschleunigung im Abstande der Einheit vom Centrum $= k^2$, so ist, die nach dem Centrum gerichtete Geschwindigkeit und Beschleunigung positiv genommen, $\varphi = k^2 x$, wenn x den augenblicklichen Abstand des Punktes vom Centrum bezeichnet. Wird noch die Entfernung des Punktes zur Zeit t vom Anfangspunkte der Bewegung gleich s gesetzt, so erhalten wir für die Bewegung das Gleichungensystem

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = k^2 x, \qquad s + x = a.$$

Durch Elimination von φ und v folgt

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = k^2 x, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad \text{weil } ds = -dx \text{ ist.}$$

Die Auflösung dieser linearen Differentialgleichung kann zweifach bewirkt werden. Indem wir das Integral sofort anschreiben, ist

$$x = A \sin kt + B \cos kt.$$

Weil nun $x = a - s$ ist, so ergiebt sich

$$s = a - (A \sin kt + B \cos kt), \qquad \frac{ds}{dt} = v = -k(A \cos kt - B \sin kt).$$

Mit $t = 0$ ist $v = 0$, $s = a$, daher sind die Werte der Integrationskonstanten $A = 0$, $B = a$, folglich wird

$$s = a(1 - \cos kt), \qquad x = a \operatorname{sos} kt, \qquad v = ak \sin kt.$$

Durch Multiplikation der beiden Seiten der Differentialgleichung mit $2\frac{dx}{dt}$ wird

$$2\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + k^2 x\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2\frac{d}{dt}(x^2) = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2 x^2 = C, \quad \text{oder} \quad v^2 + k^2 x^2 = C.$$

Mit $v = 0$ ist aber $x = a$, folglich $C = a^2 k^2$, und daher

$$v = k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Weiter erhalten wir nun

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{dx}{dt} = k\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{mithin} \quad k\int_0^t dt = -\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

woraus folgt: $\quad kt = arc\left(cos = \frac{x}{a}\right), \quad \frac{x}{a} = cos\, kt,$

so dass $\quad t = \frac{1}{k}\left(cos = \frac{x}{a}\right), \quad x = a\, cos\, kt.$

Mit diesen Werten von x und t bekommen wir wie oben

$$s = a(1 - cos\, kt), \quad v = ak\, sin\, kt.$$

Ist für $s = a$, $k^2 = g =$ der Fallbeschleunigung, so ist für eine beliebige Lage des Punktes zwischen Centrum und Anfangspunkt $k^2 x = \frac{x}{a} g$, folglich $k^2 = \frac{g}{a}$. Damit gehen die erhaltenen Resultate über in:

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\left(cos = \frac{x}{a}\right) = \sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\left(cos = \frac{a - s}{a}\right),$$

$$s = a\left(1 - cos\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right),$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\frac{g}{a}}.\sqrt{2as - s^2} = \sqrt{ag} \cdot sin\sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

Dieses sind Gleichungen für den freien Fall im Innern der Erde, welcher besonders unter 7 behandelt wurde.

10. Ein Punkt bewegt sich mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ von einem festen Centrum aus mit einer Beschleunigung, welche einer beliebigen Potenz des Abstandes des Punktes vom Centrum direkt proportional ist. Wie gross ist die Geschwindigkeit am Ende des Weges s, und die für diesen Weg erforderliche Zeit?

Bezeichnet k die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung, so ist $\varphi = ks^n$. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi.$$

Durch Elimination von t erhalten wir

$$v\,d\,v = \varphi\,d\,s = k\,s^n\,d\,s, \quad \text{folglich} \int_0^v v\,d\,v = k\int_0^s s^n\,d\,s,$$

d. i. $\frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{n+1}s^{n+1}$, woraus sich ergiebt $v = \sqrt{\frac{2k}{n+1}s^{n+1}}$.

Weiter ist $\frac{d\,s}{d\,t} = v = \sqrt{\frac{2k}{n+1}s^{n+1}}$, daher $d\,t = \sqrt{\frac{n+1}{2k}}\frac{d\,s}{\sqrt{s^{n+1}}}$,

$$\int_0^t d\,t = \sqrt{\frac{n+1}{2k}}\int_0^s s^{-\frac{n+1}{2}}\,d\,s, \quad t = \frac{2}{1-n}\sqrt{\frac{1+n}{2k}}\,s^{1-n}.$$

Wenn die Beschleunigung dem Wege direkt proportional ist, haben wir, weil in diesem Falle $n = 1$, $v = \sqrt{k}\,s$, $t = \frac{1}{k}\,l\,(s)$.

Euler, Mechanica, Tom I. p. 123.

W. Walton, Collection of Problems in Illustration of the Principles of Theoretical Mechanics, III. Edit. p. 221.

Anmerkung: In der Folge bezeichnet der Kürze halber der Name „Walton" das ebengenannte Werk.

11. Ein Punkt bewegt sich geradlinig nach einem festen Centrum mit einer der n^{ten} Potenz seines Abstandes vom Centrum umgekehrt proportionalen Beschleunigung. Wie gross ist der Wert von n, wenn die Geschwindigkeit des aus dem Unendlichen kommenden Punktes in einer Entfernung a vom Centrum gleich der Geschwindigkeit ist, welche er annehmen würde bei seiner Bewegung aus dem Abstande a bis zu demjenigen $\frac{1}{4}a$ vom Centrum?

Ist k eine Konstante, x die Entfernung des Punktes vom Centrum nach der Zeit t, sind v_1, v_2 die Geschwindigkeiten in den Abständen a, $\frac{1}{4}a$ resp. vom Centrum, dann besteht die Gleichung

$$v\frac{d\,v}{d\,x} = -\frac{k}{x^n}.$$

Daher ist für die Bewegung des Punktes aus dem Unendlichen bis zum Abstande a vom Centrum

$$\int_0^{v_1} v\,d\,v = -k\int_\infty^a x^{-n}\,d\,x, \quad \text{folglich} \quad v_1^{\,2} = \frac{2k}{n-1}a^{1-n},$$

und für seine Bewegung auf der Bahn $a - \frac{1}{4}a$,

$$\int_0^{v_2} v\,dv = -k\int_a^{\frac{a}{4}} x^{-n}\,dx, \quad \text{folglich} \quad v_2{}^2 = \frac{2k}{n-1}a^{1-n}(4^{n-1}-1).$$

Nach der Voraussetzung ist aber $v_1{}^2 = v_2{}^2$, mithin

$$\frac{2k}{n-1}a^{1-n} = \frac{2k}{n-1}a^{1-n}(4^{n-1}-1), \quad \text{d. i. } 4^{n-1} = 2, \text{ folglich } n = \frac{3}{2}.$$

Walton, p. 221.

12. Ein Punkt bewegt sich geradlinig nach einem festen Centrum aus einer Entfernung a von demselben mit einer dem Kubus seines Abstandes vom Centrum umgekehrt proportionalen Beschleunigung. Welches ist der Ort des Punktes zu einer beliebigen Zeit t und seine Fallzeit T nach dem Centrum?

Ist x der Abstand des Punktes am Ende der Zeit t vom Centrum, dann ist seine Bewegung gegeben durch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi = -\frac{k}{x^3}, \qquad x = a, \ \frac{dx}{dt} = 0, \text{ zur Zeit } t = 0.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2k\int\frac{dx}{x^3} = \frac{k}{x^2} + C = k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{k}\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}.$$

Ferner haben wir für die Fallzeit

$$dt = -\frac{a\,x\,dx}{\sqrt{k}\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \int_0^t dt = -\frac{a}{\sqrt{k}}\int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$t = \frac{a}{\sqrt{k}}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt für den gesuchten Ort des Punktes und den Weg s in der Zeit t

$$x = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - k t^2}, \qquad s = a - \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - k t^2}.$$

Weil für die Fallzeit $x = 0$, so ist dieselbe

$$T = \frac{a^2}{\sqrt{k}}.$$

Walton, p. 225.

13. Ein Punkt M, welcher sich in der Verbindungslinie zweier Centren A und B befindet, wird von diesen Centren so angezogen, dass ihm Beschleunigungen mitgeteilt werden, welche direkt proportional den Quadraten der Entfernungen des Punktes von denselben sind. Der Punkt

befindet sich zur Zeit $t = 0$ in M_0 und besitzt zu derselben eine Anfangsgeschwindigkeit, welche nach B gerichtet ist (Fig. 32); zur Zeit t sei er in M und habe die Beschleunigungen $\frac{k_1^2}{\overline{AM}^2}$, in der Richtung MA, und $\frac{k_2^2}{\overline{BM}^2}$, in der Richtung MB, so wie die Geschwindigkeit v. Die wechselseitige Entfernung der Centren A und B sei a, für die Anfangslage sei $AM_0 = a_1$, $BM_0 = a_2$. Die Bewegung dieses Punktes ist zu untersuchen.

M_0 X M
A $t=0$, $v=v_0$ ... $t=t$, $v=v$ B

Figur 32.

Bezeichnet x den am Ende der Zeit t von dem Punkte zurückgelegten Weg $M_0 M$, so ist die resultierende Beschleunigung zu dieser Zeit, weil $a_2 = a - a_1$,

$$\varphi = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{k_2^2}{(a - a_1 - x)^2} - \frac{k_1^2}{(a_1 + x)^2}, \tag{1}$$

so dass mit $a_1 + x = z$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{k_2^2}{(a-z)^2} - \frac{k_1^2}{(a+z)^2}.$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit dz giebt

$$\frac{d^2 z}{dt^2} dz = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{k_2^2 dz}{(a-z)^2} - \frac{k_1^2 dz}{z^2}.$$

und wenn wir integrieren wird

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + C = \frac{k_2^2}{a-z} + \frac{k_1^2}{z}.$$

Daher ist auch, weil $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} = v$,

$$\frac{1}{2} v^2 + C = \frac{k_2^2}{a-z} + \frac{k_1^2}{z}. \tag{2}$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich dadurch, dass für $x = 0$, $z = a_1$, $v = v_0$, also wird

$$C = \frac{k_2^2}{a - a_1} + \frac{k_1^2}{a_1} - \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{k_2^2}{a_2} - \frac{k_1^2}{a_1} - \frac{1}{2} v_0^2,$$

und wenn wir diesen Wert von C in die (2) substituieren, so folgt

$$\frac{v_0^2 - v^2}{2} = \frac{k_1^2}{a_1} + \frac{k_2^2}{a_2} - \left(\frac{k_1^2}{z} + \frac{k_2^2}{a - z}\right), \tag{2'}$$

oder

$$\frac{v_0^2 - v^2}{2} = \frac{k_1^2}{a_1} + \frac{k_2^2}{a_2} - \left(\frac{k_1^2}{a_1 + x} + \frac{k_2^2}{a - a_1 - x}\right). \tag{3}$$

Jetzt ergiebt sich mittelst der Gleichung (2), weil $\frac{dz}{dt} = v$,

$$v = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k_2^2}{a-z} + \frac{k_1^2}{z} - C} = \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k_2^2 z + k_1^2 a - k_1^2 z - Caz + Cz^2}{(a-z)z}}$$

woraus folgt

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{a_1}^{z} \frac{\sqrt{(a-z)}\, z\, dz}{\sqrt{k_1^2 a - (k_1^2 - k_2^2 + Ca)z + Cz^2}} \tag{4}$$

Aus der Gleichung (3) erhalten wir die Geschwindigkeit am Ende des Weges x; die Gleichung (4) stellt die zum Beschreiben dieses Weges erforderliche Zeit dar. Das in (4) auftretende Integral ist ein elliptisches, welches mit Hilfe der Tafeln für elliptische Integrale aufzulösen ist, um zu einem bestimmten z, resp. $a_1 + x$, das entsprechende t, oder zu einem gegebenen t das zugehörige z zu erhalten.

Der Punkt in AB, für welchen die Attraktionen der beiden Centren gleich gross werden, sei X, $AX = h$, also $BX = a - h$, womit die Beziehung bestehen muss

$$\frac{k_1^2}{h^2} = \frac{k_2^2}{(a-h)^2},$$

und sind die Wurzeln h', h'' dieser Gleichung

$$h' = \frac{ak_1}{k_1 + k_2}, \qquad h'' = \frac{ak_2}{k_1 - k_2}. \tag{5}$$

Der erste dieser Wurzelwerte bestimmt die Stelle X zwischen A und B, der andere eine Stelle in der Verlängerung von AB auf der Seite des Centrums, von welchem die kleinere Beschleunigung ausgeht. Nun ist mit (3)

$$v^2 = 2\left(\frac{k_1^2}{z} + \frac{k_2^2}{a-z}\right) - 2\left(\frac{k_1^2}{a_1} + \frac{k_2^2}{a_2}\right) + v_0^2 \tag{6}$$

und, wenn wir in diese Gleichung nacheinander die Werte von z aus (5) einführen, erhalten wir für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt an der Stelle X innerhalb der beiden Centren anlangt,

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{(k_1 + k_2)^2}{a_1 + a_2} - 2\left(\frac{k_1^2}{a_1} + \frac{k_2^2}{a_2}\right),$$

und für die Geschwindigkeit, wenn der Punkt an der Stelle X ausserhalb AB ankommt

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{(k_1 - k_2)^2}{a_1 + a_2} - 2\left(\frac{k_1^2}{a_1} + \frac{k_2^2}{a_2}\right).$$

Soll der Punkt mit der Geschwindigkeit $v = 0$ in X zwischen A und B anlangen, dann ist die hiezu erforderliche Geschwindigkeit V offenbar nach (6)

$$V = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k_1^2}{a_1} + \frac{k_2^2}{a_2} - \frac{(k_1 + k_2)^2}{a_1 + a_2}}$$

und durch eine kleine Umformung gelangen wir zu

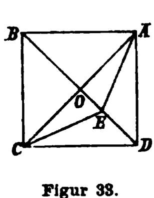
$$V = \sqrt{2}\,\frac{\frac{k_1}{a_1} - \frac{k_2}{a_2}}{\sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}}. \tag{7}$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 < V$, dann kann der Punkt die Gleichgewichtsstelle nicht erreichen, er kehrt wieder nach A zurück; ist $v_0 > V$, so überschreitet er die Stelle X und wandert nach dem Centrum B.

Es seien nun A und B die Mittelpunkte des Mondes und der Erde, beide Körper unbeweglich gedacht, $A M_0 = a$ sei der Mondhalbmesser, r der Erdhalbmesser, und es werde von der Mondoberfläche ein Punkt mit einer solchen Geschwindigkeit nach der Erde geschleudert, dass er die neutrale Stelle X gerade erreicht. Diese Wurfgeschwindigkeit lässt sich annähernd mittelst der Gleichungen (5) und (6) wie folgt berechnen. Näherungsweise ist $a_1 = \frac{3}{11} r$, $AB = a = 60 r$, $k_2{}^2 = \frac{k_1{}^2}{75}$, also $h' = \frac{a}{1 + \frac{k_2}{k_1}} = \frac{a}{1 + \sqrt{75}} = 0 \cdot 135\, a = 6 \cdot 21\, r$. Mit diesen Werten ist $V^2 = 0 \cdot 04489 \frac{2 k_1{}^2}{r}$. Bezeichnet g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, so ist $g : k_1{}^2 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{1^2}$, folglich $k_1{}^2 = g r^2$, und mithin $V^2 = 0 \cdot 04489 . 2 g r$, oder $V = 2368$ Meter. Ist die Wurfgeschwindigkeit nur unbedeutend grösser als dieser Wert, dann überschreitet der Punkt die neutrale Stelle und fällt nach der Erde. Die Höhe der Atmosphäre ist höchstens gleich $0 \cdot 01\, r$, ihre Grenze erreicht den Punkt mit einer Geschwindigkeit v, die sich mittelst (6) bestimmen lässt, indem wir schreiben $v_0 = V$, $a = 60 r$, $z = 58 \cdot 99\, r$, $a_1 = \frac{3}{11} r$, $k_2{}^2 = \frac{1}{75} k_1{}^2$, $k_1{}^2 = g r^2$, $k_2{}^2 = \frac{1}{75} g r^2$, und finden nach gehöriger Reduktion $v^2 = V^2 + 0 \cdot 9247 . 2 g r = 0 \cdot 96959 . 2 g r$, so dass $v : V = 4 \cdot 6475$. Verlässt demnach der Punkt die neutrale Stelle mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit, so trifft er die Grenze der Atmosphäre mit einer um etwas mehr als $4^1/_2$mal grösseren Geschwindigkeit als die Wurfgeschwindigkeit beträgt, es ist $v = 11\,033$ Meter. Nach der Annahme ist die Höhe der Atmosphäre $0 \cdot 01\, r = 63\,650$ Meter; die Zeit zum Durchfallen dieser Höhe mit gleichförmiger Beschleunigung folgt aus der Formel $t = \frac{1}{g}\left(v - \sqrt{2 g s + v_0{}^2}\right)$, es ist annähernd $t = 5 \cdot 4$ Sekunden.

Schlömilch, Analyt. Mechanik, B. I. S. 324. Jullien, Problèmes de Mécanique Rationelle, Tom. I. p. 233. Autenheimer, Elementarbuch für die Differentialrechnung, S. 353.

14. Nach den Ecken eines Quadrates wird ein in einer seiner Diagonalen, sehr nahe seinem Mittelpunkte liegender Punkt so beschleunigt, dass die Acceleration einer beliebigen Funktion der Entfernung direkt proportional ist. Wie gross ist die Zeit einer Schwingung?



Figur 33.

Es sei (Fig. 33) O der Mittelpunkt des Quadrates, E die Lage des Punktes zur Zeit t nach dem Beginn der Bewegung, $OD = a$, $OE = s$, $AE = r$. Die Summe der in der Linie OD wirkenden Beschleunigungen ist $\varphi = -2f(r)\frac{s}{r} + f(a-s) - f(a+s)$, oder wenn wir die höheren Potenzen der kleinen Grösse s vernachlässigen, nach dem Satze von Taylor, $\varphi = -2\left\{\frac{f(a)}{a} + f'(a)\right\}s$, und wenn wir noch den Coëfficienten von s mit k^2 bezeichnen, $\varphi = -2k^2 s$. Nun ist das Gleichungensystem für die Bewegung

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = -2k^2 s.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von v

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -k^2 s.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$s = C \cos(kt + C').$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $\frac{ds}{dt} = 0$, und s sei $= s_0$, womit sich für die Integrationskonstanten ergiebt $s_0 = C \cos C'$, $0 = C \sin C'$, folglich ist

$$s = s_0 \cos kt.$$

Mit $kt = \pi$ wird $s = -s_0 =$ seinem grössten negativen Werte, mithin ist die Zeit T einer vollen Schwingung, weil dann $kT = \pi$,

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}f(a) + f'(a)}}.$$

Walton, p. 222.

15. Ein Punkt fällt von der Spitze eines Turmes, es wird beobachtet, dass er in der letzten Sekunde seiner Fallzeit den n^{ten} Teil dieser Höhe zurücklegt. Welches ist die ganze Fallzeit T und die Höhe H des Turmes?

$$T = n + \sqrt{n^2 - n}; \quad H = \frac{1}{2}gn(2n - 1 + 2\sqrt{n^2 - 1}).$$

16. Ein Punkt wird mit einer Geschwindigkeit $4g$ vertikal aufwärts geworfen, nach zwei Sekunden hört die Fallbeschleunigung für eine Sekunde auf zu wirken und ist dann doppelt so gross. Man soll die grösste Steighöhe H und die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punkt an dem Orte seines Auslaufes wieder ankommt, bestimmen.

$$H = 9g, \qquad v = 6g.$$

Walton, p. 227.

17. Welchen Weg s legt ein in einen Brunnen senkrecht hinabgeworfener Körper zurück, den man nach t Sekunden aufschlagen hört, wenn der Fall im luftleeren Raum stattfindet, die Geschwindigkeit des Schalles a Meter beträgt und der Körper keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt?

$$s = \frac{a}{g}(gt + a - \sqrt{2gt + a^2}).$$

18. Ein Punkt fällt geradlinig nach einem festen Centrum mit einer der n^{ten} Potenz seines Abstandes von diesem Centrum direkt proportionalen Beschleunigung und erlangt in dem Abstande a von denselben die Geschwindigkeit v. In welcher Entfernung z vom Centrum hat die Bewegung begonnen, wenn k die Intensität der Beschleunigung im Abstande der Einheit von dem anziehenden Punkte ist?

Die verlangte Entfernung folgt aus der Gleichung

$$z^{n+1} - a^{n+1} = \frac{n+1}{2k} v_0^2.$$

Euler, Mechanica, Tom. I. p. 109. Walton, p. 227.

19. Ein Punkt fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit nach einem festen Centrum mit einer dem Kubus des Abstandes umgekehrt proportionalen Beschleunigung. Welches ist die ganze Fallzeit T, wenn k^2 die bekannte Konstante und a den Anfangsabstand bezeichnet?

$$T = \frac{a^2}{k}.$$

20. Ein Punkt fällt aus einer unendlichen Entfernung nach einem festen Centrum mit einer dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportionalen Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit. Wie gross ist die Geschwindigkeit in einer Entfernung a vom Centrum, wenn k^2 die bekannte Konstante bedeutet?

$$v = k\sqrt{\frac{2}{a}}.$$

21. Ein Punkt fällt aus einem Abstande a nach einem festen Centrum mit einer Beschleunigung $\frac{k^2}{r^{\frac{3}{2}}}$, wo r eine beliebige Entfernung von demselben bezeichnet. Wie gross ist seine ganze Fallzeit?

$$T = \frac{3\pi a^{\frac{5}{4}}}{8k}.$$

19—21. Walton, p. 228.

22. Ein Punkt befindet sich in einer Entfernung a von einem festen Centrum und fällt nach demselben mit einer der $\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\text{ten}}$ Potenz des Abstandes umgekehrt proportionalen Beschleunigung, wo n eine positive Zahl > 1 bezeichnet. Welches ist die ganze Fallzeit T, mit k^2 als der bekannten Konstanten?

$$T = \frac{2^{n-1} \cdot a^{\frac{2n}{2n-1}}}{k\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}.$$

23. Ein Punkt bewegt sich aus der Ruhe nach einem festen Centrum; beide haben anfangs den wechselseitigen Abstand a; die Beschleunigung ist umgekehrt proportional der Entfernung. Man soll den Wert von β so bestimmen, damit der Punkt zur Beschreibung der Bahn zwischen βa und $\beta^n a$ ein Maximum an Zeit nötig hat.

$$\beta = n^{-\frac{1}{2(n-1)}}.$$

24. Ein Punkt befindet sich an einer bestimmten Stelle zwischen zwei Centren, welche ihn mit gleicher Intensität nach sich hin accelerieren, und ist die Beschleunigung direkt proportional dem Abstande. Welches ist die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit und die Periode seiner Schwingungen?

Bezeichnet a den Anfangsabstand des Punktes vom Mittelpunkte der die Centren verbindenden Geraden, x seine Entfernung davon nach dem Verlaufe der Zeit t, k^2 die bekannte Konstante, so ist

$$x = a \cos \sqrt{2}\, kt, \quad \text{und die Schwingungsperiode} = \frac{\pi}{k\sqrt{2}}.$$

22—24. Walton, p. 229.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung im widerstehenden Mittel.

Die Verzögerung, welche ein Punkt während des Durchlaufens eines widerstehenden Mediums von veränderlicher Dichtigkeit erfährt, hängt an einer beliebigen Stelle seiner Bahn von der Dichtigkeit des Mediums und der Geschwindigkeit des Punktes daselbst ab, so dass sie eine Funktion dieser Grössen sein wird. Die Beschaffenheit dieser Funktion kann nur durch das Experiment bestimmt werden. Bei rein mathematischen Untersuchungen wird — wegen der Einfachheit und als eine wahrscheinliche Annäherung an die Wahrheit — angenommen, dass diese Funktion von der Form $\varepsilon \varrho \Omega$ sei, wo ϱ die Dichtigkeit des Mediums, Ω eine gewisse Funktion der Geschwindigkeit des Punktes bezeichnet, ε ein unveränderlicher Coëfficient ist, welcher von der Beschaffenheit des fraglichen Fluidums, in Bezug auf Cohäsion und Reibung seiner es zusammensetzenden Moleküle, abhängig ist Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit des in einem Fluidum von der Dichtigkeit ϱ' unter der Wirkung der Fallbeschleunigung g sich bewegenden Körpers, so ist gefunden worden, dass die auf diesen Körper wirkende resultierende Beschleunigung $g' = \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) g$ ist, und es wird gewöhnlich g' die relative Beschleunigung genannt.

Die frühesten Untersuchungen der Bewegungen in widerstehenden Mitteln sind Newton und Wallis zu verdanken. Eine gründliche Ausarbeitung der Theorie dieser Bewegung durch Newton wurde im Jahre 1687 im zweiten Buche der Principia veröffentlicht. In demselben Jahre, nach der Publikation von Newton's Werk, gelangte Wallis unabhängig davon zu wertvollen Schlüssen von diesem Gegenstande, er teilte seine Erwägungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in London mit, welche in den Philosophical Transactions für das Jahr 1687 zur allgemeinen Kenntnis gebracht wurden. Von Leibnitz ist ein Blatt über die Frage nach der Bewegung im widerstehenden Mittel in Acta Erudit Lips. anno 1689 vorhanden, auf welchem er

Meinungen entwickelt, die er erklärt, zwölf Jahre vor dieser Veröffentlichung der königlichen Akademie der Wissenschaften mitgeteilt zu haben. Auch Huyghens hat gewisse Punkte dieser Theorie am Ende seiner Discours de la Course de la Pesanteur besprochen, welche im Jahre 1690 erschienen. Endlich wurde alles das, was diese Philosophen, entweder mit oder ohne Erklärung, der gelehrten Welt zur Kenntnis gebracht hatten, analytisch von Varignon erforscht, und erschien in einer Reihe von Aufsätzen in den Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris während der Jahre 1707 bis 1710. Von Bouguer existiert eine sorgsam ausgearbeitete Schrift in Les Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1731, p. 390; daselbst behandelt er die Bewegung eines materiellen Punktes in beweglichen widerstehenden Mitteln.

1. Ein Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 in einem Fluidum von konstanter Dichtigkeit geworfen, durch welches er eine der Geschwindigkeit direkt proportionale Verzögerung erleidet. Wie gross ist die Geschwindigkeit und der Weg des Punktes am Ende einer beliebigen Zeit t, wenn k die Beschleunigung für die Einheit der Geschwindigkeit bezeichnet?

Das Gleichungensystem für die Bewegung des Punktes ist hier

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = -kv.$$

Damit ergiebt sich $\quad v\,dv = kv, \quad$ oder $\quad dv = -k\,ds$, so dass

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^s ds, \quad v - v_0 = -ks, \quad \text{mithin} \quad v = v_0 - ks. \tag{1}$$

Ferner ist $\frac{ds}{dt} = v = v_0 - ks, \quad dt = \frac{ds}{v_0 - ks}$, folglich

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{v_0 - ks}, \quad \text{so dass} \quad t = \frac{1}{k}\, l\, \frac{v_0}{v_0 - ks}. \tag{2}$$

Gehen wir in (2) von den Logarithmen zu den Zahlen über, dann wird

$$e^{kt} = \frac{v_0}{v_0 - ks}, \quad \text{also} \quad s = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}); \quad v = v_0\, e^{-kt}, \text{ mit (1).}$$

Newton, Principia, Lib. II. Prop. I et II. Leibnitz, Acta Erudit. Lips. anno 1689. Varignon, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, anno 1707. p. 391. Walton, p. 235.

2. Ein Punkt bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einem Medium, welches ihm eine Verzögerung proportional der n^{ten} Potenz seiner Geschwindigkeit v beibringt. Es seien zu bestimmen die Relationen zwischen der Geschwindigkeit v und der Bahn s, der Geschwindigkeit v und der Zeit t, so wie zwischen s und t?

Die erste Relation ergiebt sich aus der Differentialgleichung

$$v\frac{dv}{ds} = -kv^n, \quad \text{oder} \quad k\,ds = -\frac{dv}{v^{n-1}};$$

aus ihr folgt

$$k\int_0^s ds = -\int_v^v \frac{dv}{v^{n-1}},\quad ks = \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{v_0^{n-2}}\right),$$

$$s = \frac{1}{k(n-2)}\left(\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{v_0^{n-2}}\right). \tag{1}$$

Die zweite Beziehung folgt aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = -kv^n,\quad \text{oder}\quad k\,dt = -\frac{dv}{v^n},$$

nämlich

$$k\int_0^t dt = -\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^n},\quad kt = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{v_0^{n-1}}\right);\ t = \frac{1}{k(n-1)}\left(\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{v_0^{n-1}}\right) \tag{2}$$

Die dritte Relation ergiebt sich durch Elimination von v aus (1) und (2), sie ist

$$s = \frac{1}{(n-2)\,kv_0^{n-2}}\left\{\left[(n-1)v_0^{n-1}kt\right]^{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right\}. \tag{3}$$

Varignon, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1707, p. 404.
Walton, p. 237.

3. Ein Punkt fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit in der Luft frei herab. Die Beschleunigung sei konstant $= g$ und der Luftwiderstand der Geschwindigkeit direkt proportional. Wie ist die Bewegung dieses Punktes beschaffen?

Ist k diejenige konstante Grösse, um welche die Fallbeschleunigung bei der Geschwindigkeit $v = 1$ vom Luftwiderstande vermindert wird, so ist die resultierende Beschleunigung zur Zeit t, $\varphi = g - kv$, demnach sind die Fundamentalgleichungen der Bewegung des Punktes

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2) \qquad \varphi = g - kv. \quad (3)$$

Die Fallzeit als Funktion der Geschwindigkeit folgt aus (2) und (3), es ist

$$dt = \frac{dv}{g - kv},\quad \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{g-kv},\quad \therefore t = \frac{1}{k}\,l\,\frac{g}{g-kv}. \tag{4}$$

Jetzt ergiebt sich aus (4) die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, es ist

$$\therefore v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \tag{5}$$

Wächst die Zeit bis ins Unendliche, so nähert sich die Geschwindigkeit einer bestimmten Grenze, wir erhalten $\lim v = \lim \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{g}{k}$.

Für den in der Zeit t zurückgelegten Weg s ergiebt sich mit (1) und (5)

$$ds = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt,\quad \int_0^s ds = \frac{g}{k}\int_0^t (1 - e^{-kt})\,dt,\quad \therefore s = \frac{g}{k}\left\{t + \frac{1}{k}(e^{-kt} - 1)\right\} \tag{6}$$

Wächst t bis ins Unendliche, so wird auch der Weg s unendlich gross.

Der Weg s als Funktion der Geschwindigkeit ergiebt sich durch Elimination von t aus den allgemeinen Gleichungen und der Integration des Resultates, wir erhalten

$$ds = \frac{v\,dv}{g - kv}, \quad \int_0^s ds = \int_0^v \frac{v\,dv}{g - kv}, \quad \therefore s = \frac{1}{k}\left\{\frac{g}{k} l \frac{g}{g - kv} - v\right\}. \quad (7)$$

Behufs Einführung des Luftwiderstandes kann auch in folgender Weise zu Werke gegangen werden. Die Retardation ψ des Widerstandes ist $\psi = kv$. Um k durch g auszudrücken sei ε der Wert von v, bei welchem $\psi = g$ werden würde, so dass $g = k\varepsilon$ ist. Dadurch wird $\psi = g\frac{v}{\varepsilon}$, also $\varphi = g\left(1 - \frac{v}{\varepsilon}\right) = g\frac{\varepsilon - v}{\varepsilon}$. Hiemit erhalten wir

$$dt = \frac{\varepsilon}{g}\frac{dv}{\varepsilon - v}, \quad \int_0^t dt = \frac{\varepsilon}{g}\int_0^v \frac{dv}{\varepsilon - v}, \quad \therefore t = \frac{\varepsilon}{g} l \frac{\varepsilon}{\varepsilon - v}; \quad \therefore v = \varepsilon\left(1 - e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}\right).$$

$$ds = \varepsilon\left(1 - e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}\right) dt; \quad \int_0^s ds = \varepsilon\int_0^t \left(1 - e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}\right) dt, \quad \therefore s = \varepsilon\left\{t + \frac{\varepsilon}{g}\left(e^{\frac{-g}{\varepsilon}t} - 1\right)\right\}.$$

$$ds = \frac{\varepsilon}{g}\frac{v\,dv}{\varepsilon - v}; \qquad \int_0^s ds = \frac{\varepsilon}{g}\int_0^v \frac{v\,dv}{\varepsilon - v}, \qquad \therefore s = \frac{\varepsilon}{g}\left(\varepsilon . l \frac{\varepsilon}{\varepsilon - v} - v\right).$$

4. Ein Punkt wird in der Luft mit einer Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen. Die Fallbeschleunigung sei konstant $= g$ und die Beschleunigung des Widerstandes proportional der Geschwindigkeit. Welches ist seine Geschwindigkeit v und sein Weg s nach der Zeit t? Wie gross ist die ganze Steighöhe H und die ganze Steigzeit T?

Weil hier die Widerstandsbeschleunigung in demselben Sinne wie die Fallbeschleunigung wirkt, so sind die Fundamentalformeln für die Bewegung des Punktes

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2) \qquad \varphi = -(g + kv). \quad (3)$$

Mit (2) und (3) wird

$$dt = -\frac{dv}{g - kv}, \quad \int_0^t dt = -\int_{v_0}^v \frac{dv}{g - kv}; \quad \therefore t = \frac{1}{k} l \frac{g + kv_0}{g + kv}; \quad (4)$$

$$\therefore v = \frac{1}{k}\{(g + kv_0)\,e^{-kt} - g\}. \quad (5)$$

Mit (1) und (5) erhalten wir

$$ds = \frac{1}{k}\{(g + kv_0)\,e^{-kt} - g\}\,dt; \quad \int_0^s ds = \frac{1}{k}\int_0^t \{(g + kv_0)\,e^{-kt} - g\}\,dt,$$

$$\therefore s = \frac{1}{k}\left\{\frac{g + kv_0}{k}(1 - e^{-kt}) - gt\right\}. \quad (6)$$

Durch (1), (2) und (3) ergiebt sich

$$ds = -\frac{v\,dv}{g + kv}, \quad \int_0^s ds = -\int_{v_0}^v \frac{v\,dv}{g + kv}, \quad \therefore s = \frac{1}{k}\left\{v_0 - v + \frac{g}{k} l \frac{g + kv}{g + kv_0}\right\}. \quad (7)$$

Im höchsten Punkte der Bahn ist $v = 0$, daher mit (7)

$$H = \frac{1}{k}\left\{v_0 + \frac{g}{k} l \frac{g}{g + kv_0}\right\}, \quad (8)$$

und mit (4)

$$T = \frac{1}{k} l \frac{g + k v_0}{g}. \qquad (9)$$

Aus der Gleichung $\varphi = -(g + k v)$ ist ersichtlich, dass die soeben entwickelten Resultate auch für das senkrechte Emporsteigen eines Punktes im luftleeren Raume gelten müssen, denn dann ist $k = 0$, und es lassen sich dieselben auch leicht auf jene für den einfacheren Fall zurückführen, was hier an den Formeln (8) und (9) gezeigt werden soll.

Die (8) lässt sich schreiben $H = \frac{k v_0 + g l \frac{g}{g + k v_0}}{k^2}$, sie nimmt mit $k = 0$ die Form $H = \frac{0}{0}$ an. Die Differentiation des Zählers und Nenners des Ausdruckes der rechten Seite dieser Gleichung nach k giebt $\frac{v_0^2}{2(g + k v_0)} = \frac{0}{0}$ mit k_0, daher ist $\frac{v_0^2}{2g} = \frac{0}{0}$ mit $k = 0$ und folglich $H = \frac{v_0^2}{2g}$. Mit $k = 0$ geht die (9) über in $T = \infty . 0$; es ist aber dann auch $\frac{l \frac{g + k v_0}{g}}{k} = \frac{0}{0}$. Indem wir Zähler und Nenner dieses Ausdruckes nach k differentiieren, muss sein $\frac{v_0}{g + k v_0} = \frac{0}{0}$ mit $k = 0$, d. i. $\frac{v_0}{g} = \frac{0}{0}$, so dass $T = \frac{v_0}{g}$, mit $k = 0$. Die Gleichungen $H = \frac{v_0^2}{2g}$, und $T = \frac{v_0}{g}$ geben aber die Steighöhe und die Steigzeit eines mit der Geschwindigkeit v_0 im luftleeren Raume vertikal aufwärts geschleuderten Körpers. In ähnlicher Weise können die übrigen Resultate transformiert werden.

5. In einem Medium, dessen Widerstandsbeschleunigung dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportional ist, fällt ein Punkt unter dem Einflusse der konstanten Fallbeschleunigung g ohne Anfangsgeschwindigkeit frei herab. Welches ist die Bewegung dieses Punktes?

Die Bewegung erfolgt unter der resultierenden Beschleunigung $\varphi = g - k v^2$, wenn die Richtung der Fallbeschleunigung positiv genommen wird, so dass die Grundgleichungen für dieselbe sind

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2) \qquad \varphi = g - k v^2. \quad (3)$$

Durch (2) und (3) erhalten wir zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit die Beziehung

$$k\,dt = \frac{dv}{\frac{g}{k} - v^2} = \frac{dv}{a^2 - v^2}, \text{ mit } \frac{g}{k} = a^2, \text{ so dass } k\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{a^2 - v^2}.$$

Das letzte Integral löst sich bequem durch Zerfällung des Ausdruckes $\frac{1}{a^2 - v^2}$ in Partialbrüche. Mit $\frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{A}{a+v} + \frac{B}{a-v}$, ist $1 = a(A+B) + (B-A)v$, wodurch $a(A+B) = 1$; $B - A = 0$; folglich $A = B = \frac{1}{2a}$.

Demnach ist $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v}\right)dv$, mithin

$$2ak\int_0^t dt = \int_0^v \left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v}\right)dv, \qquad 2akt = l\frac{a+v}{a-v}.$$

Durch diese Relation ergiebt sich

$$t = \frac{1}{2ak}l\frac{a+v}{a-v}. \quad (4) \qquad v = a\frac{e^{akt} - e^{-akt}}{e^{akt} + e^{-akt}}. \quad (5)$$

Es ist $\frac{a-v}{a+v} = \frac{1}{e^{2akt}}$, wächst die Zeit, dann wächst die Exponentialgrösse rechts sehr rasch, und wird mit $t = \infty$ die rechte Seite der Gleichung gleich Null, folglich nähert sich mit wachsendem t die Geschwindigkeit v einer bestimmten Grenze und es ist mit $t = \infty$ dieser Grenzwert $v = a = \sqrt{\frac{g}{k}}$, so dass bei unendlich wachsender Zeit die Bewegung des Punktes zu einer gleichförmigen wird.

Indem wir aus (1), (2), (3) die Zeit eliminieren, bekommen wir

$$ds = \frac{v\,dv}{g - kv^2}, \int_0^s ds = \int_0^v \frac{v\,dv}{g - kv^2} = -\frac{1}{2k}\int_0^v \frac{-2kv\,dv}{g - kv^2}, \therefore s = \frac{1}{2k}l\frac{g}{g - kv^2}, \quad (6)$$

womit der Weg als Funktion der Geschwindigkeit gefunden ist. Die Elimination von v aus (5) und (6) giebt den Weg als Funktion der Zeit, nämlich

$$s = \frac{1}{k}l\frac{e^{akt} + e^{-akt}}{2}. \quad (7)$$

Zu demselben Resultate führen auch die Gleichungen (1) und (5), mit ihnen ergiebt sich

$$ds = a\frac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1}dt, \quad \int_0^s ds = \frac{1}{k}\int_0^t \frac{e^{akt}.akt + e^{-akt}(-ak\,dt)}{e^{akt} + e^{-akt}}$$

woraus folgt
$$s = \frac{1}{k}l\frac{e^{akt} + e^{-akt}}{2}. \quad (7)$$

Für eine sehr grosse Zeit können wir den Weg s durch eine Näherungsformel bestimmen. Indem wir mit $t = \infty$, $e^{-akt} = 0$ haben, geht damit (7) über in $s = at - \frac{1}{k}l(2) = \sqrt{\frac{g}{k}}t - \frac{1}{k}l(2)$.

Die resultierende Beschleunigung ist $\varphi = g - kv^2$. Es müssen somit die hier erhaltenen Resultate in diejenigen für den freien Fall eines Punktes im leeren Raume, unter gleichen Umständen, übergehen, wenn $k = 0$ gesetzt wird.

Die Gleichung (2) giebt mit $k = 0$, $v = \infty . 0$. Setzen wir $\sqrt{k} = \varepsilon$, so ist auch

$v = \frac{\sqrt{g}}{\varepsilon} \frac{e^{\sqrt{g}.t\varepsilon} - e^{-\sqrt{g}.t\varepsilon}}{e^{\sqrt{g}.t\varepsilon} + e^{-\sqrt{g}.t\varepsilon}} = \infty \cdot \frac{0}{2} = \infty . 0$, mit $\varepsilon = 0$. Weil nun der Nenner des zweiten Faktors des Ausdruckes für v mit $\varepsilon = 0$ bekannt und $\sqrt{g}$ eine konstante Grösse ist, so haben wir nur den Ausdruck zu untersuchen $\frac{e^{\sqrt{g}.t\varepsilon} - e^{-\sqrt{g}.t\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}$, welcher $= \frac{0}{0}$ mit $\varepsilon = 0$. Es ist $\frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = \sqrt{g}\, t \times (e^{\sqrt{g}.t\varepsilon} + e^{-\sqrt{g}.t\varepsilon})$, mithin $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = 2\sqrt{g}\, t$. Für eine der Null sich unbegrenzt näherndes ε oder k ist folglich

$$lim \left\{ \sqrt{g} \frac{e^{\sqrt{g}.t\varepsilon} - e^{-\sqrt{g}.t\varepsilon}}{\varepsilon(e^{\sqrt{g}.t\varepsilon} + e^{-\sqrt{g}.t\varepsilon})} \right\} = \frac{2\sqrt{g}\sqrt{g}\,.\,t}{2} = gt, \text{ daher } v = gt.$$

Die Gleichung (6) giebt mit $k = 0$, $s = \infty . 0$. Differentiieren wir die Bruchseite der Gleichung $2s = \frac{l\frac{g}{g - kv^2}}{k} = \frac{f(k)}{\varphi(k)}$ im Zähler und Nenner nach k, so wird $\frac{f'(k)}{\varphi'(k)} = \frac{v^2}{g - kv^2}$, $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{v^2}{g}$, mithin ist mit $k = 0$, $2s = \frac{v^2}{g}$, oder $s = \frac{v^2}{2g}$.

Die Gleichung (7) giebt mit $k = 0$, $s = \infty \cdot 0$. Nun ist

$$s = g t^2 \frac{l\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{gk}\,t} + e^{-\sqrt{gk}\,t}\right)}{k g t^2} = g t^2 \cdot \frac{l\frac{1}{2}\left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right)}{\omega^2},$$

und mit einem der Null sich unbegrenzt näherenden k oder ω ist

$$lim\ s = g t^2 \cdot lim \frac{l\frac{1}{2}\left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right)}{\omega^2} = g t^2 \cdot \frac{1}{2}, \text{ folglich } s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Die drei Formeln $v = g t$, $s = \frac{v^2}{2g}$, $s = \frac{1}{2} g t^2$, sind die verlangten Gleichungen für den freien Fall eines Punktes im Vacuum.

6. Ein Punkt wird in einem Fluidum, welches eine dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportionale Widerstandsbeschleunigung aus-

übt, vertikal in die Höhe geworfen mit einer Geschwindigkeit v_0. Wie ist seine Bewegung beschaffen?

Die Fundamentalgleichungen der Bewegung sind

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad (2) \qquad \varphi = -(g + kv^2). \quad (3)$$

Daraus erhalten wir zwischen der Zeit und der Geschwindigkeit die Beziehung

$$dt = -\frac{dv}{g + kv^2} = -\frac{1}{k}\frac{dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -\frac{1}{k}\frac{dv}{a^2 + v^2}, \quad \left(\frac{g}{k} = a^2\right)$$

so dass

$$\int_0^t dt = -\frac{1}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a^2 + v^2} = -\frac{1}{ak}\int_{v_0}^{v}\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1 + \left(\frac{v}{a}\right)^2},$$

woraus folgt

$$t = \frac{1}{ak}\left\{arc\left(tg = \frac{v_0}{a}\right) - arc\left(tg = \frac{v}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{gk}}\left\{arc\left(tg = v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\right) - arc\left(tg = v\sqrt{\frac{k}{g}}\right)\right\}. \quad (4)$$

Durch Auflösung der (4) für v erscheint die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. Setzen wir $\frac{g}{k} = a^2$, $arc\left(tg = v_0\sqrt{\frac{g}{k}}\right) = \alpha$, $arc\left(tg = v\sqrt{\frac{g}{k}}\right) = \psi$, so ist $\frac{1}{\sqrt{gk}} = \frac{a}{g}$, $\frac{v_0}{a} = tg\,\alpha$, $\frac{v}{a} = tg\,\psi$, welche Werte in (4) substituiert geben $t = \frac{a}{g}(\alpha - \psi)$, oder $\alpha - \psi = \frac{gt}{a}$.

Nun ist
$$tg\frac{gt}{a} = tg(\alpha - \psi) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\psi}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\psi},$$

oder
$$tg\frac{gt}{a} = \frac{\frac{v_0}{a} - \frac{v}{a}}{1 + \frac{v_0}{a}\frac{v}{a}} = a\frac{v_0 - v}{a^2 + v_0 v},$$

und folgt aus der letzten Relation

$$v = a\frac{v_0\cos\frac{gt}{a} - a\sin\frac{gt}{a}}{a\cos\frac{gt}{a} + v_0\sin\frac{gt}{a}} \quad (5)$$

Jetzt bekommen wir mit (1) und (5)

$$ds = v\,dt = a\frac{v_0 \cos\frac{g\,t}{a} - a \sin\frac{g\,t}{a}}{a \cos\frac{g\,t}{a} + v_0 \sin\frac{g\,t}{a}}\,dt,$$

folglich $$\int_0^s ds = a\int_0^t \frac{v_0 \cos\frac{g\,t}{a} - a \sin\frac{g\,t}{a}}{a \cos\frac{g\,t}{a} + v_0 \sin\frac{g\,t}{a}}\,dt,$$

d. i. $$s = \frac{a^2}{g}\,l\left(\frac{v_0}{a}\sin\frac{g\,t}{a} + \cos\frac{g\,t}{a}\right), \tag{6}$$

womit s als Funktion der Zeit bekannt ist. Aus den Fundamentalgleichungen folgt ferner

$$v\,dv = \varphi\,ds, \text{ so dass } ds = -\frac{v\,dv}{g + k\,v^2} = -\frac{1}{2k}\frac{2k\,v\,dv}{g + kv}, \text{ mithin}$$

$$\int_0^s ds = -\frac{1}{2k}\int_{v_0}^{v}\frac{2k\,v\,dv}{g + k\,v^2}, \quad s = \frac{1}{2k}\cdot l\frac{g + kv_0^2}{g + k\,v^2}, \tag{7}$$

welche Relation den Weg als Funktion der Geschwindigkeit darstellt. Die ganze Steigzeit T und die entsprechende Steighöhe H resultieren aus dem Umstande, dass am Ende dieser Zeit $v = 0$ ist. Durch (4) folgt daher

$$T = \frac{1}{\sqrt{g\,k}}\,arc\left(tg = v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\right), \quad \text{oder } T = \frac{a\,\alpha}{g}, \tag{8}$$

und vermöge (7)

$$H = \frac{1}{2k}\,l\frac{g + k\,v_0}{g}, \quad \text{oder } H = \frac{a^2}{g}\,l\left(\frac{v_0}{a}\sin\alpha + \cos\alpha\right). \tag{9}$$

Weil mit $k = 0$ die Beschleunigung $\varphi = -(g + kv^2)$ in die Acceleration für die Bewegung des Punktes im luftleeren Raume übergeht, so müssen die hier erhaltenen Resultate auch den genannten Fall in sich schliessen, weshalb sie für denselben umgeformt werden sollen.

Die Gleichung (4) kann mit $\sqrt{k} = \varepsilon$ geschrieben werden

$$t\sqrt{g} = \frac{arc\left(tg = \frac{v_0}{\sqrt{g}}\varepsilon\right) - arc\left(tg = \frac{v}{\sqrt{g}}\varepsilon\right)}{\varepsilon} = \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = \frac{0}{0} \text{ mit } \varepsilon = 0.$$

Nun ist

$$\frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = \frac{v_0}{\sqrt{g}}\,\frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{g}\varepsilon^2} - \frac{v}{\sqrt{g}}\,\frac{1}{1 + \frac{v^2}{g}\varepsilon^2}, \text{ mithin } \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{v_0 - v}{\sqrt{g}} = \frac{0}{0}.$$

Daher ist mit $\varepsilon = 0$, $\quad t = \frac{v_0 - v}{g}, \quad v = v_0 - g\,t.$

Die Gleichung (6) giebt mit $k = 0$, d. i. mit $a = \infty$, $s = \infty \cdot 0$, sie ist mit

$$a = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad s = \frac{1}{k} l\left(v_0 \sqrt{\frac{k}{g}} \sin \sqrt{gk}\,.\,t + \cos\sqrt{gk}\,.\,t\right),$$

oder, mit $\frac{v_0}{\sqrt{g}} = \alpha$, $\sqrt{g} \cdot t = \beta$, $\sqrt{k} = \varepsilon$,

$$s = \frac{l(\alpha\,\varepsilon \sin\beta\,\varepsilon + \cos\beta\,\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)},$$

diese giebt für $\varepsilon = 0$, $s = \frac{0}{0}$. Nun ist

$$\frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = \frac{\alpha \sin\beta\,\varepsilon + \alpha\beta\,\varepsilon \cos\beta\,\varepsilon - \beta \sin\beta\,\varepsilon}{2\,\varepsilon\,(\alpha\,\varepsilon \sin\beta\,\varepsilon + \cos\beta\,\varepsilon)}, \quad \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{f''(\varepsilon)}{\varphi''(\varepsilon)} = \frac{2\,\alpha\beta \cos\beta\,\varepsilon - \alpha\beta^2\,\varepsilon \sin\beta\,\varepsilon - \beta^2 \cos\beta\,\varepsilon}{2\,(\alpha\,\varepsilon \sin\beta\,\varepsilon + \cos\beta\,\varepsilon) + 2\,\varepsilon\,(\alpha \sin\beta\,\varepsilon + \alpha\beta\,\varepsilon \cos\beta\,\varepsilon - \beta \sin\beta\,\varepsilon)},$$

$\frac{f''(0)}{\varphi''(0)} = \frac{2\,\alpha\beta - \beta^2}{2} = v_0\,t - \frac{1}{2} g t^2$. Daher erhalten wir für $\varepsilon = 0$, $s = v_0\,t - \frac{1}{2} g t^2$.

Die Gleichung (7) giebt mit $k = 0$, $s = \infty \cdot 0$. Aber es ist

$$\frac{f'(k)}{\varphi'(k)} = \frac{\frac{d}{dk} l \frac{g + k v_0^2}{g + k v^2}}{\frac{d}{dk}(2k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g + k v_0^2} - \frac{v^2}{g + k v^2}\right),$$

$$\frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 - v^2}{g},$$

daher mit $k = 0$, $s = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$.

Die so gefundenen Gleichungen $t = \frac{v_0 - v}{g}$, $s = v_0\,t - \frac{1}{2} g t^2$, $s = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$, sind die gesuchten Relationen für das senkrechte Emporsteigen eines Punktes im Vacuum.

Von Interesse ist hier noch ein Vergleich zwischen dem senkrechten Emporsteigen und der Rückkehr des Punktes in seine Anfangslage. Hat der Punkt seine grösste Höhe erreicht, dann fällt er mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, und einer Beschleunigung $\varphi = g - k v^2$; diesen Teil der Bewegung behandelt die Lösung des vorhergehenden Problemes. Bezeichnet v_1 die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in seine Anfangslage zurückkehrt, so ist sein Weg $H = \frac{1}{2k} l \frac{g}{g - k v_1^2}$, dagegen

ist die ganze Steighöhe $H = \frac{1}{2k} l \frac{g + k v_0^2}{g}$, so dass zwischen den Geschwindigkeiten v_2 und v_0 die Relation besteht $\frac{g - k v_1^2}{g} = \frac{g}{g + k v_0^2}$, oder $v_1 : v_0 = \sqrt{g} : \sqrt{g + k v_0^2}$, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in seine Anfangslage zurückkehrt, ist kleiner als diejenige, mit welcher er aufsteigt. Die ganze Steigzeit des Punktes ist $T' = \frac{1}{\sqrt{gk}} \times arc\left(tg = v_0 \sqrt{\frac{k}{g}}\right)$, seine ganze Fallzeit $T'' = \frac{1}{2\sqrt{gk}} l \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k} v_1}{\sqrt{g} - \sqrt{k} v_1}$, oder, wenn v_1 durch v_0 ausgedrückt wird,

$$T'' = \frac{1}{\sqrt{gk}} l \frac{\sqrt{g + k v_0^2} + \sqrt{k} \cdot v_0}{\sqrt{g}}.$$

Daher ist die ganze Zeit T der Bewegung des Punktes

$$T = T' + T'' = \frac{1}{\sqrt{gk}} \left\{ arc\left(tg = v_0 \sqrt{\frac{k}{g}}\right) + l \frac{\sqrt{g + k v_0^2} + \sqrt{k} v_0}{\sqrt{g}} \right\}.$$

Die Beschleunigungen sind in den beiden zuletzt betrachteten Fällen $\varphi = g - k v^2$, und $\varphi = -(g + k v^2)$. Die Resultate unter 5 müssen daher in diejenigen unter 6 übergehen, wenn an die Stelle von $+g$, $-g$ gesetzt wird, und umgekehrt.

7. Ein Punkt bewegt sich nach einem festen Centrum A mit einer der dritten Potenz seiner Entfernung vom Centrum umgekehrt proportionalen Beschleunigung in einem Fluidum dessen Widerstandsbeschleunigung direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist. Wie gross ist die Geschwindigkeit v des Punktes in einer beliebigen Entfernung von A?

Es stelle x die Distanz des Punktes von A zu einer Zeit t, a seinen Anfangsabstand von A, μ die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung, k die Widerstandsbeschleunigung in der Einheit des Abstandes für eine Einheit der Geschwindigkeit dar, womit für die Bewegung des Punktes die Beziehung besteht

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{\mu}{x^3} + \frac{k}{x^3}\left(\frac{d x}{d t}\right)^2.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, multiplizieren wir ihre beiden Seiten mit $2\frac{d x}{d t}$, was giebt

$$2\frac{d x}{d t}\frac{d^2 x}{d t^2} - \frac{2\mu}{x^3}\frac{d x}{d t} + \frac{2k}{x^3}\left(\frac{d x}{d t}\right)^3,$$

oder $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x^2}\right) - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Setzen wir nun $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = w$, $\frac{1}{x^2} = z$, dann ist

$$\frac{dw}{dt} = \mu \frac{dz}{dt} - kw\frac{dz}{dt}, \qquad dw + kw\,dz = \mu\,dz,$$

$$d(e^{kz} w) = \mu e^{kz} dz, \qquad e^{kz} w = C + \frac{\mu}{k} e^{kz},$$

folglich, wenn wir für w und z ihre Werte schreiben

$$e^{\frac{k}{x^2}} v^2 = C + \frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{x^2}}.$$

Weil aber mit $s = a$, $v = 0$ ist, so wird die Integrationskonstante $C = -\frac{\mu}{k} e^{\frac{k}{a^2}}$, daher

$$e^{\frac{k}{x^2}} v^2 = \frac{\mu}{k}\left(e^{\frac{k}{x^2}} - e^{\frac{k}{a^2}}\right), \qquad v = \sqrt{\frac{\mu}{k}} \sqrt{1 - e^{\frac{k}{a^2} - \frac{k}{x^2}}},$$

womit die Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes bekannt ist.

Walton, p. 236.

8. Ein Punkt fällt vermöge der Beschleunigung der Schwere aus einer gegebenen Höhe in einem Medium von gleicher Dichtigkeit. Die Widerstandsbeschleunigung ist dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportional. Angekommen an der tiefsten Stelle der Bahn wird er mit der Geschwindigkeit vertikal aufwärts geworfen, welche er durch seinen Fall erlangt hat; hierauf sinkt er nach Erreichung der grössten Höhe wieder herab, wird wieder zurückgeworfen, und so fort. Welches ist die Steighöhe des Punktes nach einer beliebigen Anzahl von Reflexionen?

Es seien die Maximalhöhen, welche auf einander folgen, a_1, a_2, a_3, ..., wo a_1 der erste Fallraum; g' bezeichne die relative Fallbeschleunigung.

Für das Herabsinken des Punktes aus irgend einer der genannten Höhen ist hier

$$v\frac{dv}{ds} = g' - kv^2, \quad \text{oder} \quad \frac{v\,dv}{g' - kv^2} = ds.$$

Daher erhalten wir, vom höchsten Punkte aus rechnend,

$$\int_0^v \frac{v\,dv}{g' - kv^2} = \int_0^s ds; \quad \frac{1}{2k} l \frac{g'}{g' - kv^2} = s.$$

Wenn nun v_n die Geschwindigkeit bezeichnet, welche der Punkt beim Durchfallen der n^{ten} Höhe erlangt, so ist offenbar

$$l\frac{1}{1-\frac{k}{g'}v_n^2}=2ka_n,\quad \frac{k}{g'}v_n^2=1-e^{-2ka_n}, \tag{1}$$

Für das Aufsteigen des Punktes auf die $(n+1)^{te}$ Höhe haben wir, vom tiefsten Punkte an rechnend,

$$v\frac{dv}{ds}=-(g'+kv^2),\quad \text{oder}\quad \frac{v\,dv}{g'+kv^2}=-ds,$$

folglich

$$\int_{v_n}^{0}\frac{v\,dv}{g'+kv^2}=-\int_0^{a_{n+1}}ds,\ \text{mithin}\ \frac{1}{2k}l\left(1+\frac{k}{g'}v_n^2\right)=a_{n+1},$$

und

$$\frac{k}{g'}v_n^2=e^{2ka_{n+1}}-1. \tag{2}$$

Jetzt ergiebt sich mit (1) und (2)

$$e^{2ka_{n+1}}+e^{-2kn}=2,$$

oder, indem wir $e^{2ka_n}=u_n$ setzen,

$$u_{n+1}+\frac{1}{u_n}=2,\quad u_n\cdot u_{n+1}+1=2u_n.$$

Weiter ist, mit $u_n=v_n+1$,

$$(v_n+1)(v_{n+1}+1)+1=2(v_n+1);\quad v_n\cdot v_{n+1}+v_{n+1}-v_n=0;$$

$$\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}=1;\quad \Delta\frac{1}{v_n}=1;\quad \frac{1}{v_n}=n+C,$$

$$\frac{1}{u_n-1}=n+C,\quad u_n-1=\frac{1}{n+C};\quad u_n=\frac{n+1+C}{n+C}.$$

Aber weil $\frac{1}{u_1-1}=1+C$, so folgt

$$u_n=\frac{n+\frac{1}{u_1-1}}{n-1+\frac{1}{u_1-1}}=\frac{nu_1-n+1}{(n-1)u_1-n+2},$$

oder, für u_n, u_1 die Werte schreibend,

$$e^{2ka_n}=\frac{ne^{2ka_1}-n+1}{(n-1)e^{2ka_1}-n+2}.\quad \therefore\ a_n=\frac{1}{2k}l\frac{ne^{2ka_1}-n+1}{(n-1)e^{2ka_1}-n+2}.$$

Mit einem unendlich grossen a_1 haben wir demnach

$$a_n=\frac{1}{2k}l\frac{n}{n-1}.$$

Euler, Mechanica, Tom. I. p. 192. Walton, p. 238—240.

9. Die Centripetalbeschleunigung soll so bestimmt werden, damit ein Punkt immer in derselben Zeit, von welcher Entfernung aus seine

Bewegung auch beginnen möge, nach einem festen Centrum fallen kann, wenn die Dichtigkeit des Mediums für jede Stelle seiner Bahn bekannt, und die Widerstandsbeschleunigung direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist.

Bezeichnet p die Centripetalbeschleunigung, k die Dichtigkeit des Fluidums an einer beliebigen Stelle der Bahn, so ist die Bewegungsgleichung

$$v\frac{dv}{dx} = -p + kv^2.$$

Die Multiplikation der beiden Seiten dieser Gleichung mit $2e^{-2\int k dx}$ giebt

$$(2v\,dv - 2kv^2)e^{-2\int k dx} = -2e^{-2\int k dx}p\,dx,$$

d. i. $$\frac{d}{dv}\left(e^{-2\int k dx}v^2\right) = -2e^{-2\int k dx}p\,dx,$$

und indem wir integrieren wird

$$e^{-2\int k dx}v^2 = C - 2\int e^{-2\int k dx}p\,dx.$$

Nennen wir den Anfangsabstand des Punktes vom Centrum a und ist beim Beginn der Bewegung $v = 0$, so kommt

$$e^{-2\int k dx}v^2 = A - X,$$

wo $A = 2\int_0^a e^{-2\int k dx}p\,dx$, und $X = 2\int_0^x e^{-2\int k dx}p\,dx$.

Daher $$v = (A-X)^{\frac{1}{2}}e^{\int k dx},\quad dt = -\frac{e^{-\int k dx}\,dx}{(A-X)^{\frac{1}{2}}}.$$

Weil nun X, k beide Funktionen von x sind, so ist klar, dass wir annehmen können

$$e^{-\int k dx}dx = \frac{dX}{P},$$

wo P eine Funktion von x allein bedeutet, folglich

$$dt = -\frac{dX}{P(A-X)^{\frac{1}{2}}},$$

und die ganze Fallzeit T wird sein, weil $X = 0$, wenn $x = 0$,

$$T = -\int_a^0 \frac{e^{-\int k dx}dx}{(A-X)^{\frac{1}{2}}} = -\int_A^0 \frac{dX}{P(A-X)^{\frac{1}{2}}}.$$

Weil der Wert dieses Integrales für alle Werte von a und daher auch von A derselbe zu sein hat, kann das Differential $\frac{dX}{P(A-X)^{\frac{1}{2}}}$ von keiner Dimension in X, dX und A sein. Folglich muss P, welches offenbar a

nicht enthalten kann, gleich sein $\frac{X^{\frac{1}{2}}}{\beta}$, wo β irgend eine konstante Grösse bedeutet, und daher

$$\beta \frac{dX}{X^{\frac{1}{2}}} = e^{-\int k dx} dx,$$

mithin, X und a sind gleichzeitig gleich Null,

$$2\beta X^{\frac{1}{2}} = \int_0^x e^{-\int x dx} dx, \quad 4\beta^2 X = \left\{ \int_0^x e^{-\int k dx} dx \right\}^2,$$

$$8\beta^2 \int_0^x (e^{-2\int k dx} p \, dx) = \left\{ \int_0^x e^{-\int k dx} dx \right\}^2,$$

$$4\beta^2 e^{-2\int k dx} p \, dx = e^{-\int k dx} dx \int_0^x e^{-\int k dx} dx,$$

$$p = \frac{1}{4\beta^2} e^{\int k dx} \int_0^x e^{-\int k dx} dx.$$

Wenn $k = 0$ ist, was einer Bewegung im leeren Raume entspricht, haben wir

$$p = \frac{1}{4\beta^2} \int_0^x dx = \frac{x}{4\beta^2},$$

d. h. die Centripetalbeschleunigung muss in diesem Falle wie die Distanz variieren. Ist das Medium gleichförmig, oder k eine konstante Grösse, so ergiebt sich

$$p = \frac{1}{4\beta^2} e^{kx} \int_0^x e^{-kx} dx = \frac{1}{4\beta^2} e^{kx} \frac{1}{k} \left(1 - e^{-kx}\right), \quad p = \frac{1}{4\beta^2 k} (e^{kx} - 1).$$

Euler, Mechanica, Tom. I. p. 220. Walton, p. 240—242.

10. Ein Punkt besitzt eine gegebene, nach einem festen Centrum gerichtete Anfangsgeschwindigkeit v_0 und bewegt sich nach demselben mit einer Beschleunigung $\frac{\mu}{x^3}$, wo x den Abstand des Punktes zur Zeit t vom Centrum bezeichnet, in einem Fluidum aus einem Abstande a vom Centrum. Die Dichtigkeit des Fluidums ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Centrum. Man soll die Geschwindigkeit des Punktes für eine beliebige Entfernung vom Centrum bestimmen, wenn der Widerstand für eine gegebene Dichte sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit ändert.

Die verlangte Geschwindigkeit v resultiert aus der Gleichung

$$e^{-\frac{2k}{a}} v^2 - e^{-\frac{2k}{x}} v_0^2 = \frac{\mu}{2k^2} \left(\frac{a - 2k}{a} e^{-\frac{2k}{x}} - \frac{x - 2k}{x} e^{-\frac{2k}{a}} \right).$$

11. Ein Punkt wird mit einer Geschwindigkeit v_0 in einem Fluidum geworfen, welches eine der Quadratwurzel der Geschwindigkeit v direkt proportionale Verzögerung hervorbringt. Nach welcher Zeit t gelangt der Punkt zur Ruhe?

$$t = 2 \frac{\sqrt{v_0}}{k}.$$

10 und 11. Walton, p. 245.

12. Wenn t die Zeit bezeichnet, in welcher ein aus dem Ruhezustande fallender Punkt eine gewisse Geschwindigkeit erlangt, τ diejenige Zeit, in welcher er, vertikal aufwärts geworfen, dieselbe Geschwindigkeit verlieren wird, zu bestimmen die Relation zwischen t und τ. Die Bewegung finde in beiden Fällen in einem gleichförmigen Medium statt, welches eine dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportionale Verzögerung hervorbringt, und es sei k die Verzögerung für die Einheit der Geschwindigkeit.

$$l\,tg\left(\frac{1}{4}\pi + \sqrt{kg}\,.\,\tau\right) = 2\sqrt{kg}\,.\,t.$$

13. Ein Punkt bewegt sich geradlinig aus der Ruhe mit einer konstanten Beschleunigung nach einem festen Centrum in einem Fluidum, welches eine dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt und dem Abstande des Punktes vom Centrum umgekehrt proportionale Verzögerung hervorbringt. Wie gross ist die Geschwindigkeit des Punktes bei einer beliebigen Lage während seiner Annäherung an das Centrum? Welches ist der Abstand des Punktes vom Centrum, wenn seine Geschwindigkeit ein Maximum ist?

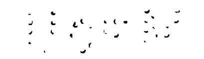
Bezeichnet p die konstante Beschleunigung, v die Geschwindigkeit des Punktes für einen beliebigen Abstand x vom Centrum, a den Anfangswert von x, k die Verzögerung, wenn x und v gleich der Einheit, x' den Centralabstand des Punktes, wenn v ein Maximum ist, dann wird gefunden werden

$$v^2 = \frac{2p}{1-2k}\,.\,x^{2k}\left(a^{1-2k} - x^{1-2k}\right); \quad x' = (2k)^{\frac{1}{1-2k}}\,.\,a.$$

14. Ein Punkt beginnt aus dem höher gelegenen Endpunkte einer vertikalen Linie in demselben Augenblicke zu fallen, in welchem ein zweiter Punkt vom tieferen Ende dieser Geraden aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geschleudert wird. Die Anfangsdistanz der beiden Punkte ist a, sie bewegen sich in einem Fluidum, welches eine der Geschwindigkeit direkt proportionale Verzögerung hervorbringt. Nach welcher Zeit t werden die beiden Punkte zusammentreffen, wenn k die Retardation für die Geschwindigkeitseinheit bezeichnet?

$$t = \frac{1}{k}\,l\,\frac{v_0}{v_0 - k\,a}.$$

12—14. Walton, p. 246.



Drittes Kapitel.

Freie krummlinige Bewegung eines Punktes.

Erste Abteilung.

Freie krummlinige Bewegung eines Punktes im leeren Raume.

Erster Abschnitt.

Die Beschleunigungen besitzen irgend welche Richtungen.

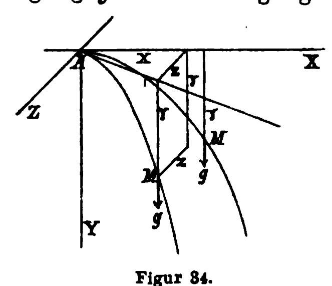
Wird die Bewegung eines freien Punktes, welcher sich unter der Einwirkung irgend welcher Beschleunigungen im Raume bewegt, auf ein festes rechtwinkeliges Coordinatensystem der x, y, z bezogen, sind x, y, z die Coordinaten des Punktes am Ende einer beliebigen Zeit t, dieselbe von einem bestimmten Abschnitte der Bewegung an gerechnet, X, Y, Z die Summen der Componenten der parallel zu den Axen der x, y, z zerlegten Beschleunigungen, in der Richtung der x, y, z, dann ist die Bewegung des Punktes vollständig bestimmt durch das Gleichungensystem

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = Y, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = Z.$$

Die Methode der Zerlegung der Beschleunigungen resp. der accelerierenden Kräfte, welche auf einen freien Punkt wirken, parallel festen Axen, wodurch die Bestimmung der Verhältnisse seiner Bewegung auf die Formeln für die geradlinige Bewegung zurückgeführt wird, wurde zuerst durch Malaurin gegeben: „Treatise of Fluxions“, Vol. I. Art. 465 et sq, veröffentlicht 1742. Vor dieser Zeit wurden alle Aufgaben der krummlinigen Bewegung durch die Methode der tangentialen und normalen Zerlegung gelöst, welche, obwohl sie mehr unmittelbar durch die physikalische Vorstellung von der Bewegung an die Hand gegeben ist, nicht so allgemein gebräuchlich wie diejenige von Maclaurin ist. Das grosse Werk von Euler über Mechanik, welches im Jahre 1736 erschien, geht gänzlich von der alten Lösungsmethode aus. Wir werden den dritten Abschnitt dieser Abteilung der Erläuterung der älteren Bewegungsgleichungen widmen.

Der Leser, welcher Kenntnis zu nehmen wünscht von der Ableitung und der Integration des vorstehenden Gleichungensystemes, muss auf die Theorie der Bewegung und der Kräfte von Schell verwiesen werden.

1. Ein Punkt wird mit einer Geschwindigkeit v_0 in horizontaler Richtung geworfen, vom Wurfpunkt ab wirkt auf ihn nur die Fallbeschleunigung g. Die Bewegung dieses Punktes ist zu untersuchen.



Figur 34.

Es sei (Fig. 34) A der Anfangspunkt der Bewegung, AM die Bahn des Punktes, die horizontale Gerade AX Abscissenaxe, positiv im Sinne der Wurfgeschwindigkeit, AY die Ordinatenaxe, vertikal und positiv im Sinne der Fallbeschleunigung, beide Axen gelegen gedacht in der Ebene der Figur, so dass die Axe der z senkrecht zu dieser Ebene ist. Ferner seien



x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Bahnpunktes M. Die Projektionen der Beschleunigung g auf die Coordinatenaxen sind hiermit $X = 0$, $Y = g$, $Z = 0$, und für die Bewegung des Punktes besteht das Gleichungensystem

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d^2x}{dt^2} = 0, & \frac{dx}{dt} = v_x; & x = y = z = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = g, & \frac{dy}{dt} = v_y; & v_x = v_0, \quad v_y = 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = 0, & \frac{dz}{dt} = v_z; & v_z = 0, \quad v = v_0, \end{array}\right\} \text{ für } t = 0.$$

wobei wir annehmen, dass die Richtung der Geschwindigkeit v_0 mit der Abscissenaxe zusammenfällt. Die Integration der drei ersten Gleichungen giebt

$$\frac{dx}{dt} = v_x = D_1, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = gt + D_2, \qquad \frac{dz}{dt} = v_z = D_3,$$

und wenn wir nochmals integrieren

$$x = D_1 t + C_1, \qquad y = D_2 t + \frac{1}{2} g t^2 + C_2, \qquad z = D_3 t + C_3$$

Zufolge der Anfangsbedingungen sind die Werte der Integrationskonstanten $D_1 = v_0$. $D_2 = 0$, $D_3 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, so dass

$$v_x = v_0, \quad v_y = gt, \quad v_z = 0, \quad (1) \qquad x = v_0 t, \quad y = \frac{g}{2} t^2, \quad z = 0. \quad (2)$$

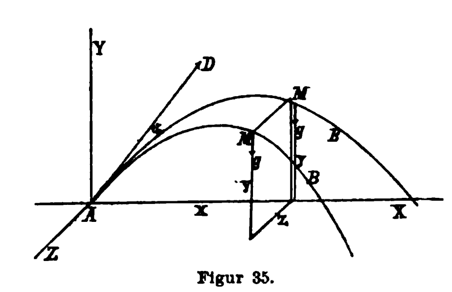
Der Punkt bewegt sich demnach mit einer konstanten Horizontalgeschwindigkeit v_0 und einer konstanten Vertikalbeschleunigung g. Weil $z = 0$, so ist nach (2) die Bahncurve eine ebene Linie und zwar eine Parabel, ihre Gleichung folgt durch Elimination der Zeit aus den Gleichungen (2), sie ist

$$x^2 = \frac{2 v_0^2}{g} y,$$

so dass der Parabelscheitel mit dem Anfangspunkte A der Bewegung zusammenfällt und der Parameter gleich $\frac{2 v_0^2}{g}$ ist. Aus (2) folgt für die Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$. Die Neigung α der Richtung von v folgt aus $tg\, \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$, oder aus $tg\, \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{gx}{v_0^2} = \frac{gt}{v_0}$. Mit den Werten für v und y bekommen wir noch $v^2 - v_0^2 = 2gy$, d. h. die Differenz der Quadrate der Endgeschwindigkeit und der Anfangsgeschwindigkeit ist proportional der Ordinate des fraglichen Bahnpunktes.

2. Ein Punkt wird in schräger Richtung AD (Fig. 35) mit der Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen und sodann der Einwirkung

der Fallbeschleunigung g überlassen. Die Bewegung dieses Punktes ist zu untersuchen.



Figur 35.

Wir verlegen den Ursprung des Coordinatensystemes in den Anfangspunkt A der Bewegung, lassen die vertikale Ebene der xy mit der Richtung AD der Geschwindigkeit v_0 zusammenfallen, nehmen die Axe AX horizontal und positiv in der Richtung der Projektion von v_0 auf diese Linie, die Ordinatenaxe AY positiv vertikal aufwärts, die Axe der z ist dann senkrecht auf der Ebene DAX. Die Richtung der Geschwindigkeit v_0 schliesse mit der Abscissenaxe den Winkel α ein. Ausser der konstanten Geschwindigkeit v_0 wirken auf den Punkt in der Richtung der Coordinatenaxen die Accelerationen $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$. Die Componenten der Geschwindigkeit v_0 parallel zu den Axen sind $v_0 \cos\alpha = a$, $v_0 \sin\alpha = b$, 0. Die Bewegung rechnen wir von der Zeit $t = 0$ an. Damit ist das die Bewegung des Punktes vollständig bestimmende Gleichungensystem:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d^2x}{dt^2} = 0, & \frac{dx}{dt} = v_x; & x = y = z = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g, & \frac{dy}{dt} = v_y; & v_x = a, v_y = b, v_z = 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = 0, & \frac{dz}{dt} = v_z; & v = v_0, \end{array}\right\} \text{für } t = 0.$$

Die wiederholte Integration der drei ersten Gleichungen giebt

$$\frac{dx}{dt} = v_x = D_1, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = D_2 - gt, \quad \frac{dz}{dt} = v_z = D_3,$$

$$x = C_1 + D_1 t, \quad y = C_2 + D_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad z = C_3 + D_3 t.$$

Zufolge der letzten Gleichungenschar sind die Werte der Integrationskonstanten $D_1 = a$, $D_2 = b$, $D_3 = 0$, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, wodurch wir erhalten

$$v_x = a, \quad v_y = b - gt, \quad v_z = 0. \tag{1}$$

$$x = at, \quad y = bt - \frac{1}{2} g t^2, \quad z = 0. \tag{2}$$

Aus diesen Resultaten erhellt, dass die Bewegung des Punktes parallel zur Abscissenaxe gleichförmig, parallel zur Ordinatenaxe gleichförmig veränderlich, parallel zur Axe der z Null ist. Die Bewegung ist daher eine ebene, in der Ebene der xy erfolgende.

Die Geschwindigkeit v des Punktes an einer beliebigen Stelle der Bahn ist zufolge der Gleichungen (1)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 + (b - g\,t)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2\,gy}$$
$$= \sqrt{v_0^2 - 2\,v_0\,g\,t \sin\alpha + g^2 t^2}. \tag{3}$$

Der dritte Ausdruck giebt $v_0^2 - v^2 = 2gy$, was zeigt, dass für einen beliebigen Bahnpunkt die Differenz der Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit daselbst der Ordinate dieses Punktes direkt proportional ist. Der von der Richtung der Geschwindigkeit v und der Abscissenaxe eingeschlossene Winkel β folgt aus

$$tg\,\beta = v_y : v_x = (b - gt) : a = (a\,b - g\,x) : a^2 = tg\,\alpha - \frac{g\,x}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit v lässt sich sehr bequem aus der Relation $v^2 = v_0^2 - 2\,g\,y$ erkennen. Diese Geschwindigkeit wird zu einem Maximum mit $y = 0$, d. i. wenn die Bahn die Abscissenaxe schneidet, was im Ursprunge und einem weiteren Punkte geschieht; es ist nämlich $v^2_{max} = v_0^2$, die Maximalgeschwindigkeit gleich der Wurfgeschwindigkeit, sofern der Punkt seine Bewegung nicht unterhalb der Abscissenaxe fortsetzt, in welchem Falle v mit zunehmenden x beständig wächst. Für gleiche Werte von y ist v gleich gross, d. h. schneidet man die Bahn durch eine Parallele zur Abscissenaxe, dann sind die Geschwindigkeiten in den Schnittpunkten gleich. Die Projektionsgeschwindigkeiten von v sind $v_x = a$, $v_y = b - g\,t$; es steigt demnach der Punkt so lange bis $b - g\,t = 0$ wird, so dass die ganze Steigzeit $T_1 = \frac{b}{g}$ ist, wofür $x = \frac{a\,b}{g}$, $y = \frac{b^2}{2g}$ ist, welches zugleich die Coordinaten des höchsten Bahnpunktes sind. Mithin ist das Geschwindigkeitsminimum $v_{min} = \sqrt{v_0^2 - b^2} = v_0 \cos\alpha = a =$ der Horizontalcomponente der Anfangsgeschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsmaximum erscheint zu Anfang und da wo die Bahn die Axe der x zum Zweitenmale schneidet, was nach der Zeit $t = \frac{2\,b}{g}$, in dem dem Punkte mit der Abscisse $x = \frac{2\,a\,b}{g}$ geschieht. Im letzteren Falle ist $tg\,\beta = v_y : v_x = -b : a = -tg\,\alpha$, d. i. $\beta = \pi - \alpha$, während im ersten $\beta = \alpha$ ist. Die Ordinate des höchsten Bahnpunktes $y = \frac{b^2}{2\,g}$ wird die Wurfhöhe genannt, die Abscisse des zweiten Schnittpunktes der Bahn mit der Axe der x, nämlich $x = \frac{2\,a\,b}{g}$, welche doppelt so gross als die Abscisse $x = \frac{a\,b}{g}$ des höchsten Bahn-

punktes ist, heisst die Wurfweite. Bezeichnen T_1 und T_2 die Zeiten, welche bis zur Erreichung dieser ausgezeichneten Lagen verfliessen, so ist $T_1 = \frac{b}{g}$, $T_2 = 2\frac{b}{g} = 2\,T_1$, d. h. die Steigzeit ist gleich der Fallzeit. Weiter ist die Gestalt der Bahn zu untersuchen. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (2) folgt

$$y = \frac{b}{a}\,x - \frac{1}{2}\frac{g}{a^2}\,x^2, \quad \text{oder} \quad y = tg\,\alpha\,x - \frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\,\alpha}\,x^2, \tag{4}$$

d. h. die von dem Punkte beschriebene Bahn ist eine gemeine Parabel mit vertikaler Axe. Verschieben wir das Coordinatensystem parallel mit sich selbst und verlegen den Ursprung nach dem höchsten Punkte der Bahn, dessen Coordinaten $x = \frac{a\,b}{g}$, $y = \frac{b^2}{2\,g}$ sind, und kehren den Sinn der Ordinatenaxe um, so erscheint die Scheitelgleichung

$$y = \frac{g}{2\,a^2}\,x^2, \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{2\,a^2}{g}\,y. \tag{5}$$

Dieses ist die Gleichung der Parabel in ihrer einfachsten Form, ihre Axe geht durch den höchsten Bahnpunkt, ihr Parameter ist $\frac{2\,a^2}{g} = \frac{2\,v_0^2\,cos^2\,\alpha}{g}$, der höchste Punkt ist Mittelpunkt der Bahn. Die Distanz der Direktrix der Parabel vom Scheitel ist $= \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}$, von der Abscissenaxe $= \frac{1}{2}\frac{b^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = h$, ihre Lage ist unabhängig von dem Wurf- oder Elevationswinkel α, bis zu ihrer Höhe würde der Punkt steigen, wenn er von A aus mit der Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen würde. Nun ist das Quadrat der Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn

$$v^2 = v_0^2 - 2\,b\,g\,t + g^2\,t^2 = 2\,g\left\{\frac{v_0^2}{2\,g} - \left(b\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2\right)\right\} = 2\,g\,(h - y),$$

d. i. $\frac{v^2}{2\,g} = h - y = h'$, wo h' den Abstand des Punktes von der Direktrix bezeichnet. Die Geschwindigkeit des Punktes an irgend einer Stelle der Bahn ist daher gleich derjenigen, welche er erlangen würde frei fallend von der Direktrix nach dieser Stelle. Auch aus der Gleichung (4) lassen sich die Wurfhöhe H und Wurfweite W ableiten; wir erhalten damit wie oben

$$H = \frac{b^2}{2\,g} = \frac{v_0^2\,sin^2\,\alpha}{2\,g}, \quad W = \frac{2\,a\,b}{g} = \frac{v_0^2\,sin\,2\,\alpha}{g}.$$

Die Zeit, welche der Punkt nötig hat, um eine beliebige Stelle der Bahn zu erreichen ist

$$t = \frac{x}{a} = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} = \frac{b}{g} \pm \frac{1}{g}\sqrt{b^2 - 2gy}$$

$$= \frac{1}{g}(v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0{}^2 \sin^2\alpha - 2gy}),$$

womit folgt: $T_1 = \frac{b}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $T_2 = \frac{2b}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 2T_1$.

Die Länge s der Bahn, welche der Punkt während der Zeit t zurücklegt, bestimmt sich mittelst der Beziehung $ds = v\,dt$, womit wir erhalten

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + (gt - b)^2}\,dt,$$

und giebt die Ausführung der Integration

$$s = \frac{1}{2g}\left\{ b\sqrt{a^2 + b^2} + (gt - b)\sqrt{a^2 + (gt - b)^2} \right.$$

$$\left. + a^2\, l\,\frac{gt - b + \sqrt{a^2 + (gt - b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} \right\}. \tag{6}$$

An die Gleichungen für die Wurfhöhe und die Wurfweite knüpft sich noch eine weitere Betrachtung. Die Wurfhöhe ist $H = \frac{b^2}{2g} = \frac{v_0{}^2 \sin^2\alpha}{2g}$ $= h \sin^2\alpha$, sie ist nur von dem Elevationswinkel α abhängig, wenn die Wurfgeschwindigkeit v_0 der Grösse nach gegeben ist, sie wird ein Maximum, zu $\frac{v_0{}^2}{2g}$, mit $\sin\alpha = 1$, d. i. wenn der Punkt vertikal aufwärts geworfen wird, ein Minimum, gleich Null, mit $\alpha = 0$, d. i. bei horizontalem Wurfe. Die Wurfweite ist $W = \frac{ab}{g} = \frac{v_0{}^2 \sin 2\alpha}{g} = 2h \sin 2\alpha$, sie ändert sich bei konstantem v_0 mit dem Elevationswinkel α, wird zu einem Maximum, nämlich $\frac{v_0{}^2}{g}$, d. i. gleich der doppelten grössten Steighöhe, mit $\sin 2\alpha = 0$, oder mit $\alpha = \frac{\pi}{4}$, zu einem Minimum, gleich Null, mit $\sin 2\alpha = 0$, d. i. mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wenn also der Punkt vertikal aufsteigt.

Der Winkel, unter welchem ein Punkt geworfen werden muss, damit er mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 einen gegebenen, um die Strecke W von A abstehenden Ort in der Abscissenaxe erreicht, folgt aus der Gleichung $\sin 2\alpha = W\frac{g}{v_0{}^2}$. Denken wir uns zwei Wurfwinkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \beta$ und $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \beta$, so ist $\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} \pm \beta\right)$. Es ist aber

$$\sin 2\alpha_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right) = \cos 2\beta, \quad \sin 2\alpha_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \cos 2\beta,$$

mithin ist die Wurfweite W für die beiden Winkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \beta$, und $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \beta$, gleich gross. Dieselbe Wurfweite wird demnach stets erreicht durch eine steile und eine flache Bahn, wenn sie kleiner als das Maximum der Wurfweite, für welches $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sein muss.

Sind x_1, y_1 die Coordinaten des Ortes, welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von dem beweglichen Punkte getroffen werden soll, dann muss der Gleichung genügt werden

$$y_1 = x_1\, tg\, \alpha - \frac{g\, x_1^2}{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

für den erforderlichen Wurfwinkel ergiebt sich hieraus

$$tg\, \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2\, v_0^2\, g\, y_1 - g^2\, x_1^2}}{g\, x_1}.$$

Demnach giebt es zwei Winkel, welche die Bedingung erfüllen, wenn $v_0^4 > 2\, v_0^2\, g\, y_1 + g^2\, x_1^2$, einen Winkel, wenn $v_0^4 = 2\, v_0^2\, g\, y_1 + g^2\, x_1^2$, und keinen, wenn $v_0^4 < 2\, v_0^2\, g\, y_1 + g^2\, x^2$. Für einen in der Abscissenaxe liegenden Ort ist, weil dann $y_1 = 0$,

$$tg\, \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2\, x_1^2}}{g\, x_1}.$$

Der Abstand der Direktrix der Parabel von der Abscissenaxe ist $h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$. Weil die Lage der Direktrix von dem Wurfwinkel α unabhängig ist, erkennen wir, dass alle mit derselben Geschwindigkeit von A aus in der Ebene der xy unter verschiedenen Winkeln α geworfene Punkte parabolische Bahnen mit derselben Direktrix beschreiben. Der Punkt A ist von den Brennpunkten der einzelnen Parabeln ebenso weit entfernt als von der Direktrix; es liegen mithin die Brennpunkte aller möglichen, verschiedenen Wurfwinkeln α entsprechenden Parabeln auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte in A und dem Halbmesser h. Mit $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist $b = a$, $H = \frac{h}{2}$, und der Brennpunkt der Bahn liegt auf der Abscissenaxe. Die Scheitel aller Parabeln, welche mit derselben Anfangsgeschwindigkeit von A aus unter verschiedenen Elevationswinkeln entstehen, liegen auf einer Ellipse. Die Coordinaten des Scheitels einer beliebigen

Parabel sind $x = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{2g}$, $y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. Die Elimination des Winkels α aus diesen Relationen giebt

$$x^2 + 4y^2 - \frac{2v_0^2}{g} y = 0.$$

Die eine der Hauptaxen dieser Ellipse fällt mit der Ordinatenaxe zusammen, die Coordinaten ihres Mittelpunktes sind $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{v_0^2}{4g}$. Verlegen wir den Coordinatenursprung nach diesem Punkte, so ist die neue Gleichung der Curve

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2} = 1,$$

woraus ersichtlich ist, dass die kleine mit der Ordinatenaxe zusammenfallende Hauptaxe gleich $\frac{v_0^2}{2g}$, gleich dem Abstande der gemeinsamen Direktrix der Bahnen von der Abscissenaxe ist, dass ferner die grosse Axe gleich $\frac{v_0^2}{g}$, gleich dem doppelten der kleinen Axe ist.

Weiter soll diejenige Curve bestimmt werden, welche sämtliche Parabeln umhüllt. Zur Gleichung dieser Umhüllungslinie gelangen wir durch Elimination des Winkels α und des ersten nach α genommenen Differentialquotienten aus der allgemeinen Bahngleichung, welche mit $tg\,\alpha = c$ lautet

$$y - cx + \frac{g}{2v_0^2}(1 + c^2)x^2 = 0,$$

ihre Ableitung nach c und die der Null Gleichsetzung des Resultates giebt

$$\frac{df(x, y, c)}{dc} = -x + \frac{gx^2}{v_0^2} c = 0, \quad \text{woraus} \quad c = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Damit bekommen wir

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 - \frac{v_0^4}{g^2 x^2}\right),$$

und nach gehöriger Reduktion

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{g} - y\right), \quad \text{oder} \quad x^2 = 4h(h - y).$$

Die Umhüllungslinie ist demnach auch eine Parabel, ihre Axe fällt mit der Ordinatenaxe zusammen. Für $x = 0$ ist $y = h$, mit $y = 0$, wird $x = \pm 2h$; der Parabelscheitel fällt mit der gemeinsamen Direktrix aller Bahnen zusammen. Die Curve schneidet die Abscissenaxe in Abständen gleich der grössten Wurfweite von dem Punkte A. Verlegen wir den Coordinatenursprung nach dem Scheitel und kehren das Zeichen der Or-

dinatenaxe um, dann ist die neue Gleichung der Curve $x^2 = \frac{2 v_0^2}{g} y = 4 h y$, ihr Brennpunkt fällt demnach mit dem Punkte A zusammen.

Die Zeit t der Bewegung des Punktes kann durch die Gleichungen (2) bestimmt werden. Eliminieren wir aus diesen den Winkel α, so ergiebt sich für den Ort aller unter den Winkeln α gleichzeitig von A abgehenden Punkte zur Zeit t die Gleichung

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 = (v_0 t)^2,$$

oder, wenn wir den Coordinatenursprung um $\frac{1}{2} g t^2$ auf der Ordinatenaxe nach abwärts verschieben,

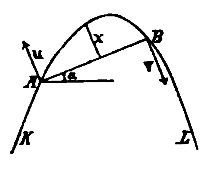
$$x^2 + y^2 = (v_0 t)^2.$$

Der fragliche Ort ist mithin ein Kreis, dessen Mittelpunkt um $\frac{1}{2} g t^2$ von A vertikal abwärts liegt und dessen Halbmesser $v_0 t$ ist. Beide Werte sind von der Zeit t abhängig, der Mittelpunkt sinkt von A aus mit wachsendem t wie ein schwerer Punkt, der Radius ist direkt proportional der Zeit; jedem Zeitintervall entspricht ein besonderer Kreis.

Denken wir uns, dass gleichzeitig von A aus mit gleicher Geschwindigkeit unter allen möglichen Winkeln α, nach allen möglichen Richtungen im Raume Punkte geworfen werden. Dann liegen offenbar die Scheitel aller Bahnen auf einem Rotationsellipsoide mit der Ordinatenaxe als Rotationsaxe, dann ist die sämtliche Bahnen einhüllende Fläche ein Rotationsparaboloid, der Ort aller Punkte zur Zeit t eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkte auf der Ordinatenaxe. (Beispiel: Springende Wasserstrahlen.)

Siehe auch: Schell, Theorie der Bewegung etc. Band I. S. 360—367. Daselbst ist das Problem der parabolischen Wurfbewegung analytisch und synthetisch behandelt.

3. Ein schwerer Punkt beschreibt eine Bahn $KABL$ (Fig. 36), AB ist eine Sehne der Bahn. Es ist gegeben die Componente der Geschwindigkeit bei A rechtwinkelig zu AB. Welches ist die Componente an der Stelle B in derselben Richtung?



Figur 36.

Es sei u die gegebene Geschwindigkeitscomponente bei A, v die zu AB rechtwinkelige Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn zur Zeit t, letztere gerechnet von A an, x der Normalabstand des die Bahn beschreibenden Punktes zu dieser Zeit von AB, α die Horizontalneigung von AB.

Für die Bewegung des Punktes bestehen damit die Gleichungen

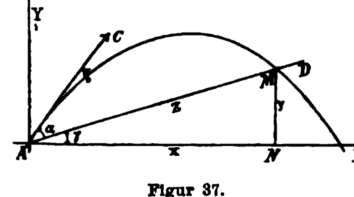
$$x = u\,t - \frac{1}{2}\,g\,cos\,\alpha\,.\,t^2, \qquad v = u - g\,cos\,\alpha\,.\,t.$$

An dem Orte B ist $x = 0$, daher $u = \frac{1}{2}\,g\,cos\,\alpha\,.\,t = 0$, $\quad g\,cos\,\alpha\,.\,t = 2\,u$, folglich ist der Wert von v daselbst $v = -u$.

Daraus erkennen wir, dass die Geschwindigkeit an der Stelle B normal zu $A\,B$ gleich und entgegengesetzt der zu $A\,B$ normalen Componente in A ist.

Walton, pag. 248.

4. Ein Punkt wird aus einem gegebenen Orte in einer gegebenen Richtung mit gegebener Geschwindigkeit geworfen. Durch den Anfangspunkt der Bewegung läuft eine geneigte Ebene. In welchem Abstande vom Anfangspunkte der Bewegung erreicht der geworfene Punkt die geneigte Ebene, und nach welcher Zeit ist dieses der Fall? Unter welchem Winkel muss der Punkt geworfen werden, damit er in der grössten Entfernung vom Wurfpunkte die geneigte Ebene trifft?



Figur 37.

Es sei (Fig. 37) $A\,X\,Y$ die Wurfebene, $A\,C$ die Wurfrichtung, $A\,D$ der Schnitt der Wurfebene und der schiefen Ebene, $A\,X$ horizontal, $A\,Y$ vertikal, $\sphericalangle\,X\,A\,C = \alpha$, $\sphericalangle\,X\,A\,D = \gamma$, M der Schnittpunkt von Flugbahn und geneigter Ebene, v_0 die Wurfgeschwindigkeit, $M\,N \perp A\,X$, $A\,N = x$, $N\,M = y$, $A\,M = z$.

Die Gleichungen der geneigten Ebene und der Flugbahn sind

$$y = x\,tg\,\gamma; \qquad y = x\,tg\,\alpha - \frac{g}{2\,v_0{}^2\,cos^2\,\alpha}\,x^2.$$

Aus diesen Relationen folgt für die Abscisse des Punktes M

$$x = \frac{2\,v_0{}^2\,cos\,\alpha\,.\,sin\,(\alpha - \gamma)}{g\qquad\qquad cos\,\gamma},$$

und mithin ist der Abstand des Punktes M vom Wurfpunkte A

$$z = \frac{x}{cos\,\gamma} = \frac{2\,v_0{}^2}{g}\,\frac{cos\,\alpha\,.\,sin\,(\alpha - \gamma)}{cos^2\,\gamma}. \qquad (1)$$

Für die verlangte Flugzeit t ergiebt sich

$$t = \frac{x}{v_0\,cos\,\alpha} = \frac{2\,v_0}{g}\,\frac{sin\,(\alpha - \gamma)}{cos\,\gamma}. \qquad (2)$$

Damit der Punkt die geneigte Ebene in der grössten Entfernung von A trifft, muss in (1) z für einen gewissen Elevationswinkel α zu einem Maximum werden, es muss dann

$2\cos\alpha . \sin(\alpha - \gamma)$, oder $\sin(2\alpha - \gamma) - \sin\gamma$ ein Maximum sein. Dieses wird der Fall mit $\sin(2\alpha - \gamma) = 1$, oder $2\alpha - \gamma = \frac{\pi}{2}$, d. i. mit $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$. Mithin ist der erreichbare Maximalbestand

$$z_{max} = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos^2\gamma}.$$

Weil $2\alpha - \gamma = \frac{\pi}{2}$, so ist $\alpha - \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$, d. i. $\measuredangle CAX - \measuredangle DAX = \measuredangle YAX - \measuredangle CAX$, oder $\measuredangle CAD = \measuredangle CAY$. Der Punkt erreicht die geneigte Ebene dann im grössten Abstande von dem Wurforte, wenn die Wurfrichtung die Vertikalneigung der Ebene halbiert. Mit $y = 0$ wird die Ebene horizontal, also in diesem Falle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ für die grösste Wurfweite.

5. Von der Spitze eines Turmes werden zwei Punkte mit derselben Geschwindigkeit unter gegebenen Elevationswinkeln geworfen und es wird beobachtet, dass sie den Boden an derselben Stelle treffen. Welches ist die Höhe des Turmes?

Wir wählen die Spitze des Turmes als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die Axe der x horizontal, diejenige der y vertikal, y sei die Höhe des Turmes, v_0 die Wurfgeschwindigkeit, α Elevationswinkel. Die Coordinaten des Ortes, welcher von beiden Punkten getroffen wird, sind x und $-y$, daher die Bedingung

$$-y = x\,tg\,\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha},$$

woraus folgt

$$tg^2\alpha - \frac{2 v_0^2}{g x} tg\,\alpha + 1 - \frac{2 v_0^2 y}{g x^2} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt zwei Wurzeln $tg\,\alpha_1$ und $tg\,\alpha_2$, so dass der Punkt unter den Winkeln α_1 und α_2 geworfen werden kann, um die fragliche Stelle zu erreichen. Vermöge der Eigenschaften der Wurzeln einer quadratischen Gleichung haben wir nun

$$tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2 = \frac{2 v_0^2}{g x}, \text{ und } tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2 = 1 - \frac{2 v_0^2 y}{g x^2} = 1 - \frac{g y}{2 v_0^2}(tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2)^2,$$

so dass die verlangte Turmhöhe

$$y = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{1 - tg\,\alpha_1 . tg\,\alpha_2}{(tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2)^2} = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 . \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

6. Ein Punkt wird von einem Orte A aus unter dem Elevationswinkel α so geworfen, dass er in einem Orte B ankommt. Die Horizontalneigung der Geraden AB sei γ und die Wurfgeschwindigkeit eine solche, dass der Punkt bei gleichförmiger Be-

wegung mit dieser Geschwindigkeit die Strecke AB in n Sekunden beschrieben würde. Welches ist die Flugzeit t?

$$t = n \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

7. Man soll den Wurfwinkel α so bestimmen, dass ein nach einer Ebene, mit der Horizontalneigung γ geworfener Punkt rechtwinkelig aufschlägt, wenn die Wurfebene vertikal und rechtwinkelig zu der geneigten Ebene ist.

$$\alpha = arc\left(tg = cotg \frac{\gamma}{2}\right).$$

8. Zwei aus demselben Orte geworfene Projektile steigen zu derselben Höhe auf und gehen durch einen gewissen Punkt. Wenn a_1, a_2 die horizontalen Schussweiten der zwei Projektile sind, zu finden den Horizontalabstand a des gemeinsamen Bahnpunktes von dem Wurfpunkte

$$a = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}.$$

9. Ein Punkt wird von A aus mit einer horizontalen Geschwindigkeit geworfen: P und Q sind zwei solche Punkte seiner Bahn, dass die Horizontaldistanz des Punktes P von A gleich der Vertikaldistanz des Punktes Q unter P ist, welche a sein möge, und die Horizontalneigung der Bahn bei Q ist β. Wie gross ist der Horizontalabstand b des Punktes Q von A?

$$b = a \cot g \frac{\beta}{2}.$$

6—9. Walton, p. 255 u. 256.

10. Wenn zwei Projektile aus demselben Orte, in demselben Augenblicke mit den Geschwindigkeiten v_0, v_0' unter den Elevationswinkeln α, α' geworfen werden, zu finden die Zeit t, welche zwischen ihrem Durchgange durch den gemeinschaftlichen Punkt ihrer Bahnen verfliesst.

$$t = \frac{2}{g} \frac{v_0 v_0' \sin(\alpha - \alpha')}{v_0 \cos \alpha + v'_0 \cos \alpha'}.$$

11. Wenn β der Winkel zwischen den zwei Tangenten in den Endpunkten eines beliebigen Bogens der parabolischen Bahn eines Punktes ist, v, v' die Geschwindigkeiten an diesen Stellen sind, v_1 die Geschwindigkeit im Scheitel der Bahn bezeichnet, zu finden die zum Durchlaufen dieses Bogens erforderliche Zeit t.

$$t = \frac{v\, v' \sin \beta}{g\, v_1}.$$

12. Eine Kanone ist nach der Spitze eines Turmes gerichtet; die Kugel trifft nach t Sekunden einen Punkt des Turmes in der horizontalen Ebene durch die Mündung des Geschützes. Mit einer anderen Ladung und unter dem Zweifachen des früheren Elevationswinkels trifft die Kugel die Turmspitze nach τ Sekunden. Wie gross ist die Entfernung a des Turmes von der Kanone?

$$a = \frac{1}{2} g t^2 \sqrt{\frac{\tau^2 + t^2}{\tau^2 - t^2}}.$$

13. Wenn ein Geschoss durch drei Punkte mit den rechtwinkeligen Coordinaten (a, b), (a', b'), (a'', b'') geht, wobei der Wurfpunkt Coordinatenursprung, die Axe der x horizontal ist, die Bahngleichung zu bestimmen.

$$\frac{\frac{b}{a}}{(a-a')(a-a'')}+\frac{\frac{b'}{a'}}{(a'-a'')(a'-a)}+\frac{\frac{b''}{a''}}{(a''-a)(a''-a')}=0.$$

14. Die Augen dreier Beobachter befinden sich in der Linie, in welcher die Ebene der Bewegung eines Geschosses eine Horizontalebene schneidet. Die Abstände der Augen von einem gegebenen Punkte dieser Linie seien $a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}$ bzw. Der grösste Elevationswinkel, wie er von den Observatoren gesehen wird, ist $arc(tg=\alpha_{,})$, $arc(tg=\alpha_{,,})$, $arc(tg=\alpha_{,,,})$. Welches ist die von dem Geschosse über der horizontalen Ebene erreichte grösste Höhe H?

$$H=\alpha_{,}\,\alpha_{,,}\,\alpha_{,,,}\,\frac{a_{,}(\alpha_{,,}-\alpha_{,,,})+a_{,,}(\alpha_{,,,}-\alpha_{,})+a_{,,,}(\alpha_{,}-\alpha_{,,})}{\alpha_{,}^2(\alpha_{,,}-\alpha_{,,,})+\alpha_{,,}^2(\alpha_{,,,}-\alpha_{,})+\alpha_{,,,}^2(\alpha_{,}-\alpha_{,,})}$$

11—14. Walton, p. 256 u. 257.

15. Beweise, dass die Zeit, welche ein geworfener Körper zum Durchlaufen eines Bogens braucht, der von einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne abgeschnitten wird, dem Produkte aus den Geschwindigkeiten in den Endpunkten der Sehne proportional ist.

16. Beweise, dass, wenn von zwei Punkten in einer Vertikalen zwei Körper in gleicher Richtung mit derselben Geschwindigkeit geworfen werden, und man von einem beliebigen Punkte der oberen Bahn Tangenten an die untere zieht, der Bogen zwischen den Berührungspunkten stets in derselben Zeit beschrieben wird.

17. Ein Punkt bewegt sich in einer Parabel vermöge einer Beschleunigung, die ihren Sitz in dem Schnittpunkte der Direktrix mit der Parabelaxe hat und vom Centrum wegwärts gerichtet ist. Wie ist die Beschleunigung an einer beliebigen Stelle der Bahn beschaffen?

Es sei der Schnittpunkt von Direktrix und Parabelaxe Coordinatenursprung, die Bahnaxe Axe der x, die Direktrix Axe der y, $4m$ der Parameter, r der Abstand des Punktes vom Coordinatenursprunge zu einer beliebigen Zeit t und p die Beschleunigung in diesem Augenblicke. Das Gleichungensystem für die Bewegung ist hier

$$\frac{d^2x}{dt^2}=p\,\frac{r}{x}, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=p\,\frac{y}{r}, \quad (2) \qquad y^2=4m(x-m). \quad (3)$$

Die Differentiation der Bahngleichung giebt

$$y\frac{dy}{dt}=2m\frac{dx}{dt},\quad y\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (4)$$

und es ist daher mit (2)

$$p(2mx-y^2)=r\left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \qquad (5)$$

Ferner giebt die Elimination von p aus (1) und (2)

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Integrierend und eine Konstante C addierend, welch' letztere die in der Zeiteinheit von dem Fahrstrahle um das Centrum beschriebene doppelte Fläche darstellt, erhalten wir

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \quad \text{und mit (4)} \quad (2mx - y^2)\frac{dy}{dt} = 2mC.$$

Folglich ist mit (5) und (2)

$$p = \frac{4m^2C^2r}{(2mx - y^2)^3} = \frac{C^2r}{2m(2m - x)^3}.$$

Walton, p. 249.

18. Ein Punkt, getrieben nach einer Ebene durch eine Beschleunigung, welche direkt proportional ist der senkrechten Entfernung von ihr, wird rechtwinkelig zu der Ebene, aus einem gegebenen Punkte in ihr, mit einer gegebenen Geschwindigkeit geworfen. Man soll die Beschleunigung bestimmen, welche in der nämlichen Zeit auf den Punkt wirken muss, damit er sich in einer gegebenen Parabel, deren Axe in der Ebene liegt, bewegen kann, und die Coordinaten des Punktes für einen beliebigen Zeitabschnitt als Funktion der Zeit darstellen.

Man nehme die Anfangslage des Punktes zum Coordinatenursprunge, die Parabelaxe zur Axe der x, die durch den Ursprung gehende, zur Ebene senkrechte Linie als Axe der y. Die verlangte Beschleunigung muss offenbar parallel zur Abscissenaxe wirken, sie sei X und μ^2 eine Konstante. Die für die Bewegung des Punktes zur Verfügung stehenden Gleichungen sind diejenigen von Maclaurin und die Bahngleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y, \quad (2) \qquad y^2 = 4mx. \quad (3)$$

Die Differentiation der letzten Relation giebt

$$y\frac{dy}{dt} = 2m\frac{dx}{dt}, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dt^2} = 2m\frac{d^2x}{dt^2},$$

so dass mit (1)

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dt^2} = 2mX. \tag{4}$$

Durch die Integration der (2) erhalten wir

$$y = A\cos\mu t + B\sin\mu t, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = -\mu(A\sin\mu t - B\cos\mu t).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $x = 0$, $y = 0$, $v_y = v_0$ = der Wurfgeschwindigkeit, womit sich für die Integrationskonstanten die Werte ergeben $A = 0$, $B = \frac{v_0}{\mu}$, und es ist hiermit

$$y = \frac{v_0}{\mu}\sin\mu t. \quad (5) \qquad v_y = v_0\cos\mu t.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$v_y^2 = v_0^2(1 - \sin^2\mu t) = v_0^2\left(1 - \frac{\mu^2}{v_0^2}y^2\right) = v_0^2 - \mu^2 y^2. \tag{6}$$

Jetzt liefert die Combination der Gleichungen (2), (4), (6)

$$2mX = v_0^2 - 2\mu^2 y^2,$$

womit sich, in Verbindung mit der Gleichung (3), als die verlangte Beschleunigung ergiebt:

$$X = \frac{v_0^2}{2m} - \frac{\mu^2}{m} y^2 = \frac{v_0^2}{2m} - 4\mu^2 x. \tag{7}$$

Ferner bekommen wir mit (1) und (7)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v_0^2}{2m} - 4\mu^2 x, \quad \frac{d^2}{dt^2}\left(x - \frac{v_0^2}{8\mu^2 m}\right) + 4\mu^2\left(x - \frac{v_0^2}{8\mu^2 m}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -4\mu^2 z, \quad \text{wenn } x - \frac{v_0^2}{8\mu^2 m} = z \text{ gesetzt wird.}$$

Die Integration der letzten Gleichung giebt

$$z = A \cos 2\mu t + B \sin 2\mu t, \qquad \frac{dz}{dt} = -2\mu(A \sin 2\mu t - B \cos 2\mu t),$$

oder, indem wir für z seinen Wert substituieren,

$$x - \frac{v_0^2}{8\mu^2 m} = A \cos 2\mu t + B \sin 2\mu t, \quad \frac{dx}{dt} = -2\mu(A \sin 2\mu t - B \cos 2\mu t).$$

Die Integrationskonstanten bestimmen sich hier dadurch, dass zur Zeit $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, ihre Werte sind $A = -\frac{v_0^2}{8\mu^2 m}$, $B = 0$, so dass

$$x = \frac{v_0^2}{8\mu^2 m}(1 - \cos 2\mu t), \qquad v_x = \frac{2 v_0^2}{8\mu m} \sin 2\mu t. \tag{8}$$

Zufolge der Relationen (5) und (8) für y und x zeigt es sich, dass der Punkt auf dem Teile der Parabel, welcher durch eine Doppelordinate, in einem Abstande $\frac{v_0^2}{4\mu^2 m}$ vom Scheitel, abgeschnitten wird, kontinuierlich schwingt; die Periode einer vollen Schwingung ist $\frac{\pi}{\mu}$.

Walton, p. 250.

19. Ein Punkt bewegt sich in einer Ebene zufolge einer stets senkrecht zu einer Linie gerichteten Beschleunigung, die von der momentanen Lage dieses Punktes nach einem festen Punkte in der Ebene gezogen werden kann. Wie muss das Beschleunigungsgesetz beschaffen sein, damit die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punktes um den festen Punkt konstant sein kann? Welches ist unter diesen Umständen die Bahn des Punktes?

Es sei O der feste Punkt in der Ebene, P die Lage des beweglichen Punktes zu einer beliebigen Zeit t, ϑ die Neigung von OP zu einer festen Linie OX in der Bewegungsebene, $OP = r$, $p =$ der Acceleration.

Das Gleichungensystem für die Bewegung ist in diesem Falle

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad (1) \qquad x^2 + y^2 = r^2, \quad (2) \qquad tg\,\vartheta = \frac{y}{x}. \quad (3)$$

Die Differentiation der (2) giebt

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r\frac{dr}{dt},\quad x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

letztere Gleichung geht mit Berücksichtigung der (1) über in

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

und mit $ds^2=dr^2+r^2d\vartheta^2$ in

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

Durch Differentiation der (3) folgt

$$\frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{\cos^2\vartheta}=\frac{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}}{x^2},\quad \text{so das}\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{\cos^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt},$$

und, wenn diese Gleichung nach t differentiirt wird, ergiebt sich

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Hiezu die (1) addiert, wird

$$\frac{x^2+y^2}{x}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right),\qquad \frac{r}{\cos\vartheta}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right),$$

folglich ist $\quad \frac{r}{\cos\vartheta}p\cos\vartheta=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right),\quad$ d. i. $p=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$ (5)

Die Gleichungen (4) und (5) sind die Bedingungsgleichungen. Setzt man nun $\frac{d\vartheta}{dt}=\omega=$ der konstanten Winkelgeschwindigkeit, so ist

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2r,\quad r=\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t}$$

wo α und β Konstante sind. Folglich ist

$$p=2\omega\frac{dr}{dt}=2\omega^2(\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t})$$

und daher $\quad r^2-\frac{p^2}{4\omega^4}=(\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t})^2-(\alpha e^{\omega t}-\beta e^{-\omega t})^2=4\alpha\beta,$

$$p=2\omega^2\sqrt{r^2-4\alpha\beta}.$$

womit das Gesetz der Veränderlichkeit der Beschleunigung bestimmt ist. Weil $\omega t=\vartheta$, so ist die Gleichung der Bahn

$$r=\alpha e^{\vartheta}+\beta e^{-\vartheta}.$$

Walton, p. 253.

20. Ein Punkt beschreibt eine Ellipse infolge einer in der Ebene der Bahn rechtwinkelig zur grossen Axe gerichteten Beschleunigung. Wie ist die Acceleration an einer beliebigen Stelle der Bahn beschaffen?

Es bezeichne a die grosse, b die kleine Halbaxe der Ellipse, v_0 die Geschwindigkeit des Punktes parallel zur grossen Axe, p die zu suchende

Beschleunigung. Die Bewegung des Punktes ist vollständig bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -p, \quad (2) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (3)$$

Die (1) giebt $\frac{dx}{dt} = v_x = \text{Konst.} = v_0$, d. h. die Geschwindigkeit parallel zur grossen Axe ist eine konstante Grösse. Durch Differentiation der Bahngleichung (3) finden wir $\frac{dy}{dt} = v_y = -\frac{b^2}{a^2} v_0 \frac{x}{y}, (4)$ $a^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + a^2y\frac{d^2y}{dt^2} = b^2v_0. (5)$
Nun ergiebt sich mit (2), (4) und (5)

$$p = \frac{b^2v_0^2}{a^2y^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2y}x^2\right), \text{ und hieraus mit (3) } p = \frac{b^4v_0^2}{a^2y^3}.$$

Wenn $b = a$, oder die Ellipse ein Kreis ist, haben wir demnach $p = \frac{a^2v_0^2}{y^3}$.

Riccati, Comment. Bonon. Tom. IV. p. 149, 1757. Newton, Principia, Lib. I. sect. 2, prop. 8.

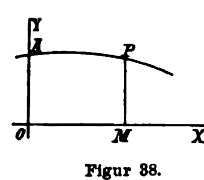
21. **Auf einen Punkt wirkt in einer vertikalen Ebene eine Beschleunigung so, dass er eine Kettenlinie beschreibt. Wie gross ist die Beschleunigung und die Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahnpunkte?**

Ist die Gleichung der Kettenlinie $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$, v_0 die Horizontalgeschwindigkeit des Punktes, dann wird gefunden werden $\varphi_y = \frac{v_0^2}{c^2}y$, $v_y = \frac{v_0}{c}y$.

22. **Ein Punkt beschreibt eine Cycloide infolge einer zu ihrer Basis parallelen Beschleunigung. Wie ist diese Acceleration beschaffen?**

Sind die Gleichungen der Cycloide $x = a(1 - \cos\vartheta)$, $y = a(\vartheta + \sin\vartheta)$, ist v_0 die Geschwindigkeit parallel zur Cycloidenaxe, φ die verlangte Beschleunigung, dann wird man finden $\frac{1}{\varphi} = \frac{a}{v_0^2}\sin\vartheta(1 - \cos\vartheta)$.

23. **Ein Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 parallel zu einer gegebenen geraden Linie geworfen und nach dieser Linie beschleunigt mit einer der Entfernung des Punktes von ihr proportionalen Acceleration. Welches ist die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit, und welches ist die Gleichung seiner Bahn?**



Figur 38.

Es sei (Fig. 38) A die Anfangslage des Punktes, OX die gegebene gerade Linie, $AOY \perp OX$; OX, OY seien die Coordinatenaxen. Nach der Zeit t sei P die Lage des Punktes, $PM \perp OX$, $OM = x$, $MP = y$, $OA = b$, k sei die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung, dann ist

$$x = v_0 t, \quad b\cos\frac{kx}{v_0} = y = b\cos kt.$$

Riccati, Comment. Bonon. Tom. IV. p. 155, 1757.

24. **Ein Punkt wird aus dem Orte mit den rechtwinkeligen Coordinaten $x = 0$, $y = b$ mit einer zur Abscissenaxe parallelen Geschwindigkeit v_0 geworfen; er unterliegt einer Beschleunigung, welche nach der Axe der x und parallel zur Axe der y gerichtet**

ist, dieselbe ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes des Punktes von der Axe der x. Welches ist die Gleichung der Bahn des Punktes, wenn k die Acceleration in der Einheit der Entfernung bezeichnet?

$$\sqrt{\frac{2k}{b}}\cdot\frac{x}{v_0}=\frac{1}{2}b\left\{\pi-arc\left(vers=\frac{2y}{b}\right)\right\}+\sqrt{by-y^2}.$$

Riccati, Comment. Bonon. Tom. IV. p. 159, 1757.

25. Ein Punkt bewegt sich in einer Ebene vermöge einer konstanten Beschleunigung, deren Richtung eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω besitzt. Welches ist die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit?

Ist die Anfangslage Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, fällt die Abscissenaxe mit der anfänglichen Richtung der Beschleunigung zusammen, sind a, b die Componenten der Geschwindigkeit parallel zu den Axen beim Beginne der Bewegung, x, y die Coordinaten des Punktes am Ende der Zeit t, ist p die Beschleunigung, dann wird gefunden werden

$$x=at+\frac{p}{\omega^2}vers\,\omega t,\quad y=bt+\frac{p}{\omega^2}(\omega t-sin\,\omega t).$$

Andrew Bell, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol I. p. 282.

26. Ein nach zwei Centren beschleunigter Punkt befindet sich in einer gegebenen Entfernung a von seiner Ruhelage. Die Beschleunigungen sind direkt proportional der Entfernung und in der Einheit des Abstandes k_1, k_2. Welches ist die Entfernung x des Punktes von der Ruhelage nach der Zeit t?

$$x=a\cos\sqrt{k_1+k_2}\,.\,t.$$

Abraham Schnée, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2me Série, Tom. II. p. 451.

27. Ein Punkt, welcher sich anfangs in einer gegebenen Ruhelage befindet, ist zwei Beschleunigungen unterworfen; die eine ist central und repulsiv, sie ändert sich direkt wie der Abstand des Punktes vom festen Centrum; die andere ist konstant und parallel zu einer Geraden. Welches ist die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit, und welches ist die Gleichung seiner Bahn?

Es sei das Centrum Coordinatenursprung, die Richtung der Coordinatenaxen werde so gewählt, dass die Richtung der konstanten Beschleunigung dieselben unter einem Winkel von 45° schneidet. Dann ist, wenn a, b die Coordinaten der Anfangslage des Punktes sind, μ^2 die absolute, p die konstante Beschleunigung bezeichnet, $p=m\mu^2\sqrt{2}$ setzend,

$$\frac{x+m}{a+m}=\frac{1}{2}(e^{\mu t}+e^{-\mu t})=\frac{y+m}{b+m}.$$

28. Auf einen Punkt wirken zwei Beschleunigungen, von denen jede nach einem festen Centrum gerichtet ist, er bewegt sich in seiner Bahn so, dass das Produkt aus dessen Abständen von den festen Centren unveränderlich ist. Wenn eine der Beschleunigungen sich direkt wie der entsprechende Abstand des Punktes ändert, zu finden das Variationsgesetz der anderen.

In einem Abstande r sei eine der Beschleunigungen kr, dann ist die andere $\frac{kc^4}{r^3}$ wo c^2 das Produkt aus den Abständen des Punktes von den zwei Centren bezeichnet.

29. Nach den Ecken eines Quadrates wird ein von dessen Mitte aus in seiner Ebene nach einer beliebigen Richtung geworfener Punkt so beschleunigt, dass die

Accelerationen direkt proportional den Entfernungen des Punktes von den Ecken sind. Welches ist die von dem Punkte beschriebene Bahn?

Es sei der Mittelpunkt des Quadrates Coordinatenursprung. Die Coordinatenaxen seien parallel zu den Quadratseiten. $2m, 2n$ seien die Componenten der Wurfgeschwindigkeit parallel zu den Axen der x, der y. Damit ist der Weg des freien Punktes ein Teil der durch die Gleichung $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ dargestellten Linie.

30. Ein Punkt beschreibt eine Cycloide infolge einer stets nach dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gerichteten Beschleunigung. Welches ist das Beschleunigungsgesetz? Welches ist die Bewegung des Mittelpunktes des Erzeugungskreises?

Die Beschleunigung ist konstant und der Kreismittelpunkt bewegt sich gleichförmig.

Mackenzie and Walton, Solutions of the Cambridge Problems for 1854.

31. Ein Punkt beschreibt eine Ellipse unter gleichzeitiger Wirkung zweier nach den Brennpunkten gerichteten Beschleunigungen, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernungen des Punktes von den Brennpunkten sind. Welches ist die Differentialrelation zwischen der Zeit und der excentrischen Anomalie?

Es seien a die grosse Halbaxe der Ellipse, μ, μ' die absoluten Beschleunigungen, ψ die excentrische Anomalie und t die Zeit, dann ist

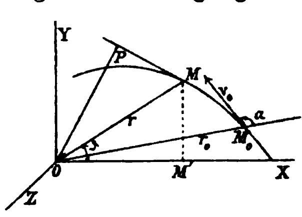
$$a^3\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{(1-e\cos\psi)^2} + \frac{\mu'}{(1+e\cos\psi)^2}.$$

Cayley, Messenger of Mathematics, Vol. V, p. 194.
21—31. Walton, p. 258—262.

Zweiter Abschnitt.

Centralbewegung eines Punktes.

Die Richtung einer auf einen freien Punkt wirkenden Beschleunigung geht stets durch ein festes Centrum, ihre Grösse ist bloss eine Funktion der Entfernung des Punktes von dem Centrum. Die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Punktes seien bekannt, letztere nach Grösse und Richtung. Die Bewegung des Punktes soll untersucht werden.



Figur 39.

Das feste Centrum O (Fig. 39) wählen wir als Coordinatenursprung, die Ebene der x, y falle mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zusammen, die horizontale Gerade OX sei Abscissen-, die auf ihr senkrechte Linie OY Ordinatenaxe eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes. M_0 sei der Anfangspunkt der Bewegung, der Fahrstrahl $OM_0 = r_0$, M_0M die Bahn, der Fahrstrahl nach dem beliebigen Bahnpunkte M, $OM = r$, $\measuredangle XOM_0 = \vartheta_0$, $\measuredangle XOM = \vartheta$, der Winkel, welchen die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit dem Radiusvektor der Anfangslage einschliesst, gleich α.

Die auf den Punkt wirkende Beschleunigung φ zerlegen wir in ihre Componenten parallel zu den aufeinander senkrechten Coordinatenaxen OX, OY, OZ; diese sind, da die Richtungscosinus der Acceleration φ $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$, oder $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, je nachdem ihr Sinn nach dem Centrum oder von ihm weg zeigt, $X = -\varphi\frac{x}{r}$, $Y = -\varphi\frac{y}{r}$, $Z = -\varphi\frac{z}{r}$, oder $X = \varphi\frac{x}{r}$, $Y = \varphi\frac{y}{r}$, $Z = \varphi\frac{z}{r}$. Der zweite Fall lässt sich auf den ersten zurückführen, wenn $-\varphi$ an die Stelle von φ gesetzt wird, weshalb bei der Durchführung der Rechnung nur der erste Fall berücksichtigt werden soll. Sonach sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\varphi\frac{z}{r}.$$

Die Bewegung ist aber eine ebene, sie erfolgt in der durch das Centrum und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gehenden Ebene, welche als Ebene der xy gewählt werden soll, so dass jederzeit $z = 0$ ist und daher nur die Gleichungen in Frage kommen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r}, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}. \quad (2)$$

Multiplizieren wir (2) mit x, (1) mit y, subtrahieren das letztere Resultat von dem ersteren und intergrieren sodann die dadurch gewonnene Gleichung, so kommt

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

welche Formel das Flächenprinzip liefert. Von den rechtwinkeligen zu Polarcoordinaten übergehend, indem wir setzen $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, gelangen wir zu

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c. \quad (3)$$

Bezeichnet nun F die Fläche des Sektors M_0OM, welcher von dem Fahrstrahle r in der Zeit t beschrieben wird, dann ist $F = \frac{1}{2}r^2 d\vartheta$, mithin vermöge (3)

$$dF = \frac{1}{2}c\,dt, \qquad F = \frac{1}{2}ct, \quad (4)$$

wobei keine Integrationskonstante hinzuzufügen ist, weil t und F gleichzeitig verschwinden. Demnach ist bei jeder Centralbewegung die von dem Fahrstrahle beschriebene Fläche der darauf verwendeten Zeit direkt pro-

portional. Dieses Gesetz führt den Namen „erstes Keppler'sches Gesetz". Keppler fand dasselbe durch Beobachtung der Bewegung der Planeten um die Sonne und sprach es für das Planetensystem zuerst aus. $r\frac{d\vartheta}{dt}$ ist die Componente der Geschwindigkeit v des Punktes senkrecht zum Fahrstrahle, diese ist beim Beginn der Bewegung $v_0 \sin\alpha$, daher ist die Konstante c durch die Gleichung bestimmt

$$r_0 v_0 \sin\alpha = c.$$

Die Geschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle der Bahn lässt sich direkt oder mittelst des Prinzipes der lebendigen Kraft darstellen.

Weil $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, und $x^2 + y^2 = r^2$, (5)

mithin $v\,dv = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varphi}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$,

und $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}$,

so folgt $v\,dv = -\varphi\,dr$,

und giebt die Integration dieser Gleichung

$$v^2 = C - 2\int\varphi\,dr, \tag{6}$$

oder zwischen den Grenzen, um die willkürliche Konstante C zu bestimmen,

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\int_{r_0}^{r}\varphi\,dr, \quad v^2 = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r}\varphi\,dr. \tag{6'}$$

Indem nun φ eine Funktion von r ist, so ist auch $\int\varphi dr$ eine Funktion von r, wodurch, wenn wir dieselbe mit $\psi(r)$ bezeichnen,

$$v^2 = C - 2\psi(r) = v_0{}^2 - 2\psi(r). \tag{6''}$$

Daraus geht hervor, dass die Geschwindigkeit des Punktes nur von seinem Centralabstande abhängig ist und nicht auch von dem Polarwinkel ϑ.

Weil im vorliegenden Falle das Prinzip der lebendigen Kraft gilt, so haben wir für die Kräftefunktion

$$dU = -\frac{\varphi}{r}(x\,dx + y\,dy) = -\varphi\,dr, \quad U - U_0 = -\int_{r_0}^{r}\varphi\,dr,$$

folglich $2(U - U_0) = v^2 - v_0{}^2 = -2\int_{r_0}^{r}\varphi\,dr.$

Mit (5) und den Werten von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ in r und ϑ bekommen wir

$$v^2 = \left\{\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2\right\}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = c^2\left\{\left(\frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = c^2\left\{\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right\}, \tag{7}$$

mit $\frac{1}{r} = u$.

Fällen wir vom Pole O eine Normale OP auf die Tangente im Punkte M der Bahn, bezeichnen die Länge dieses Perpendikels mit p, so ist

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2,$$

folglich auch $\quad v^2 = \left(\frac{c}{p}\right)^2, \quad$ oder $\quad v = \frac{c}{p}, \quad$ (8)

d. h. die Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahnpunkte ist umgekehrt proportional der Länge des vom Coordinatenursprunge auf die Bahntangente dieses Punktes gefällten Perpendikels. Für alle Bahnpunkte, welchen gleiche Fahrstrahllängen zukommen, sind die Perpendikellängen gleich, daher ist für alle solche Punkte $\frac{p}{r}$ konstant. Nun ist $\frac{p}{r} = \frac{OP}{OM} = \sin \measuredangle OMP$ $= \sin (180^0 - \measuredangle OPY)$, mithin ist jener Winkel von den zweien $\measuredangle OMP$ und $(180^0 - \measuredangle OMP)$, welcher spitz ist, konstant an solchen Bahnpunkten.

Multiplizieren wir (1) mit $\frac{dy}{dt}$, (2) mit $\frac{dx}{dt}$ und nehmen den Unterschied der Resultate, so wird

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varphi}{r}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Für den Krümmungshalbmesser ϱ im Punkte M der Bahn besteht aber die Relation

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{v^3}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}},$$

und weil $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c = pv$, so ergiebt sich

$$v^2 = \varphi\varrho\frac{p}{r} = 2\varphi\frac{1}{4}(2\varrho \cos \measuredangle MOP)$$

$$= 2\varphi\frac{1}{4} \text{ Krümmungssehne.} \qquad (9)$$

Ist S der geradlinige Weg, welcher mit der Beschleunigung φ von dem Punkte zurückgelegt werden muss, damit er die Geschwindigkeit v erlangt, so ist auch $v^2 = 2\varphi S$, mithin $S = \frac{1}{4}$ Krümmungssehne. Daher ist die Geschwindigkeit v gleich derjenigen, welche der Punkt beim freien Durchfallen des vierten Teiles der durch das Centrum gehenden Krümmungssehne mit der Beschleunigung φ erhalten würde.

Ferner ist der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung φ und der Bahn zu untersuchen. Die aus $x = r \cos \vartheta$ abzuleitende Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$$

lässt sich schreiben $\frac{dx}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\right)$,

also ist auch $\frac{dx}{dt} = \frac{c}{r^2}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\right) = -c\left(\frac{du}{d\vartheta}\cos\vartheta + u\sin\vartheta\right)$.

Die Differentiation dieser Relation giebt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c^2u^2\cos\vartheta\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u\right),$$

woraus folgt, weil $\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r} = -\varphi\cos\vartheta$,

$$\varphi = c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u\right) = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right\}. \tag{10}$$

Vermöge der (10) kann die Beschleunigung φ abgeleitet werden, wenn die Bahngleichung bekannt ist. Aber es ist auch

$$v^2 = \frac{c^2}{p^2} = \varphi\varrho\frac{p}{r} = \varphi p\frac{dr}{dp}, \text{ weil } \varrho = r\frac{dr}{dp}, \text{ folglich}$$

$$\varphi = \frac{c^2\frac{dp}{dr}}{p^3} = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right), \tag{11}$$

durch welche Gleichung φ als Funktion von p und r dargestellt ist.

Mittelst der (10) kann die Gleichung der Bahn gefunden werden, wenn das Beschleunigungsgesetz bekannt ist.

Weil $\quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0{}^2 + U - U_0 = U + h = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\}$,

und $\quad r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c$,

so erhalten wir durch Elimination von $dt = \frac{r^2}{c}d\vartheta$,

$$\frac{c^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2\right\} = U + h, \quad d\vartheta = c\frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{2(U+h) - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} \tag{12'}$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = c\int_{r_0}^{r}\frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{2(U+h) - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} \tag{12}$$

als Gleichung der Bahn.

Da aber auch $v^2 = \frac{c^2}{p^2} = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r}\varphi\, dr$,

so ist noch die Bahngleichung in einem eigentümlichen Coordinatensystem

$$\frac{c^2}{p^2} = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, d\, r. \tag{13}$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher irgend ein Teil der Bahn s beschrieben wird, wird repräsentiert durch $\frac{d\,s}{d\,t}$. In der nämlichen Weise repräsentiert, wenn ϑ den in der Zeit t vom Radiusvektor durchstrichenen Winkel bezeichnet, $\frac{d\vartheta}{d\,t}$ die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Winkel beschrieben wird, sie heisst die Winkelgeschwindigkeit. Daher ist die Winkelgeschwindigkeit bei der Centralbewegung

$$\frac{d\vartheta}{d\,t} = \frac{c}{r^2}. \tag{14}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich

$$x\frac{d^2 x}{d\,t^2} + y\frac{d^2 y}{d\,t^2} = -\varphi\, r,$$

und beachten wir, dass $x^2 + y^2 = r^2$, $\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)^2 = \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\,t}\right)^2$, so folgt nach einer kleinen Rechnung

$$\varphi = -\frac{d^2 r}{d\,t^2} + r\left(\frac{d\vartheta}{d\,t}\right)^2. \tag{15}$$

Durch diese Gleichung erscheint die Acceleration φ zusammengesetzt aus zwei Beschleunigungen, einer Acceleration $-\frac{d^2 r}{d\,t^2}$, welche den Punkt direkt nach dem Centrum zu bewegen sucht, und einer entgegengesetzt gerichteten Acceleration. Weil aber keine andere Beschleunigung ausser φ vorhanden ist, so kann die letztere Acceleration $r\left(\frac{d\vartheta}{d\,t}\right)^2$ nur aus der Bewegung selbst hervorgehen, und weil sie vom Centrum hinweg gerichtet ist, wird sie Centrifugalbeschleunigung genannt. Diese Centrifugalbeschleunigung, welche das Produkt aus der Entfernung des Punktes vom Centrum und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit, hat, wenn wir sie mit f bezeichnen, die Gleichung

$$f = r\left(\frac{d\vartheta}{d\,t}\right)^2 = \frac{c^2}{r^3}. \tag{16}$$

Eliminieren wir aus (12′) den Winkel ϑ durch $r^2\frac{d\vartheta}{d\,t} = c$, so kommt

$$d\,t = \frac{d\,r}{\sqrt{2\,(U+h) - \left(\frac{c}{r}\right)^2}},$$

und durch Integration

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{d\,r}{\sqrt{2\,(U+h) - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \tag{17}$$

womit die Zeit als Funktion des Fahrstrahles bestimmt ist. Durch Umkehrung dieser Formel lässt sich auch r als Funktion von t, sodann mit (12) ϑ als Funktion von t darstellen.

Unter den Perpendikeln, welche von dem Centrum auf die Bahntangenten gefällt werden können, kann es auch solche geben, die die Tangenten in ihren Berührungspunkten treffen, also mit den Fahrstrahlen der fraglichen Curvenpunkte zusammenfallen, dann ist jeder dieser Fahrstrahlen eine Normale auf die Bahn, der Berührungspunkt wird in diesem Falle Abside, der Radiusvektor Absidallinie oder Absidaldistanz genannt. Damit ein Fahrstrahl senkrecht auf der Bahn stehe, muss $p = r$ sein, und weil dann $\frac{1}{p^2} = u^2 = u^2 + \left(\frac{d\,u}{d\,\vartheta}\right)^2$, haben wir als Bedingung des Senkrechtstehens $\frac{d\,u}{d\,\vartheta} = 0$, oder $\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = 0$. Der Winkel, welchen der Radiusvektor beschreibt, wenn der die Bahn erzeugende Punkt von einer Abside bis zur nächsten läuft, wird Absidalwinkel genannt. Jede Absidallinie zerlegt die Bahn in zwei congruente, symmetrische Teile. Es können höchstens nur zwei verschiedene Absidaldistanzen vorhanden sein. Alle Absidalwinkel sind einander gleich. Absiden sind solche Bahnpunkte, welche der Bedingung genügen, dass das entsprechende r ein Maximum oder ein Minimum ist. Solche Bahnen, welche asymptotische Kreise haben, oder durch das Centrum gehen, machen im allgemeinen eine Ausnahme von diesen Regeln.

Ist die Beschleunigung eine Funktion der Entfernung, so kann eine Bahn um ein festes Centrum unter folgenden Umständen nicht beschrieben werden: 1) Wenn die vom Centrum auf die Bahn fällbaren Normalen von ungerader Zahl und diese grösser als Eins ist. 2) Wenn mehr als zwei ungleiche Normalen vom Centrum aus gezogen werden können. 3) Wenn eine jede solche Normale die Curve nicht in zwei congruente, symmetrische Teile zerlegt. 4) Wenn das Centrum ein Punkt der Evolute ist, ausgenommen den Fall des Kreises.

Wird ein Punkt gleichzeitig nach mehreren in derselben Ebene liegenden Centren beschleunigt, sind v_1, v_2, v_3, ... die Geschwindigkeiten, welche sich ergeben beim Durchfallen des vierten Teiles jeder der durch das betreffende Centrum gehenden Krümmungssehnen, dann ist die Geschwindigkeit des Punktes gegeben durch $v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2 + \dots$. Nehmen wir einen beliebigen Punkt in der Bewegungsebene als Ursprung der Coordinaten, lassen φ_1, φ_2, φ_3, ... die Beschleunigungen, a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; .... die Coordinaten ihrer Centren, χ_1, χ_2, χ_3, ... die entsprechenden Krümmungssehnen sein, dann ist

$$v_1{}^2 = 2\,\varphi_1 \frac{\chi_1}{4}, \quad v_2{}^2 = 2\,\varphi_2 \frac{\chi_2}{4}, \quad v_3{}^2 = 2\,\varphi_3 \frac{\chi_3}{4}, \dots$$

auch sind die Bewegungsgleichungen, wenn $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Abstände des Punktes von den einzelnen Centren zur Zeit t bezeichnen,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi_1 \frac{x-a_1}{r_1} - \varphi_2 \frac{x-a_2}{r_2} - \varphi_3 \frac{x-a_3}{r_3} - \cdots \qquad (\alpha)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\varphi_1 \frac{y-b_1}{r_1} - \varphi_2 \frac{y-b_2}{r_2} - \varphi_3 \frac{y-b_3}{r_3} - \cdots \qquad (\beta)$$

Nun seien $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Perpendikel von den Centren auf die Tangente der Bahn; ferner sei s die Länge des in der Zeit t beschriebenen Bahnbogens, ϱ der Krümmungshalbmesser im Endpunkte von s. Multiplizieren wir (α) mit $\frac{dy}{dt}$, (β) mit $\frac{dx}{dt}$ und subtrahieren das letztere Resultat von dem ersteren, so ist der Zähler des Bruches, welcher r_1 zum Nenner hat,

$$(x-a_1)\frac{dy}{dt} - (y-b_1)\frac{dx}{dt} = (x-a_1)\frac{d}{dt}(y-b_1) - (y-b_1)\frac{d}{dt}(x-a_1)$$
$$= p_1 \frac{ds}{dt}.$$

Folglich haben wir

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} = -\varphi_1 \frac{p_1 \frac{ds}{dt}}{r_1} - \varphi_2 \frac{p_2 \frac{ds}{dt}}{r_2} - \varphi_3 \frac{p_3 \frac{ds}{dt}}{r_3} - \cdots$$

$$\frac{v^3}{\varrho} = \left(\varphi_1 \frac{p_1}{r_1} + \varphi_2 \frac{p_2}{r_2} + \varphi_3 \frac{p_3}{r_3} + \cdots\right) v,$$

$$v^2 = \varphi_1 \cdot \varrho \frac{p_1}{r_1} + \varphi_2 \cdot \varrho \frac{p_2}{r_2} + \varphi_3 \cdot \varrho \frac{p_3}{r_3} + \cdots = \Sigma \varphi_1 \varrho \frac{p_1}{r_1} = 2 \Sigma \varphi_1 \frac{\chi_1}{4}$$
$$= \Sigma v_1{}^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2 + \cdots$$

was zu beweisen war.

Die Resultate, zu denen wir durch die vorstehende Betrachtung gelangt sind, wollen wir hier zusammenstellen, sie ergaben sich aus den Grundgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi \frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\varphi \frac{y}{r}.$$

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \quad \text{(I)} \qquad v^2 = C - 2\int \varphi\, dr = v_0 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr \quad \text{(II)}$$

$$v^2 = c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\} \text{(III)} \qquad v^2 = \frac{c^2}{p^2} = \varphi p \frac{dr}{dp} \quad \text{(IV)}$$

$$v^2 = 2\varphi \frac{\text{Krümmungssehne}}{4} \quad \text{(V)} \qquad \varphi = \frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \right\} \quad \text{(VI)}$$

$$\varphi = \frac{c^2 dp}{p^3 dr} = -\frac{c^2}{2} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) \text{(VII)} \qquad \varphi = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2 r}{dt^2} \quad \text{(VIII)}$$

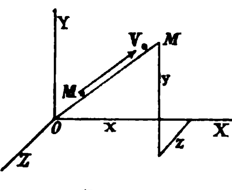
$$\vartheta-\vartheta_0=c\int_{r_0}^{r}\frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{2(U+h)-\left(\frac{c}{r}\right)^2}}\ \text{(IX)}\quad t-t_0=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{2(U+h)-\left(\frac{c}{r}\right)^2}}\ \text{(X)}$$

$$\frac{c^2}{p^2}=v_0{}^2-2\int_{r_0}^{r}\varphi\,dr.\quad \text{(XI)}$$

In diesen Formeln ist c die doppelte Fläche, welche der Radiusvektor der Bahn in der Zeiteinheit um das Centrum beschreibt, p das Perpendikel vom Centrum auf die Tangente der Bahn an derjenigen Stelle, welche der augenblicklichen Lage des sie erzeugenden Punktes entspricht, v die Geschwindigkeit daselbst, v_0 der Anfangswert von v, r_0 derjenige des Fahrstrahles r. Ist die Beschleunigung vom Centrum hinweg gerichtet, also repulsiv anstatt attraktiv, dann ist in diesen Formeln φ durch $-\varphi$ zu ersetzen.

Die Gleichungen (II), (III), (IV) sind Newton zu verdanken. (Principia, Lib. I, Prop. I. et Prop. 40.) Die Formel (VI) schreibt Ampère dem Binet zu (Annales de Gergonne, Tom. XX, p. 53). Die Gleichung (VII) wurde ohne Erklärung dem Johann Bernoulli durch De Moivre in dem Jahre 1705 mitgeteilt; ein Beweis dafür wurde ihm von Bernoulli in einem Briefe, datiert Basel, Februar 1706, zugeschickt. Die Formel (VIII) wurde eine geraume Zeit später von Clairaut (Théorie de la Lune, p. 2, von welcher die erste Ausgabe 1752 erschien) und Euler (Nov. Comment. Petrop. 1752, 1753, p. 164) bekannt gegeben.

1. Die Beschleunigung eines Punktes sei fortwährend nach einem festen Centrum O gerichtet und der Entfernung von diesem direkt proportional. Die Anfangslage des Punktes, seine Anfangsgeschwindigkeit und ihre Richtung seien bekannt. Welches ist die Bahn des Punktes?



Figur 40.

Wir wählen das Centrum O (Fig. 40) als Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes. lassen die Ebene der xy mit der Richtung $M_0\,V_0$ der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zusammenfallen, die Axe der y positiv vertikal aufwärts sein. x_0, y_0 seien die Coordinaten der Anfangslage M_0, a, b, 0 die Componenten der Geschwindigkeit v_0 parallel zu den Coordinatenaxen, x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Bahnpunktes M, r sei der Abstand des Punktes M, r_0 derjenige des Punktes M_0 vom Ursprunge.

Die Beschleunigung φ ist proportional der Entfernung; es muss einen Punkt geben, in welchem sie gleich der Fallbeschleunigung g ist. Die Entfernung ε dieses Punktes vom Centrum folgt aus der Relation $\varphi : g = r : \varepsilon$, so dass geschrieben werden kann $\varphi=\frac{r}{\varepsilon}g=k^2 r$, mit $\frac{g}{\varepsilon}=k^2$. Die Projektionen dieser Beschleunigung auf die Coordinatenaxen sind mit α, β, γ als Richtungswinkeln $k^2 r\cos\alpha$, $k^2 r\cos\beta$, $k^2 r\cos\gamma$, oder, weil $\cos\alpha=-\frac{x}{r}$,

$\cos\beta = -\frac{y}{r}, \cos\gamma = -\frac{z}{r}$, $-k^2 x$, $-k^2 y$, $-k^2 z$, so dass $X = -k^2 x$, $Y = -k^2 y$, $Z = -k^2 z$. Nun ist das die Bewegung des Punktes vollständig bestimmende Gleichungensystem:

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0, & \frac{dx}{dt} = v_x; & x = x_0, & v_x = a, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = 0, & \frac{dy}{dt} = v_y; & y = y_0, & v_y = b, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2 z = 0, & \frac{dz}{dt} = v_z; & z = 0, & v_z = 0, \end{array}\right\} \text{für } t = 0.$$

Die Anschreibung der Integrale der drei ersten Gleichungen und die Differentiation dieser Resultate giebt

$$\begin{array}{ll} x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt, & v_x = -k(A_1 \sin kt - B_1 \cos kt) \\ y = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt, & v_y = -k(A_2 \sin kt - B_2 \cos kt) \\ z = A_3 \cos kt + B_3 \sin kt, & v_z = -k(A_3 \sin kt - B_3 \cos kt). \end{array}$$

Die Anfangswerte berücksichtigend, finden wir für die Integrationskonstanten

$$A_1 = x_0,\ A_2 = y_0,\ A_3 = 0,\ \ B_1 = \frac{a}{k},\ B_2 = \frac{b}{k},\ B_3 = 0,$$

folglich sind die Coordinaten des Punktes und die Projektionen seiner Geschwindigkeit zur Zeit t

$$x = x_0 \cos kt + \frac{a}{k} \sin kt, \qquad y = y_0 \cos kt + \frac{b}{k} \sin kt, \qquad z = 0. \tag{1}$$

$$v_x = -x_0 k \sin kt + a \cos kt,\ \ v_y = -y_0 k \sin kt + b \cos kt,\ \ v_z = 0. \tag{2}$$

Daraus geht hervor, dass die Bewegung eine ebene, in der durch das Centrum und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit laufende Ebene stattfindende ist.

Die Gleichung der Bahn ergiebt sich durch Elimination der Zeit t aus den Gleichungen (1), dieselben liefern

$$b x = b x_0 \cos kt + \frac{ab}{k} \sin kt, \qquad a y = a y_0 \cos kt + \frac{ab}{k} \sin kt,$$

womit $\qquad (b x_0 - a y_0) \cos kt = b x - a y \quad (\alpha)$

und $\quad x y_0 = x_0 y_0 \cos kt + \frac{a}{k} y_0 \sin kt, \qquad y x_0 = x_0 y_0 \cos kt + \frac{b}{k} x_0 \sin kt,$

womit $\qquad (b x_0 - a y_0) \sin kt = -k(y_0 x - x_0 y) \quad (\beta).$

Werden die Seiten der Gleichungen (α) und (β) quadriert und die Resultate addiert, so kommt

$$(b x - a y)^2 + k^2 (y_0 x - x_0 y)^2 = (b x_0 - a y_0)^2,$$

oder $(b^2 + k^2 y^2) x^2 - 2(ab + k^2 x_0 y_0) xy + (a^2 + k^2 x_0{}^2) y^2 - (b x_0 - a y_0)^2 = 0.$

d. i. $\qquad A x^2 - B x y + C y^2 - F = 0.$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, denn es ist $B^2 - 4.A.C = -4k^2 (b x_0 - a y_0)^2$, und die Coordinaten x', y' des Curvenmittelpunktes sind

$$x' = \frac{2.C.D - B.E}{B^2 - 4.A.C} = 0, \quad y' = \frac{2.A.E - B.E}{B^2 - 4.A.C} = 0,$$

er fällt mit dem Centrum zusammen.

Bezeichnet ω den Winkel, welchen die Richtung der einen Hauptaxe mit der Abscissenaxe einschliesst, dann finden wir

$$tg\,2\,\omega = 2\,\frac{a\,b + k^2 x_0 y_0}{a^2 - b^2 + k^2(x_0^2 - y_0^2)} = \frac{v_0^2 \sin 2\,\alpha + k^2 r_0^2 \sin 2\,\beta}{v_0^2 \cos 2\,\alpha + k^2 r_0^2 \cos 2\,\beta}.$$

Mit $R^2 - 2\,(A + C)\,R - (B^2 - 4\,.\,A\,.\,C) = 0$, finden wir

$$R = v_0^2 + k^2 r_0^2 \pm \sqrt{(v_0^2 + k^2 r_0^2)^2 - 4\,k^2 v_0^2 r_0^2 \sin^2(\alpha - \beta)}.$$

Damit ist die Gleichung der Bahn für die Hauptaxen als Coordinatenaxen $\frac{x^2}{-2\,U'}\,R'$ $+ \frac{y^2}{-2\,U'}\,R'' = 1$, wo $U' = -(b\,x_0 - a\,y_0)^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2(\alpha - \beta)$, und es sind die Halbaxen der Bahn $\frac{v_0 r_0 \sin(\alpha - \beta)\sqrt{2}}{\{v_0^2 + k^2 r_0^2 \pm \sqrt{(v_0^2 + k^2 r_0^2)^2 - 4\,k^2 v_0^2 r_0^2 \sin^2(\alpha - \beta)}\}^{\frac{1}{2}}}$.

Die Geschwindigkeit v des Punktes folgt aus den Gleichungen (2), mit $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, sie bestimmt sich aber auch sehr leicht mittelst der sogenannten Kräftefunktion U. Im vorliegenden Falle ist $\frac{dU}{dx} = -k^2 x$, $\frac{dU}{dy} = -k^2 y$, also $U = -k^2 \frac{x^2}{2}, + C'$, und $U = -k^2 \frac{y^2}{2} + C''$, folglich $2\,U = -k^2(x^2 + y^2) + C = -k^2 r^2 + C$. Zu Anfang der Bewegung ist aber $x = x_0$, $y = y_0$, $r = r_0$, $U = U_0$, mithin $U - U_0 = \frac{k^2}{2}(r_0^2 - r^2)$, so dass $v^2 - v_0^2 = 2\,(U - U_0) = k^2(r_0^2 - r^2)$, oder $v^2 = v_0^2 + k^2(r_0^2 - r^2)$.

2. Bei einer Centralbewegung ist die Bahn des accelerierten Punktes eine gerade Linie. Welches ist das Beschleunigungsgesetz?

Figur 41.

Es sei (Fig. 41) CD die geradlinige Bahn, A das Centrum, welches wir als Pol des Coordinatensystemes wählen, AC die Polaraxe, $\sphericalangle\,ACD = \alpha$, $AC = r_0$ der Primradiusvektor, $AD = r$ der Fahrstrahl nach dem beliebig gelegenen Punkte, der Polarwinkel $CAD = \vartheta$. Beachten wir, dass $AC : AD = \sin \sphericalangle\,ADC : \sin \sphericalangle\,ACD$, also $r_0 : r = \sin(\alpha + \vartheta) : \sin\alpha$, dann ist die Polargleichung der Bahn

$$r = \frac{r_0 \sin\alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)}, \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{r_0 \sin\alpha},$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach den Variablen r und ϑ giebt

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos(\alpha + \vartheta)}{r_0 \sin\alpha}, \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{r_0 \sin\alpha} = -\frac{1}{r},$$

und erhalten wir durch Einsetzung des letzteren Wertes in die Formel (VI)

$$\varphi = \frac{c^2}{r}\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = 0.$$

Daraus geht hervor, dass ein Punkt sich nur dann in einer geraden Linie bewegen kann, wenn ausserhalb dieser Geraden kein Beschleunigungscentrum vorhanden ist.

3. Ein Punkt bewegt sich infolge einer Centralbeschleunigung in einem Kreise, ihre Richtung geht durch den Mittelpunkt der Bahn. Welches ist das Beschleunigungsgesetz? Wie gross ist die Geschwindigkeit des Punktes? In welcher Zeit wird ein beliebiger Bogen der Bahn beschrieben?

Hier ist der Radiusvektor der Bahn konstant $= a$, also $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, folglich mit Formel (VI)

$$\varphi = \frac{c^2}{a^3}. \tag{1}$$

d. h. die Beschleunigung ist dem Kubus des Bahnhalbmessers umgekehrt proportional. Die Geschwindigkeit ergiebt sich mit v_0 als Anfangsgeschwindigkeit durch die Formel (II)

$$v^2 = v_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr = v_0^2 - 2\int_a^a \frac{c^2}{a^3}\, dr, \text{ d. i. } v = v_0. \tag{2}$$

Die Bewegung des Punktes im Kreise ist eine gleichförmige. Es ist aber auch nach (IV)

$$v = \frac{c}{p} = \frac{c}{a}, \qquad \text{mithin} \qquad c = a v_0. \tag{3}$$

Daher noch

$$\varphi = \frac{v^2}{a} = \frac{v_0^2}{a}. \tag{4}$$

Bei der Kreisbewegung ist die Beschleunigung direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Halbmesser der Bahn.

Die Zeit, welche vom Beginn der Bewegung bis zur Ankunft in einem beliebigen Bahnpunkte verfliesst, resultiert aus Formel (I), wir haben

$$dt = \frac{r^2}{c}\, d\vartheta, \qquad t = \frac{a^2}{c}\int_0^{\vartheta} d\vartheta = \frac{a^2}{c}\vartheta, \qquad t = \frac{a}{v_0}\vartheta. \tag{5}$$

Für einen vollen Umlauf des Punktes ist $\vartheta = 2\pi$, folglich die zu demselben erforderliche Zeit $T = \frac{2a\pi}{v_0}$.

An diese Aufgabe kann die Frage geknüpft werden: Mit welcher Geschwindigkeit muss vom Äquator der Erde aus ein Punkt in tangentialer Richtung geworfen werden, damit sich derselbe im Kreise rund um die Erde bewegt?

Die Beschleunigung nach dem Erdcentrum ist $\varphi = g = 9\cdot808$ Meter, der Erdhalbmesser $a = 6\,365\,000$ Meter annähernd, mithin durch (4) die gesuchte Geschwindigkeit $v = \sqrt{ga} = 7902$ Meter. Wird demnach der Punkt mit einer Geschwindigkeit abgeworfen, die kleiner als 7902 Meter ist, so fällt er auf die Erde zurück. Diese Geschwindigkeit ist nahezu 17mal so gross als die Rotationsgeschwindigkeit der Erde unter ihrem Äquator.

4. Ein Punkt bewegt sich in einer Ellipse infolge einer stets nach ihrem Mittelpunkte gerichteten Beschleunigung. Die Bewegung dieses Punktes soll untersucht werden.

Die Gleichung der Bahn ist, wenn ihr Mittelpunkt als Coordinatenursprung gewählt wird, a und b ihre Halbaxen bezeichnen,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2-r^2}{a^2b^2}, \quad \text{woraus folgt} \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = -\frac{2r}{a^2b^2};$$

es ist daher mit Formel (VII) das Beschleunigungsgesetz

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2b^2} r = \mu r, \quad \text{mit} \quad \frac{c^2}{a^2b^2} = \mu, \tag{1}$$

d. h. die Centralbeschleunigung ist direkt proportional dem Radiusvektor. Für die Geschwindigkeit v haben wir mit den oben angewendeten Bezeichnungen

$$v^2 = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \mu r\, dr, \quad v^2 = v_0{}^2 - \mu(r^2 - r_0{}^2). \tag{2}$$

Die Zeit t, innerhalb welcher der Punkt aus seiner Anfangslage bis zu einer beliebigen Stelle der Bahn gelangt, ergiebt sich mit (I) und der Polargleichung der Bahn, es

$$dt = \frac{r^2}{c} d\vartheta, \qquad r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta}, \qquad c = ab\sqrt{\mu},$$

folglich $dt = \frac{ab}{\sqrt{\mu}} \frac{d\vartheta}{a^2 \sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta}, \quad \int_{t_0}^{t} dt = \frac{ab}{\sqrt{\mu}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta},$

$$t = t_0 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left\{ arc\left(tg = \frac{a}{b} tg\, \vartheta\right) - arc\left(tg = \frac{a}{b} tg\, \vartheta_0\right) \right\}. \tag{3}$$

Wählen wir für die Anfangslage $t = 0$, berücksichtigen, dass für einen vollen Umlauf dann $\vartheta = 2\pi$, nennen T die Umlaufszeit, so ist $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. Dieses Resultat ist unabhängig von der Anfangslage des die Bahn beschreibenden Punktes, der Anfangsgeschwindigkeit und ihrer Richtung, sowie von der Grösse der Bahn. Weil hier das Prinzip der Flächen gilt, so ergiebt sich diese periodische Zeit auch wie folgt:

$$T = \frac{\text{Fläche der Bahn}}{\text{Fläche, beschrieben in der Zeiteinheit}} = \frac{2 \times \text{Fläche der Ellipse}}{c} = \frac{2\pi ab}{ab\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}. \tag{4}$$

Dadurch kann noch ein weiterer Ausdruck für die Beschleunigung gewonnen werden. Es ist nämlich mit (1) und (4)

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

5. Ein Punkt beschreibt eine gewöhnliche Hyperbel infolge einer Beschleunigung, deren Richtung stets durch den Bahnmittelpunkt geht. Welches ist das Beschleunigungsgesetz? Innerhalb welcher Zeit bewegt

sich der Punkt von einem Scheitel bis zu einer beliebigen Stelle der Bahn, und welches ist der von dem Radiusvektor in dieser Zeit beschriebene Winkel?

Die Polargleichung der Hyperbel lautet, mit ihrem Mittelpunkte als Pol und ihrer reellen Axe als Polaraxe,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{b^2 \cos^2\vartheta - a^2 \sin^2\vartheta}{a^2 b^2}. \tag{1}$$

Die Länge des vom Pole auf eine Bahntangente gefällten Perpendikels ist gegeben durch

$$\frac{1}{p^2} = \frac{b^2 - a^2 + r^2}{a^2 b^2}. \tag{2}$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{2r}{a^2 b^2}, \tag{3}$$

so dass mit (3) und (VII)

$$\varphi = -\frac{c^2}{a^2 b^2} r = -\mu r, \quad \text{wenn} \quad \frac{c^2}{a^2 b^2} = \mu \text{ gesetzt wird.} \tag{4}$$

Die Zeit, während welcher der Punkt von einem Scheitel bis zu einer beliebigen Stelle der Bahn fortrückt, resultiert aus der Formel (I), denn wir haben

$$r^2 d\vartheta = c\,dt = ab\sqrt{\mu}\,.\,dt,$$

folglich ist mit (1)

$$dt = \frac{ab}{\sqrt{\mu}} \frac{d\vartheta}{b^2 \cos^2\vartheta - a^2 \sin^2\vartheta},$$

und daher, wenn die Zeit von dem Momente an gerechnet wird, wo der Punkt den Scheitel der Bahn verlässt,

$$\int_0^t dt = \frac{ab}{\sqrt{\mu}} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{b^2 \cos^2\vartheta - a^2 \sin^2\vartheta}, \quad t = \frac{ab}{\sqrt{\mu}} \left\{ \frac{1}{2ab}\, l\, \frac{b + a\,tg\,\vartheta}{b - a\,tg\,\vartheta} + C \right\}_0^\vartheta,$$

so dass

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\, l\, \frac{b + a\,tg\,\vartheta}{b - a\,tg\,\vartheta}. \tag{5}$$

Aus (5) folgt, durch Übergang von dem Logarithmus zu den Zahlen, der von dem Radiusvektor in der Zeit t beschriebene Winkel, es ergiebt sich mit $2\sqrt{\mu} = \mu'$

$$tg\,\vartheta = \frac{b}{a} \frac{e^{\mu' t} - 1}{e^{\mu' t} + 1}. \tag{6}$$

Die Gleichung (4) zeigt, dass der Punkt nur dann eine Hyperbel beschreiben kann, wenn ihn die Beschleunigung vom Centrum abstösst. Wir haben mithin hier den umgekehrten Fall des vorhergehenden Problemes. Weil die Gleichung der Ellipse in diejenige der Hyperbel übergeht, wenn

$-b^2$ an die Stelle von b^2 gesetzt wird, und umgekehrt, so hätte hier die Beschleunigung φ auch dadurch erhalten werden können, dass in (1), Aufgabe 4, $-b^2$ für b^2 gesetzt worden wäre.

Ist die Hyperbel eine gleichseitige, also $b = a$, dann gehen die Resultate (4), (5), (6) über in

$$\varphi = -\frac{c^2}{a^4}r, \qquad t = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\, l\, \frac{1 + tg\,\vartheta}{1 - tg\,\vartheta}, \qquad tg\,\vartheta = \frac{e^{\mu' t} - 1}{e^{\mu' t} + 1}.$$

6. Ein Punkt bewegt sich in einem Kegelschnitte infolge einer Beschleunigung, deren Richtungslinie stets durch einen der Brennpunkte der Bahn läuft. Welches ist das Beschleunigungsgesetz?

Mit dem Brennpunkte als Pol, der reellen Axe als Polaraxe, p als Halbparameter, e als Verhältnis des wechselseitigen Abstandes der Brennpunkte zum wechselseitigen Abstande der Scheitel ist die Polargleichung der Curven zweiten Grades

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p}, \tag{1}$$

und die Curve entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem $e \lesseqgtr 1$ ist. Aus (1) folgt

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\sin\vartheta, \qquad \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\cos\vartheta,$$

und giebt die Substitution des letzteren Wertes in die Formel (VI)

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{e}{p}\cos\vartheta\right) = \frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}. \tag{2}$$

Demnach ist im vorliegenden Falle die Beschleunigung dem Quadrate des Fahrstrahles umgekehrt proportional. Mit $p = r$ geht der Kegelschnitt in einen Kreis über und bekommen wir die Gleichung (1) des dritten Problemes. Keppler fand durch Beobachtungen, dass die Bahnen der Planeten Ellipsen sind und in dem einen Brennpunkte derselben die Sonne ihren Sitz hat. Durch dieses sogenannte zweite Kepplersche Gesetz war es Newton möglich zu bestimmen, dass die Beschleunigung der Planeten durch die Sonne zu den Quadraten ihrer Entfernungen von der Sonne in umgekehrtem Verhältnisse steht.

7. Ein Punkt beschreibt die Lemniscate von Jakob Bernoulli. Das Beschleunigungscentrum fällt mit dem Knoten der Bahn zusammen. Welches ist das Beschleunigungsgesetz? In welcher Zeit durchläuft der Punkt ein Oval der Curve?

Die Polargleichung der Lemniscate ist $r^2 = a^2\cos 2\vartheta$, womit sich ergiebt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\vartheta}}, \quad \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sin 2\vartheta}{a\cos^{\frac{3}{2}} 2\vartheta}; \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3}{a\cos^{\frac{5}{2}} 2\vartheta} - \frac{1}{a\cos^{\frac{1}{2}} 2\vartheta},$$

so dass $$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{3}{a\cos^{\frac{5}{2}}2\vartheta}=\frac{3a^4}{r^5}.$$
Mithin ist vermöge der Formel (V)
$$\varphi=\frac{3c^2a^4}{r^7}=\frac{\mu}{r^7}, \quad \text{mit} \quad \mu=3c^2a^4. \tag{1}$$
Die Beschleunigung ist daher in diesem Falle der siebenten Potenz der Poldistanz des Punktes umgekehrt proportional.

Die verlangte periodische Zeit T erhalten wir mittelst der Formel (I). Es ist
$$c\,dt=r^2\,d\vartheta=a^2\cos 2\vartheta\,d\vartheta,$$
daher
$$T=\frac{a^2}{c}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\cos 2\vartheta\,d\vartheta=\frac{a^2}{c}=a^4\sqrt{\frac{3}{\mu}}. \tag{2}$$
Walton, p. 265.

8. Ein Punkt bewegt sich in einer gleichwinkeligen (logarithmischen) Spirale infolge einer nach dem Pole gerichteten Beschleunigung. Welches ist das Beschleunigungsgesetz? Wie gross ist die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn?

Bezeichnet β den unveränderlichen Winkel, r den Fahrstrahl, p die Länge des von dem Pole auf die Bahntangente gefällten Perpendikels, so ist
$$p=r\sin\beta. \tag{1}$$
Daraus folgt $\frac{dp}{dr}=\sin\beta$, so dass mit Formel (VII)
$$\varphi=\frac{c^2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr}=\frac{c^2}{p^3}\sin\beta=\frac{c^2}{r^3\sin^2\beta}. \tag{2}$$
Bezeichnet v_0 die dem Radiusvektor r_0 entsprechende Geschwindigkeit des Punktes, dann ist bekanntlich $c=v_0r_0\sin\beta$, mithin auch, durch Substitution dieses Wertes von c in (2),
$$\varphi=\frac{v_0^2r_0^2}{r^3}. \tag{3}$$
Die Geschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle der Bahn ergiebt sich mittelst der Gleichungen (IV), (I) und dem Werte von c; wir erhalten
$$v=\frac{c}{p}=\frac{v_0r_0\sin\beta}{r\sin\beta}=\frac{v_0r_0}{r}, \tag{4}$$
sie ist demnach dem Fahrstrahle des fraglichen Bahnpunktes umgekehrt proportional.
Walton, p. 265.

9. Ein Punkt bewegt sich mit einer Beschleunigung $\varphi=\pm\mu r$, die also dem Abstande desselben vom Centrum direkt proportional ist, in einer gewissen Curve. Welche Bahn beschreibt dieser Punkt?

Am einfachsten gelangen wir zur Kenntnis der Bahn auf folgende Weise. Nach Formel (VII) ist

$$\varphi = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \pm\, \mu r,$$

so dass
$$\frac{c^2}{p^2} = C \mp \mu r^2. \tag{1}$$

Nun ist die Polargleichung der Ellipse, mit ihrem Mittelpunkte als Pol,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{a^2 b^2},$$

daher auch
$$\frac{c^2}{p^2} = \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) - \frac{c^2}{a^2 b^2} r^2, \tag{2}$$

und die entsprechende Gleichung der Hyperbel

$$\frac{1}{p^2} = \frac{b^2 - a^2 + r^2}{a^2 b^2},$$

daher auch
$$\frac{c^2}{p^2} = \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) + \frac{c^2}{a^2 b^2} r^2. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) ist konform mit der Gleichung (1), wenn das obere, die (3) mit (1) wenn das untere Zeichen gilt. Folglich ist die Bahn eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die Beschleunigung attraktiv oder repulsiv wirkt.

Das rationellere Verfahren ist etwas umständlicher. Eine bequeme Differentialgleichung für die Bahn erhalten wir durch Verknüpfung der Gleichungen (II) und (III) für die Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahnpunkte, nämlich durch

$$2\int \varphi\, dr = C - c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\vartheta}\cdot\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\}.$$

Im vorliegenden Falle ist nun $\varphi = \pm\, \mu r$, und wenn wir zunächst das obere Zeichen berücksichtigen, demnach

$$2\int \mu r\, dr = C - c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\vartheta}\cdot\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\},$$

$$\mu r^2 + C' = C - c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\vartheta}\cdot\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\},$$

oder, mit $C - C' = 2c'$,

$$\mu r^2 = 2c' - c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\vartheta}\cdot\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung für $\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right)$ giebt

$$\pm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta} = \sqrt{-\frac{\mu}{c^2} r^2 - \frac{c^2}{r^2} + 2c'},$$

folglich ist
$$d\vartheta = \frac{\pm\, d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{-\frac{\mu}{c^2} r^2 - \frac{c^2}{r^2} + 2c'}}.$$

Schreiben wir hier $\left(\frac{1}{r}\right)^2 = z$, also $r^2 = \frac{1}{z}$, $d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$, so kommt nach einer kleinen Reduktion

$$\pm 2\,d\vartheta = \frac{dz}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2} - (c'-z)^2}} = \frac{dz}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}(c'-z)^2}},$$

$\frac{1}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}}(c'-z) = u$, also $dz = -du\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}$ gesetzt, giebt

$$\pm 2\,d\vartheta = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}},$$

und die Integration

$$\pm 2(\vartheta - \alpha) = arc\,(cos = u) = arc\left\{cos = \frac{c'-z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}}\right\},$$

wo α eine willkürliche Konstante bedeutet, die mittelst der Anfangswerte von r und ϑ bestimmt werden kann. Zählen wir die Winkel von der Richtung an, welche den Winkel α mit der Axe bildet, dann ist ϑ für $(\vartheta - \alpha)$ zu setzen und die Gleichung der Bahn geht über in

$$\frac{c'-z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}} = cos\,2\,\vartheta,$$

die für z aufgelöst giebt

$$z = c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\,cos\,2\,\vartheta = c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\,(cos^2\vartheta - sin^2\vartheta) = \frac{1}{r^2}.$$

Durch Multiplikation mit $r^2 = x^2 + y^2$ und $r^2 cos^2\vartheta = x^2$, $r^2 sin^2\vartheta = y^2$ wird jetzt

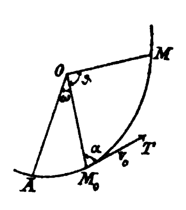
$$c'(x^2+y^2) - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\,(x^2 - y^2) = 1,$$

oder

$$\left(c' + \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right)y^2 + \left(c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right)x^2 = 1.$$

Daraus geht hervor, dass die Bahn eine Linie zweiten Grades, und zwar eine Ellipse, wenn μ positiv ist, für welche die Gleichung angeschrieben wurde, oder eine Hyperbel, wenn μ negativ ist, denn dann wird der Coëfficient von x^2 negativ. Im letzteren Falle ist die Bewegung keine wiederkehrende, der Punkt bleibt immer auf demselben Hyperbelzweige.

Die Grösse und Lage der von dem Punkte beschriebenen Bahn kann auch auf eine andere Weise bestimmt werden. Es bewege sich der Punkt mit einer bekannten Anfangsgeschwindigkeit v_0 von gegebener Richtung und die von ihm beschriebene Bahn sei eine Ellipse.



Figur 42.

Die Bewegung erfolge um das Centrum O (Fig. 42). M_0 sei der Anfangspunkt der Bewegung, $M_0 T$ die Richtung von v_0, welche mit dem Fahrstrahle $OM_0 = r_0$ den Winkel α einschliesse, OA die Lage der grossen Halbaxe der Bahn, $OM = r$ ein beliebiger Fahrstrahl, $\sphericalangle M_0 OA = \omega$, $\sphericalangle M_0 OM = \vartheta$, OA die Richtung der Polaraxe. Damit ist die Gleichung der Bahn, wenn a und b ihre Halbaxen sind,

$$\frac{r^2 \cos^2(\vartheta + \omega)}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2(\vartheta + \omega)}{b^2} = 1.$$

Wir haben die Bahnelemente a, b und ω zu bestimmen, von den ersten zwei ist die Grösse, von dem letzteren die Lage der Bahn abhängig.

1) Die Grösse der Bahn. Die Geschwindigkeit des Punktes ist $v = \frac{c}{p}$, im vorliegenden Falle $\frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{a^2 b^2}$, daher, wie oben,

$$v^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) - \frac{c^2}{a^2 b^2} r^2,$$

und mithin für die Anfangslage des Punktes

$$v_0^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) - \frac{c^2}{a^2 b^2} r_0^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - \mu r_0^2 = \frac{c^2}{r_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Dadurch haben wir die zwei Gleichungen

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = v_0^2 + \mu r_0^2, \qquad \text{und} \qquad a^2 b^2 = \frac{c^2}{\mu}.$$

Diese beiden Gleichungen mit einander multipliziert und die resultierende Gleichung mit c^2 dividiert giebt

$$a^2 + b^2 = \frac{v_0^2}{\mu} + r_0^2.$$

Ferner ist
$$2ab = \frac{2c}{\sqrt{\mu}} = \frac{2 v_0 r_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}},$$

Aus den zwei letzten Relationen folgt

$$a+b = \sqrt{\frac{v_0^2}{\mu} + r_0^2 + \frac{2 v_0 r_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}}} = m, \quad a-b = \sqrt{\frac{v_0^2}{\mu} + r_0^2 - \frac{2 v_0 r_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}}} = n,$$

folglich ist $\quad 2a = m + n, \qquad 2b = m - n,$

womit die Hauptaxenlängen gefunden sind.

2) Die Lage der Bahn. Der Winkel ω, welchen die Halbaxe OA mit dem Radiusvektor der Anfangslage des Punktes einschliesst, bestimmt sich, weil jetzt a und b bekannt sind, durch die Bahngleichung. Für den Fahrstrahl der Anfangslage ist $\vartheta = 0$, daher

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \omega}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \omega}{b^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt für den Winkel ω nach einer kleinen Rechnung

$$\cos 2\omega = \frac{\mu r_0^2 + v_0^2 \cos 2\alpha}{\sqrt{v_0^4 + \mu^2 r_0^4 + 2\mu v_0^2 r_0^2 \cos 2\alpha}},$$

und wenn die Cotangente eingeführt wird, so ergiebt sich die weitere Relation

$$\operatorname{cotg} 2\omega = \operatorname{cotg} 2\alpha + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} \operatorname{cosec} \alpha,$$

womit die Lage der Bahn bekannt ist.

Ist OD der zu OM_0 konjugierte Halbdiameter, dann ist infolge der Eigenschaft der Ellipse

$$r_0^2 + \overline{OD}^2 = a^2 + b^2 = r_0^2 + \frac{v_0^2}{\mu},$$

mithin $\quad OD = \frac{v_0}{\sqrt{\mu}}, \quad$ oder $\quad v_0 = \sqrt{\mu} \cdot OD.$

Hieraus geht hervor, dass die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn, denn jeder Bahnpunkt kann als Anfangslage des beweglichen Punktes genommen werden, proportional der Länge des entsprechenden konjugierten Diameters ist.

Die hier behandelte Aufgabe wurde bereits mit Hilfe rechtwinkeliger Coordinaten für $\varphi = \mu r$ gelöst. (Siehe Problem 1. dieses Abschnittes). Es ist dann

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\mu x, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = -\mu y,$$

$$x = x_0 \cos \sqrt{\mu}\, t + \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}\, t, \qquad y = y_0 \cos \sqrt{\mu}\, t + \frac{b}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}\, t,$$

wo $a = -v_0 \cos \alpha$, $b = -v_0 \sin \alpha$, oder, wenn wir den Anfangspunkt der Bewegung so wählen, dass $x_0 = r_0$, $y_0 = 0$,

$$x = r_0 \cos \sqrt{\mu}\, t - \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}\, t, \qquad y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}\, t.$$

Durch Elimination von t zwischen den beiden letzten Relationen ergiebt sich die Bahngleichung

$$v_0^2 (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + \mu r_0^2 y^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha,$$

oder $\quad (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} y^2 = r_0^2 \sin^2 \alpha.$

Die Projektionsgeschwindigkeiten sind

$$v_x = -r_0 \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t - v_0 \cos \alpha \cos \sqrt{\mu}\, t, \qquad v_y = v_0 \sin \alpha \cos \sqrt{\mu}\, t.$$

Diese Gleichungen geben eine vollständige Lösung der Aufgabe. Die Werte von x und y ändern sich periodisch, die Dauer der Periode ist für beide dieselbe. — Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird die Ellipse zu einem Kreise.

Ist μ negativ, dann geht die Ellipse in eine Hyperbel mit demselben Mittelpunkte über; als Gleichungen der Bahncoordinaten finden wir, von den goniometrischen Grössen zu den Exponentialgrössen übergehend,

$$x = \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos \alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{\sqrt{\mu}\, t} + \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos \alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{-\sqrt{\mu}\, t},$$

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha}{2\sqrt{\mu}}\left(e^{\sqrt{\mu}\,t} - e^{-\sqrt{\mu}\,t}\right).$$

Die Coordinaten erreichen hier ihre Maximalwerte von $t = \infty$; es würde der Punkt eine unendlich grosse Zeit nötig haben, um denjenigen Hyperbelzweig zu durchlaufen, auf dem er sich beim Beginn der Bewegung befindet.

Schlömilch, Analyt. Mechanik. B. II. S. 5.
Earnshaw, Dynamics, p. 97 et seq.

10. Ein Punkt bewegt sich vermöge einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen und nach dem Centrum gerichteten Beschleunigung. (Newton's Gesetz, Planetenbewegung.) Die Bewegung dieses Punktes soll erforscht werden.

Erste Lösung.

Bezeichnet μ die Acceleration in der Einheit der Entfernung, so ist $\varphi = -\frac{\mu}{r^2}$ die Centralbeschleunigung des Punktes, zwischen ihr und seiner Geschwindigkeit besteht die Beziehung

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{\mu}{r^2}. \tag{1}$$

Daraus folgt durch Integration und mit Beachtung der Formel (IV)

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + C = \frac{c^2}{p^2}. \tag{2}$$

Nun ist die Gleichung eines Kegelschnittes, mit einem der Brennpunkte als Pol, wenn a und b seine Halbaxen sind,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2a}{b^2}\cdot\frac{1}{r} \mp \frac{1}{b^2}, \tag{3'}$$

so dass auch

$$\frac{c^2}{p^2} = \frac{2ac^2}{b^2}\cdot\frac{1}{r} \mp \frac{c^2}{b^2}. \tag{3}$$

Das letzte Glied der rechten Seite der Gleichung (3′) ist negativ, positiv oder verschwindet, je nachdem der Kegelschnitt einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel angehört. Die Gleichung (3) ist genau von derselben Form wie die Gleichung (2), folglich ist die von dem Punkte beschriebene Bahn stets ein Kegelschnitt, von welchem der eine Brennpunkt das Beschleunigungscentrum ist. Die Art des Kegelschnittes hängt von der Beschaffenheit der Integrationskonstanten C ab.

Art, Grösse und Lage der Bahn. Der Punkt bewege sich von einem gewissen Orte M_0 aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0, deren Richtung mit dem Radiusvektor $OM_0 = r_0$, wobei O das Centrum bedeutet, den Winkel α einschliessen möge.

Die Polargleichung des Kegelschnittes $A M_0 M$ (Fig. 42, S. 136) ist, wenn der Focus O Pol, die Hauptaxenrichtung OA Polaraxe ist,

$$r = \frac{\pm a(1-e^2)}{1+e\cos(\vartheta+\omega)} = \frac{b^2}{a\{1+e\cos(\vartheta+\omega)\}}, \tag{4}$$

und haben wir zu bestimmen a, e oder b, und ω.

Die Art der Bahn ergiebt sich wie folgt. Die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn drückt die Gleichung (2) aus, so dass für die Geschwindigkeit v_0 die Relation besteht

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} + C = \frac{c^2}{r_0^2 \sin^2\alpha}, \tag{5'}$$

woraus $$C = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \tag{5}$$

Mit diesem Werte der Integrationskonstanten ist durch (2) die Gleichung der Bahn

$$\frac{c^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r_0} + \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right), \tag{6}$$

und es ist dieselbe eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $v_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}$ ist.

Die Grösse der Bahn soll nur unter der Annahme bestimmt werden, dass sie eine Ellipse ist.

Aus (2) und (3) folgt

$$\mu = \frac{ac^2}{b^2}, \qquad \text{und} \qquad C = -\frac{c^2}{b^2}. \tag{7}$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den Relationen (5) giebt

$$\frac{\mu b^2}{a} = c^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha, \qquad \text{und} \qquad \frac{2\mu}{r_0} - v_0^2 = \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha}{b^2}, \tag{8}$$

und folgt hieraus für die Grösse der Bahn

$$\text{der Parameter } \left(=\frac{2b^2}{a}\right) = \frac{2 v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha}{\mu}, \tag{9}$$

$$\text{die kleine Halbaxe } (=b) = \frac{v_0 r_0 \sin\alpha}{\sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}}, \tag{10}$$

$$\text{die grosse Halbaxe } (=a) = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}}. \tag{11}$$

Weiter ist die Lage der grossen Axe zu ermitteln. Für den Anfangspunkt der Bewegung ist $\vartheta = 0$, $r = r_0$, folglich durch (4) und (8)

$$r_0 = \frac{b^2}{a(1+e\cos\omega)} = \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha}{\mu(1+e\cos\omega)},$$

womit wir erhalten

$$\cos\omega = \frac{1}{e}\left(\frac{v_0{}^2 r_0{}^2}{\mu}\sin^2\alpha - 1\right). \tag{12}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir den Winkel ω berechnen, denn $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ist gegeben, da a und b bekannt sind.

Bei der parabolischen Bahn ist $e = 1$, $v_0{}^2 r_0{}^2 = 2\mu$, mithin

$$\cos\omega = 2\sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha = \cos(180^0 \pm 2\alpha),\quad \omega = 180^0 \pm 2\alpha. \tag{13}$$

Wenn es sich für den Fall einer Ellipse oder Hyperbel nötig machen sollte, e zu eliminieren, so würden wir finden

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{tg}\alpha \sim \frac{2\mu}{v_0{}^2 r_0{}^2}\operatorname{cosec} 2\alpha. \tag{14}$$

Die Art des von dem beschleunigten Punkte beschriebenen Kegelschnittes ist nur von den relativen Werten der Grössen $v_0{}^2$ und $\frac{2\mu}{r_0}$ abhängig, nicht auch von der Richtung der Geschwindigkeit v_0. Der Ausdruck für die grosse Halbaxe enthält den Winkel α nicht, folglich wird die Länge der grossen Axe unveränderlich sein, so lange als die Geschwindigkeit v_0 und die Entfernung der Anfangslage des Punktes vom Centrum dieselben sind.

Der Ausdruck für das Quadrat der Excentricität e ist

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha}{\mu^2}\left(\frac{2\mu}{r_0} - v_0{}^2\right),$$

oder

$$e^2 = \cos^2\alpha + \left(1 + \frac{v_0{}^2 r_0}{\mu}\right)^2 \sin^2\alpha.$$

Für eine Kreisbahn ist die Excentricität gleich Null. Aber der zuletzt für e gegebene Ausdruck kann nur dann verschwinden, wenn — da er aus der Summe zweier Quadrate besteht — jedes seiner Glieder für sich gleichzeitig Null ist, mithin haben wir, damit der Punkt eine Kreisbahn beschreiben kann, die zwei Bedingungen

$$0 = \cos^2\alpha, \quad \text{und} \quad 0 = \left(1 - \frac{v_0{}^2 r_0}{\mu}\right)^2 \sin^2\alpha,$$

oder

$$\alpha = 90^0, \quad \text{und} \quad v_0{}^2 = \frac{\mu}{r_0}.$$

Bestimmung der Zeit t, welche verfliesst während des Durchlaufens eines beliebigen Bogens der Bahn, gerechnet von der Abside der kleineren Absidaldistanz.

In dem Falle, wo die Bahn eine Ellipse ist, kann die periodische Umlaufszeit T so gefunden werden, wie dieses bei der Behandlung der Aufgabe 4 geschehen ist. Wir haben einfach

$$T = \frac{2 \times \text{Fläche der Ellipse}}{c} = 2\pi a b : \sqrt{\frac{b^2}{a}\mu} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Diese Zeit ist nur abhängig von der Länge der grossen Axe, ganz unabhängig von der Richtung der Geschwindigkeit v_0.

Bewegt sich der Punkt in einer Ellipse, dann bestimmt sich die Zeit, während welcher der Fahrstrahl einen gegebenen Winkel ϑ beschreibt, die nähere Abside als Anfangslage genommen, wie folgt. Die Gleichung der Bahn ist und durch das Prinzip der Flächen haben wir

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e\cos\vartheta)}, \qquad \frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{c} = \frac{b^4}{a^2 c}\frac{1}{(1 + e\cos\vartheta)^2},$$

so dass $\quad t = \frac{b^4}{a^2 c}\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + \cos\vartheta)^2}.$

Setzen wir $\int \frac{d\vartheta}{(1 + \cos\vartheta)^2} = \frac{A\sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta} + \int \frac{B\,d\vartheta}{1 + e\cos\vartheta},$

differentiieren die beiden Seiten dieser Gleichung, reduzieren die Resultate auf einen gemeinschaftlichen Nenner und gleichen die Zähler, so bekommen wir

$$1 = (A + Be)\cos\vartheta + Ae + B, \quad 0 = A + Be, \text{ und } 1 = Ae + B,$$

folglich $\quad A = -\frac{e}{1 - e^2}, \quad B = \frac{1}{1 - e^2}.$

Daher ist $\quad t = \frac{b^4}{a^2 c}\left\{\frac{-e\sin\vartheta}{(1 - e^2)(1 + e\cos\vartheta)} + \frac{1}{1 - e^2}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{1 + e\cos\vartheta}\right\}.$

Nun haben wir

$$\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{1 + e\cos\vartheta} = \int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) + e\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \int_0^{\vartheta}\frac{\sec^2\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{(1 + e) + (1 - e)\,tg^2\frac{\vartheta}{2}} = 2\int_0^{\vartheta}\frac{\frac{d}{d\vartheta}\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)}{(1 + e) + (1 - e)\,tg^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}}\,arc\left(tg = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\,tg\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Mithin erhalten wir für die gesuchte Zeit

$$t = -\frac{b^2}{c}\frac{e\sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta} + \frac{2ab}{c}\,arc\left(tg = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\,tg\frac{\vartheta}{2}\right),$$

oder, weil $c = b\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ ist,

$$t = -b\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} + 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\, arc\left(tg = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, tg\frac{\vartheta}{2}\right). \quad (15)$$

Bewegt sich der Punkt in einer Hyperbel, und handelt es sich um dieselbe Zeit, dann gelangen wir wie vorhin zu der Gleichung für t; es ist aber jetzt $e > 1$, und

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{1+e\cos\vartheta} = 2\int_0^\vartheta \frac{\frac{d}{d\vartheta}\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)}{(e+1)-(e-1)\,tg^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\, l\,\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\,tg\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\,tg\frac{\vartheta}{2}},$$

folglich $$t = -b\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\, l\,\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\,tg\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\,tg\frac{\vartheta}{2}}. \quad (16)$$

Findet die Bewegung des Punktes in einer Parabel, von deren Scheitel aus, statt, so ist $r_0 = m$, wenn $4m$ den Parameter der Curve bezeichnet, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, folglich

$$c = v_0 r_0 = \sqrt{2\mu r_0} = \sqrt{2\mu m}, \text{ weil } v_0{}^2 = \frac{2\mu}{r_0},$$

und die Gleichung der Bahn ist $r = \frac{m}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}$.

Daher erhalten wir mittelst der Formel (I)

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{c} = \frac{m^2}{c\cos^4\frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{\frac{m^3}{2\mu}}\sec^4\frac{\vartheta}{2} = 2\sqrt{\frac{m^3}{2\mu}}\frac{d}{d\vartheta}\,tg\frac{\vartheta}{2}\left(1+tg^2\frac{\vartheta}{2}\right),$$

und es ergiebt sich durch Integration, da gleichzeitig $t = 0$, $\vartheta = 0$,

$$t = 2\sqrt{\frac{m^3}{2\mu}}\left(tg\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{\vartheta}{2}\right). \quad (17)$$

Earnshaw, Dynamics.

Zweite Lösung.

Die Geschwindigkeit v des die Bahn beschreibenden Punktes ist gegeben durch die Doppelgleichung

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C - 2\int\varphi\, dr, \quad (1)$$

und durch das Prinzip der Flächen ist

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c. \tag{2}$$

Die Elimination des Zeitelementes dt aus diesen Gleichungen giebt

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta}\right\}^2\right] = C - 2\int \varphi \, dr. \tag{3}$$

Diese Gleichung enthält nur r und ϑ als veränderliche Grössen, sie stellt sonach die Polargleichung der Bahn dar. Nun erhalten wir durch Einführung des Wertes der Beschleunigung $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$ in die (3)

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta}\right\}^2\right] = C - 2\int \frac{\mu}{r^2} dr = C + 2\frac{\mu}{r} - 2c_1, \tag{4}$$

wo c_1 die Integrationskonstante bezeichnet und $= \frac{\mu}{r_0}$ sein würde, wenn das Integral zwischen den Grenzen r_0 und r zu nehmen wäre. Mit $C - 2c_1 = c'$, und $\frac{1}{r} = u$, also $dr = \frac{du}{u^2}$ geht die (4), wenn sie für $d\vartheta$ aufgelöst wird, über in

$$d\vartheta = \frac{\pm c\,du}{\sqrt{c' + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(cu - \frac{\mu}{c}\right)^2}}. \tag{5}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$c' + \frac{\mu^2}{c^2} = c'', \qquad cu - \frac{\mu}{c} = w, \tag{5'}$$

so kommt

$$d\vartheta = \frac{\pm dw}{\sqrt{c''^2 - w^2}}.$$

Wachsen ϑ und r gleichzeitig, dann nehmen u und w gleichzeitig ab, so dass bei dieser Annahme $d\vartheta$ und dw entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Die Integration der Gleichung

$$d\vartheta = \frac{-dw}{\sqrt{c''^2 - w^2}},$$

giebt

$$\vartheta - \vartheta' = arc\left(cos = \frac{w}{c''}\right),$$

wobei die Integrationskonstante durch ϑ' bezeichnet ist, und es wird durch den Übergang vom Bogen zu dem Cosinus

$$cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{w}{c''}. \tag{6}$$

Wenn ϑ und r sich im entgegengesetzten Sinne ändern, dann müssen $d\vartheta$

und dw gleiche Zeichen erhalten; es ist in diesem Falle die zu integrierende Gleichung

$$-d\vartheta = \frac{-dw}{\sqrt{c''^2 - w^2}},$$

welche mit ϑ'' als der Integrationskonstanten giebt

$$-\vartheta + \vartheta'' = arc\left(cos = \frac{w}{c''}\right)$$

oder

$$cos(-\vartheta+\vartheta'') = cos(\vartheta - \vartheta'') = \frac{w}{c''}. \qquad (7)$$

Setzen wir $w = c''$, dann folgt aus (6) und (7), sowie aus (5')

$$\vartheta = \vartheta' = \vartheta'', \quad \text{und} \quad u = \frac{\mu + \sqrt{c'c^2 + \mu^2}}{c^2} = \frac{1}{r}.$$

Derselbe Wert von u resultiert auch aus (3), wenn daselbst $\frac{du}{d\vartheta} = 0$ gesetzt wird, und ist er ein Maximum, also der entsprechende Wert von r ein Minimum. Mithin haben wir für den kleinsten Fahrstrahl r_0 die Relation

$$r_0 = \frac{c^2}{\mu + \sqrt{c'c^2 + \mu^2}}.$$

Rechnen wir nun den Polarwinkel $\vartheta - \vartheta' = \psi$, wofür wir aber in der Folge das Zeichen ϑ gebrauchen wollen, von diesem kleinsten Radiusvektor aus, dann geben die Gleichungen (6) und (7) zugleich

$$w = c'' \, cos \, \vartheta,$$

oder, indem wir die Werte von w und c'' aus (5') substituieren,

$$cu - \frac{\mu}{c} = \sqrt{c' + \frac{\mu^2}{c^2}} \, cos \, \vartheta$$

und wenn weiter $u = \frac{1}{r}$ gesetzt, so wie diese Gleichung für r aufgelöst wird

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{c'c^2}{\mu^2}} \, cos \, \vartheta}, \qquad (8)$$

so dass mit $\frac{c^2}{\mu} = p$, und $1 + \frac{c'c^2}{\mu^2} = e^2$ die Gleichung zum Vorschein kommt

$$r = \frac{p}{1 + e \, cos \, \vartheta}. \qquad (8)$$

Dieses ist aber die Gleichung eines Kegelschnittes mit dem einen Brennpunkte als Pol, p ist der Halbparameter, e die Excentricität, die Polaraxe fällt mit dem kleinsten Fahrstrahle r_0 zusammen. Die Bahn des Punktes ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $e \lesseqgtr 1$ ist. Nun ist aber

$$e^2 = 1 + c' \frac{c^2}{\mu^2}, \qquad (9)$$

in welchem Ausdrucke rechts $\frac{c^2}{\mu^2}$ stets positiv ist, so dass die Gestalt der Bahn nur von dem Coëfficienten c' abhängt, je nachdem $c' \lesseqgtr 0$, ist $e \lesseqgtr 1$. Der Punkt beschreibt mithin eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn $e \lesseqgtr 1$ oder $c' \lesseqgtr 0$ ist.

Weil wir hier von der dem Pole zunächst liegenden Abside ausgehen, so ist die Lage der Axen des Kegelschnittes eine bestimmte, weshalb es sich nur noch um die Grösse der Bahn handelt.

Bewegt sich der Punkt in einer Parabel, dann ist, weil der Halbparameter der Bahn $p = \frac{c^2}{\mu}$, die Gleichung derselben in rechtwinkeligen Coordinaten, den Scheitel als Ursprung wählend,

$$y^2 = 2\frac{c^2}{\mu}x. \tag{10}$$

Beschreibt der Punkt eine Ellipse oder Hyperbel, bezeichnen wir die Halbaxen mit a und b, dann haben wir, weil $p = \frac{b^2}{a}$, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$,

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\mu}, \qquad 1 + \frac{c' c^2}{\mu^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

und es ergiebt sich aus diesen zwei Relationen

$$a = -\frac{\mu}{c'}, \qquad b^2 = -\frac{c^2}{c'}. \tag{11}$$

Dabei ist für die Ellipse c' negativ, also b^2 positiv, für die Hyperbel c' positiv, also b^2 negativ, wie dem sein muss.

Wir haben nun den Wert der Konstanten c' zu ermitteln. Die Geschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle der Bahn ist durch die Gleichung (1) gegeben, aus ihr folgt

$$v^2 = C - 2\int\frac{\mu}{r^2}dr = C + \frac{2\mu}{r} - 2c_1 = c' + \frac{2\mu}{r}. \tag{12}$$

Ist nun v_0 die dem Fahrstrahle r_0 entsprechende Geschwindigkeit, dann muss auch sein

$$v_0{}^2 = C + \frac{2\mu}{r_0} - 2c_1 = c' + \frac{2\mu}{r},$$

mit welcher Beziehung sich ergiebt

$$c' = v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \tag{13}$$

Zufolge dieses Wertes von c', welcher nur von der Grösse der Geschwindigkeit v_0, dem Primradiusvektor und der Intensität der Beschleunigung abhängt, ist jetzt die Gleichung der Bahn mit Rücksicht auf (8')

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2}\left(v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)}\cos\vartheta}, \tag{14}$$

sie ist daher eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $v_0{}^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}$ ist. Die Gestalt der Bahn hängt nur ab von der Grösse der Geschwindigkeit v_0, dem Anfangsabstande des Punktes vom Centrum und der Intensität der Beschleunigung.

Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt für die Geschwindigkeit v des Punktes

$$v^2 = v_0{}^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{15}$$

Auch ist mit (11) und (12)

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{16}$$

Für die parabolische Bahn ist $a = \infty$, folglich die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \tag{16'}$$

Geht die elliptische Bahn in eine Kreisbahn über, dann wird $r = r_0 = a$, also die Geschwindigkeit v' für diese Bahn

$$v' = \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

Der Wert von v'^2 ist demnach zweimal kleiner als der entsprechende Wert von v^2 für eine parabolische Bahn. Die Kreisbahn liegt zwischen zwei Gruppen elliptischer Bahnen, welche erhalten werden, wenn wir v' wachsen lassen bis $v_0\sqrt{2}$ und abnehmen lassen bis auf Null.

Weiter ist die Zeit t zu bestimmen, innerhalb welcher der Radiusvektor r eine bestimmte Fläche der Bahn beschreibt, wobei wir den Fahrstrahl r_0 als seine Anfangslage wählen.

Durch Elimination der Grösse $d\vartheta$ aus (2) und (3) ergiebt sich

$$dt = \frac{\pm r\,dr}{\sqrt{c' r^2 - 2\mu r - c^2}}. \tag{17}$$

Die Zeit rechnen wir vom Perihel zum Aphel. Erfolgt die Bewegung vom Scheitel nach dem Aphel, dann wachsen t und r gleichzeitig und es gilt für dieselbe das obere Zeichen rechts.

Beschreibt der Punkt eine Ellipse, wie dieses bei allen Planeten der Fall ist, dann liegt r immer zwischen $a(1-e)$ und $a(1+e)$, wodurch wir in diesem Falle setzen können

$$r = a(1 - e\cos u), \tag{18}$$

mit u eine neue Variable bezeichnend. Aus (18) folgt

$$dr = a e \sin u\, du, \tag{19}$$

und weil $c' = -\frac{\mu}{a}$, $c^2 = a\mu(1 - e^2)$, so geben die Gleichungen (18) und (19)

$$r\,d\,r = a^2 e (1 - e \cos u) \sin u\, d\, u,$$
$$c' r^2 + 2 \mu r - c^2 = 2 \mu e^2 \sin^2 u,$$

wobei $(1 - \cos u)^2$ entwickelt und $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ gesetzt wurde. Die Einführung dieser Werte in die (17) giebt

$$d\,t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e \cos u)\, du$$

und die Integration dieser Gleichung, wenn t' die Integrationskonstante bedeutet,

$$t + t' = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e \sin u).$$

Mit $u = 0$ ist $r = a(1 - e)$, der Punkt befindet sich im Perihel, es ist also mit $u = 0$ auch $t = 0$, so dass $t' = 0$, folglich ist die verlangte Zeit

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e \sin u). \tag{20}$$

Die Gleichung (18) giebt für irgend einen Wert von r den entsprechenden Wert von u, es kann daher mit (20) für jeden Wert von r die Zeit t berechnet werden.

Die Umlaufszeit T folgt aus (20) dadurch, dass wir den Bogen u von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ wachsen lassen, dann wächst t von $t = 0$ bis $t = T$, und es ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \tag{21}$$

Bestehen für zwei Punkte die Gleichungen

$$T_1{}^2 = \frac{a_1{}^3}{\mu}(2\pi)^2, \qquad T_2{}^2 = \frac{a_2{}^3}{\mu}(2\pi)^2,$$

so folgt aus denselben $T_1{}^2 : T_2{}^2 = a_1{}^3 : a_2{}^3$, und verhalten sich demnach die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der halben grossen Axen der entsprechenden Bahnen. Dieses Gesetz hat Keppler durch Beobachtung der Umlaufszeiten zweier Planeten gefunden, wobei er aber die Masse der Planeten nicht berücksichtigte.

Der in der Zeit t von dem Fahrstrahle beschriebene Winkel ϑ, welcher durch die Bahngleichung bekannt, wenn r gegeben ist, lässt sich auch als Funktion von u darstellen. Aus (2) und (5) folgt

$$d\vartheta = \frac{c\,d\,r}{r\sqrt{c' r^2 + 2\mu r - c^2}} = \frac{d\,u}{1 - e \cos u}\sqrt{1 - e^2}.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung setzen wir $tg\,\frac{u}{2} = z$, also $\frac{d\,u}{\cos^2\frac{u}{2}} = 2\,d\,z$, berücksichtigen, dass $\cos u = \cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}$, dann ist

$$d\vartheta = \frac{2\,d\,z\sqrt{1 - e^2}}{1 - e + (1 + e) z^2},$$

woraus durch Integration folgt

$$\frac{\vartheta}{2} = arc\left(tg = z\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right) + C.$$

Die Konstante C ist hier gleich Null, weil ϑ und z gleichzeitig verschwinden, folglich der in der Zeit t vom Radiusvektor durchfahrene Winkel gegeben durch

$$tg\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\frac{u}{2}. \tag{22}$$

Bestimmen wir aus (21) die Acceleration μ, so ergiebt sich

$$\mu = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}, \tag{23}$$

und da für eine beliebige Anzahl von in Ellipsen um ein gemeinschaftliches Centrum sich bewegenden Punkten die Relation besteht $\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^{\,3}}{T_1^{\,2}} = \frac{a_2^{\,3}}{T_2^{\,2}} = \ldots$, so folgt, dass die Beschleunigung aller Planeten in der Einheit ihrer Entfernung von der Sonne gleich ist, sie würden, wenn sie in diesen Abstand von der Sonne gebracht werden könnten, auf dieselbe Weise beschleunigt werden.

Setzen wir in (20) $\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \frac{1}{n}$, so kommt

$$n\,t = u - e\sin u, \quad \text{woraus} \quad u = nt + e\sin u, \tag{24}$$

und wenn wir unter dem Sinuszeichen wieder $u = nt + e\sin u$ setzen

$$u = nt + e\sin(n\,t + e\sin u), \quad \text{oder} \quad u = nt + e\sin nt, \tag{25}$$

wenn die Klammergrösse aufgelöst und nur die erste Potenz von e berücksichtigt wird. Weil bei fast allen Planetenbahnen e ein sehr kleiner Bruch ist, für die Erdbahn z. B. $e = 0{\cdot}01685318$, so ist diese Vernachlässigung mit hinreichender Annäherung für die Bahnen der meisten Planeten erlaubt. Führen wir in die (18) obigen Wert von u mit derselben Vernachlässigung ein, dann wird die Fahrstrahllänge

$$r = a(1 - e\cos nt), \tag{26}$$

woraus umgekehrt t bestimmt werden kann, wenn r gegeben ist.

Der in der Zeit t von dem Fahrstrahle beschriebene Winkel könnte wieder aus der Bahngleichung abgeleitet werden, jedoch ist es vorteilhafter ϑ direkt zu berechnen. Wir haben dann

$$r^2\,d\vartheta = c\,d\,t = \sqrt{\mu\,a(1-e^2)}\,d\,t, \quad \text{oder} \quad r^2\,d\vartheta = \sqrt{\mu\,a}\,d\,t$$

mit Vernachlässigung von e^2. Weil aber $r = a(1-e^2)(1 + e\cos\vartheta)^{-1}$, so ist annähernd $r = a(1 - e\cos\vartheta)$ und $r^2 = a^2(1 - 2e\cos\vartheta)$, folglich

$$(1 - 2e\cos\vartheta)\,d\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,d\,t = n\,d\,t.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt mit Rücksicht darauf, dass t und ϑ gleichzeitig verschwinden,

$$n t = \vartheta - 2 e \sin \vartheta,$$

woraus, mit derselben Methode wie oben, folgt

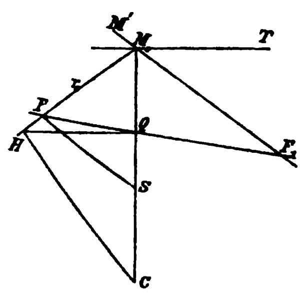
$$\vartheta = nt + 2 e \sin n t.$$

Dürften wir hier noch $2 e \sin n t$ vernachlässigen, dann würde die Bewegung des Fahrstrahles eine gleichförmige sein.

Denken wir uns mit dem Halbmesser der Einheit um das Centrum der Bahn des Punktes einen Kreis beschrieben und lassen auf demselben einen Punkt mit der Geschwindigkeit n sich bewegen, dann ist seine Bewegungsgleichung $\vartheta = n t$. Gehen nun der Planet und der Punkt gleichzeitig vom Perihel aus in derselben Richtung in ihren Bahnen weiter, so kommen sie auch gleichzeitig auf der grösseren Absidaldistanz an, denn mit $\vartheta = \pi$ ist $\sin n t = 0$, und kehren zu gleicher Zeit wieder in ihre Anfangslage zurück. In der ersten Hälfte der Bahnen eilt der Planet dem Punkte um eine Winkelgrösse voraus, welche annähernd gleich $2 e \sin n t$ ist, in der zweiten Hälfte verhält sich dies umgekehrt, weil dann $\sin n t$ negativ ist. Die Winkelgrösse $2 e \sin n t$ wird die Mittelpunktsgleichung der elliptischen Bahn genannt. Der Winkel $n t$ führt den Namen „mittlere Anomalie" oder auch „mittlere Bewegung" des Planeten.

An unsere analytische Betrachtung lassen sich noch zwei geometrische Betrachtungen knüpfen.

Zunächst lässt sich leicht auf geometrischem Wege die Art des Kegelschnittes erkennen. Ist F (Fig. 43) das Beschleunigungscentrum der Bahn, M_0 die Anfangslage des Punktes, $M_0 T$ die Richtung der Geschwindigkeit v_0, so ist $F M_0$ der Radiusvektor r_0 für die Anfangslage. Ziehen wir $M_0 C$ senkrecht zu $M_0 T$ der Tangente der Bahn in M_0, dann liegt auf dieser Linie der Krümmungsmittelpunkt C der Bahn für den Punkt M_0, und — wenn wir $\sphericalangle C M_0 F_1 = \sphericalangle C M_0 F$ machen, auf dem Schenkel $M_0 F_1$ der zweite Brennpunkt der Bahn. Tragen wir ferner von M_0 aus, auf dem Strahle $M_0 F$, die Beschleunigung $\frac{\mu}{r_0^2}$ auf und projizieren sie auf die Richtung der Normalen, so erhalten wir die nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtete Normalbeschleunigung $\frac{v_0^2}{\varrho}$, wodurch sich der Krümmungshalbmesser ϱ leicht konstruieren lässt, C sei der Krümmungsmittelpunkt. Machen wir jetzt $C H \perp M_0 F$, $H Q \perp M_0 C$, dann ist Q auf $M_0 C$ ein weiterer Punkt der grossen Axe, durch ihren Schnitt mit dem Strahle $M_0 F_1$ ist der zweite Brennpunkt F_1 bestimmt. Liegt nun der Schnitt der Axenrichtung $F Q$ mit dem Strahle $M_0 F_1$ auf derselben Seite von $M_0 T$, so ist die Bahn eine Ellipse, ist $F Q \parallel M_0 T$ eine Parabel, fällt der Schnittpunkt F_1 auf die entgegengesetzte Seite von $M_0 T$ eine Hyperbel. Ziehen wir ferner durch den Brennpunkt F eine Parallele zu $M_0 F_1$, so schneidet dieselbe die Normalenrichtung in einem gewissen Punkte S. Befindet sich Q zwischen M_0 und S, dann ist die Curve eine Ellipse, fällt Q mit S zusammen eine Parabel,



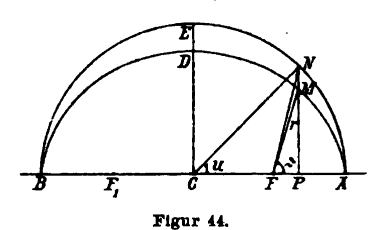
Figur 43.

liegt S zwischen Q und M_0, oder über M_0 hinaus eine Hyperbel. Diese drei Fälle treten ein, je nachdem $M_0 Q \lesseqgtr M_0 S$ ist. Bezeichnet β den Winkel $F M_0 C$, so ist

$$\frac{\mu}{r_0^2} \cos\beta = \frac{v_0^2}{M_0 C} = \frac{v_0^2}{\varrho}; \; \varrho = \frac{v_0^2 r_0^2}{\mu \cos\beta}; \; M_0 Q = M_0 C \cdot \cos^2\beta,$$

woraus folgt $M_0 Q = \frac{v_0^2 r_0^2 \cos\beta}{\mu}$. Das Dreieck $M_0 F S$ ist ein gleichschenkeliges, weshalb $M_0 S = 2 r_0 \cos\beta$ ist. Mithin bekommen wir $\frac{M_0 Q}{M_0 S} = \frac{v_0^2}{\frac{2\mu}{r_0}}$. Es ist daher die Bahn eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\frac{v_0^2}{\frac{2\mu}{r_0}} \lesseqgtr 1$, oder $v_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}$, ist.

Die Grössen r, t und ϑ haben wir mit Hilfe einer neuen Variablen u dargestellt, die erhaltenen Formeln können auch leicht geometrisch abgeleitet werden, wodurch sich gleichzeitig die Bedeutung dieser Veränderlichen ergiebt. F (Fig. 44) sei das Beschleunigungscentrum der elliptischen Bahn $A D B$ des Punktes, C Mittelpunkt der Curve, $A E B$ ein über der grossen Axe der Bahn als Durchmesser beschriebener Kreis, auf welchem sich, gleichzeitig mit dem Planeten vom Perihel ausgehend, ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit bewege, M und N seien zwei auf derselben Ordinatenlinie $P N$ liegende Punkte beider Bahnen. Ziehen wir die Strahlen $F M$, $F N$, $C N$, so ist



Figur 44.

$\sphericalangle A F M = \vartheta$, $M F = r$, $C F = a e$, $M P : N P = b : a = \sqrt{1 - e^2}$, $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\vartheta}$, oder $r + e r \cos\vartheta = a(1 - e^2)$. Aber wir haben $r \cos\vartheta = F P = C P - C F = a \cos \sphericalangle N C A - a e$; $r + e(a \cos \sphericalangle N C A - a e) = a(1 - e^2)$; folglich $r = a(1 - e \cos \sphericalangle N C A)$.

Daraus geht hervor, dass der Winkel $N C A$ die Variable u ist, die sogenannte excentrische Anomalie, womit wir die bekannte Gleichung bekommen

$$r = a(1 - e \cos u).$$

Im Gegensatze zu der Bezeichnung von u wird der Polarwinkel, dessen Scheitel im Beschleunigungscentrum liegt, die wahre Anomalie genannt.

Durch Einführung dieses Wertes von r in die Gleichung $r = a(1 - e^2)(1 + e \cos\vartheta)^{-1}$ der Ellipse finden wir $\cos\vartheta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$, damit ergiebt sich

$$1 - \cos\vartheta = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u}, \quad 1 + \cos\vartheta = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u},$$

so dass $\frac{1 - \cos\vartheta}{1 + \cos\vartheta} = \frac{1 + e}{1 - e} \cdot \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$, oder $tg\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\, tg\frac{u}{2}$, letztere Formel ist die auf analytischem Wege gefundene Gleichung (22).

Nun ist noch die Zeit t als Funktion von u darzustellen. Der doppelte in der Zeiteinheit vom Fahrstrahle beschriebene Flächenraum ist $c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$; Sektor $M F A = \frac{1}{2} t \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \frac{n a^2 \sqrt{1 - e^2}}{2} t$, mit $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = n$. Es ist aber auch Sektor $M F A = \frac{b}{a}$ Sektor $N F A = \sqrt{1 - e^2}(N C A - N C F)$, $N C A = \frac{a^2}{2} u$, $N C F$

$= \frac{NC \cdot CF \sin u}{2} = \frac{a^2 e \sin u}{2}$, folglich Sektor $MFA = \frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,(u - e \sin u)$.

Mit diesen zwei Werten für die Sektorfläche MFA erhalten wir

$$n t = u - e \sin u,$$

welche Gleichung mit der Formel (24) identisch ist.

Die Werte der beiden Polarcoordinaten lassen sich auch als Funktionen der unabhängig Veränderlichen t entwickeln. Für die elliptische Bewegung und unter der Voraussetzung, dass e ein sehr kleiner Bruch ist, ergeben sich die folgenden Resultate:

Die excentrische Anomalie ist:

$$u = nt + e \sin nt + \frac{e^2}{2}\sin 2nt + \frac{e^3}{2^3}(3 \sin 3nt - \sin nt)$$
$$+ \frac{e^4}{2 \cdot 3}(2 \sin 4nt - \sin 2nt) + \frac{e^5}{2^7 \cdot 3}(5^3 \sin 5nt - 3^4 \sin 3nt + 3 \sin nt)$$
$$+ \frac{e^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5}(3^4 \sin 6nt - 2^6 \sin 4nt + 5 \sin 2nt) + \cdots$$

Für den Radiusvektor ist

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos nt - \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2^3}(3 \cos 3nt - 3 \cos nt)$$
$$- \frac{e^4}{3}(\cos 4nt - \cos 2nt) - \frac{e^5}{2^7 \cdot 3}(5^3 \cos nt - 5 \cdot 3^3 \cos 3nt + 5 \cdot 2 \cos nt)$$
$$- \frac{e^6}{2^4 \cdot 5}(3^3 \cos 6nt - 2^5 \cos 4nt + 5 \cos 2nt) - \cdots$$

Die wahre Anomalie ist

$$\vartheta = nt + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin nt + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2nt$$
$$+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3nt + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4nt$$
$$+ \frac{1097}{960}e^5 \sin 5nt + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6nt + \cdots$$

oder nach Potenzen von e geordnet

$$\vartheta = nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt + \frac{e^3}{2^3 \cdot 3}(13 \sin 3nt - 3 \sin nt)$$
$$+ \frac{e^4}{2^5 \cdot 3}(103 \sin 4nt - 44 \sin 2nt)$$
$$+ \frac{e^6}{2^6 \cdot 3 \cdot 5}(1097 \sin 5nt - 645 \sin 3nt + 50 \sin nt) + \cdots$$

Wird nur die erste Potenz von e berücksichtigt, dann gehen diese Formeln in die Gleichungen (25), (26) und (27) über.

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Schlömilch, Analyt. Mechanik. Autenheimer, Elementarbuch der Differentialrechnung etc.

11. Ein Punkt bewegt sich in einer Parabel um ein Centrum in ihrem Focus. Wenn der Punkt in eine gegebene Entfernung vom Brennpunkte gelangt, so wird seine absolute Beschleunigung plötzlich doppelt so gross. Welches ist die Beschaffenheit des daraus hervorgehenden Weges des Punktes?

Die Brennpunktsgleichung der Parabel vom Parameter $4m$ ist

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{mr}, \quad \text{so dass} \quad \frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{mr^2}.$$

Damit giebt die Formel (VII) die Beschleunigung

$$\varphi = \frac{c^2}{2mr^2} = \frac{\mu}{r^2}.$$

Nachdem die absolute Acceleration sich verdoppelt hat, ist

$$\varphi = \frac{c^2}{mr^2},$$

und mithin durch (VII)

$$\frac{c^2}{mr^2} = \frac{c^2}{p^3}\frac{dp}{dr}, \quad \frac{1}{mr^2} = \frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{1}{mr} = C + \frac{1}{2p^2}.$$

Ist nun h der Wert von r in dem Augenblicke, wo die absolute Beschleunigung doppelt so gross wird, dann haben wir, weil das Perpendikel p der Parabel und der zu bestimmenden Curve für den gegebenen Punkt gemeinschaftlich angehört, $\frac{1}{mh} = C + \frac{1}{2mh}$, d. i. $C = \frac{1}{2mh}$. Mithin ist die Gleichung der neuen Bahn

$$\frac{1}{mr} = \frac{1}{2mh} + \frac{1}{2p^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{mh}{p^2} = \frac{2h}{r} - 1,$$

welche somit eine Ellipse mit der grossen Axe $2h$ und der kleinen $2\sqrt{mh}$ ist. Weil die Ellipse die Parabel berührt, wenn $r = h =$ der grossen Halbaxe der Ellipse ist, so folgt aus der Natur der neuen Bahn, dass der Berührungspunkt ein Endpunkt ihrer kleinen Axe ist, mithin ist die grosse Axe parallel zu der Tangente der Parabel im Punkte $r = h$. Der Sinus des Neigungswinkels der Tangente der Parabel in diesem Punkte gegen ihre Axe ist $\frac{p}{h} = \sqrt{\frac{m}{h}}$, folglich ist der Neigungswinkel der grossen Ellipsenaxe gegen die Parabelaxe $arc\left(sin = \sqrt{\frac{m}{h}}\right)$.

Walton, p. 267.

12. Ein Punkt bewegt sich um ein festes Centrum vermöge einer nach demselben gerichteten und dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportionalen Beschleunigung und es soll seine Bewegung untersucht werden.

Bestimmung der Bahn. Nach Formel (VII) ist, wenn die Acceleration attraktiv,

$$\varphi = \frac{\mu}{r^3} = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

so dass durch Integration

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{c^2}{p^2} \pm C, \quad \text{oder} \quad \frac{a^2}{r^2} - \frac{b^2}{p^2} = \pm 1, \tag{1}$$

wenn $\frac{\mu}{C} = a^2$, $\frac{c^2}{C} = b^2$ gesetzt wird, und es sind die Werte von a und b abhängig von der Grösse, Richtung und Lage der Anfangsgeschwindigkeit. Um eine Gleichung zwischen r und ϑ zu erhalten, berücksichtigen wir, $u = \frac{1}{r}$ setzend, dass

$$\frac{1}{p^2} = \frac{u^2}{b^2}\left(a^2 \mp \frac{1}{u^2}\right) = \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2,$$

woraus folgt

$$\frac{du}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\sqrt{u^2 \mp \frac{1}{a^2 - b^2}} = \alpha\sqrt{u^2 + \beta^2},$$

mit $\quad \alpha = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}, \; \beta^2 = \frac{1}{a^2 - b^2},$

so dass $\quad \alpha\, d\vartheta = \frac{du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}.$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\alpha\vartheta + C = l(u + \sqrt{u^2 + \beta^2}),$$

d. i. auch $\quad C_1 e^{\alpha\vartheta} = u + \sqrt{u^2 + \beta^2},$

woraus sich ergiebt

$$2u = C_1 e^{\alpha\vartheta} - \frac{\beta^2}{C_1} e^{-\alpha\vartheta}.$$

Denken wir uns den Punkt aus dem Unendlichen kommend, so ist mit $\vartheta = 0$ auch $u = 0$, folglich $C_1 = \beta$, und daher

$$\frac{2u}{\beta} = e^{\alpha\vartheta} - e^{-\alpha\vartheta}.$$

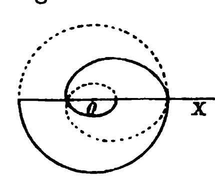
Durch Substitution der Werte von α und β wird

$$2u\sqrt{a^2 - b^2} = e^{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\,\vartheta} \pm e^{-\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\,\vartheta},$$

und schliesslich die Gleichung der Bahn in Polarcoordinaten:

$$2\sqrt{a^2-b^2} = r\left(e^{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\,\vartheta} \pm e^{-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\,\vartheta}\right). \qquad (2)$$

Um die Bahn des Punktes näher kennen zu lernen, haben wir hier fünf Fälle zu unterscheiden. 1) Wenn $a = b$, so ist die Bahn eine hyperbolische Spirale, denn die (1) giebt mit $a = b$, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} \mp \frac{1}{a^2}$, welches die Gleichung genannter Curve ist. Gehen wir von der Polargleichung aus, so folgt $\frac{du}{d\vartheta} = \frac{1}{a}$, d. i. $r\vartheta = a$, die bekannte Gleichung dieser Linie, ihr Pol ist das Beschleunigungscentrum. 2) Wenn a und b beide unendlich gross sind, so ist die Bahn eine logarithmische Spirale, denn ihre Gleichung ist in diesem Falle $r = e^{\pm a\vartheta}$. 3) Wenn $a > b$ ist und das obere Zeichen gilt, so hat die Bahn die durch die Figur 45 gegebene Gestalt. 4) Mit $a > b$ und dem unteren Zeichen nimmt die Bahn die durch die Figur 46 dargestellte Form an. 5) Wenn $a < b$ ist, so besitzt die Bahn die durch die Figur 47 angedeutete Gestalt. Die in der Gleichung zwischen r und ϑ anfänglich erscheinenden imaginären Werte verschwinden wieder, indem jedes Glied den Faktor $\sqrt{-1}$ enthält.



Figur 45.

Figur 46.

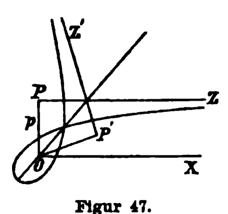
Ist die Beschleunigung repulsiv, dann haben wir

$$\varphi = -\frac{\mu}{r^3} = -\frac{c^2}{2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad \frac{\mu}{r^2} = -\frac{c^2}{p} + C,$$

folglich $$\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{p^2} = 1,$$

als Gleichung der Bahn zwischen r und p. Eine Gleichung zwischen r und ϑ erhalten wir durch die Relation

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{b^2}(1 - a^2u^2),$$

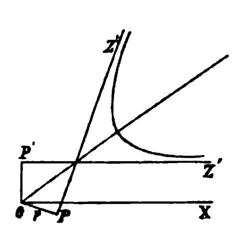


Figur 47.

welche giebt $$\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2} - u^2}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}\, d\vartheta,$$

so dass $$arc\,(sin = \sqrt{a^2+b^2}\,u) = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\,\vartheta + C,$$

oder, wenn wir den Bogen durch den Sinus ersetzen und die Polaraxe so wählen, dass die Integrationskonstante verschwindet, sowie u durch r ausdrücken,



Figur 48.

$$\sqrt{a^2+b^2} = r \sin\left\{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\,\vartheta\right\},$$

welches die Polargleichung der durch die Figur 48 veranschaulichten Bahn ist.

Bestimmung der Geschwindigkeit und der Zeit. Es sei r_0 der Fahrstrahl für die Anfangslage des Punktes, v_0 seine Geschwindigkeit daselbst, α der Winkel, welchen die Richtung von v_0 mit dem Radiusvektor r_0 einschliesst. Nun ist, wenn die Beschleunigung attraktiv,

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{\mu}{r^3}, \quad \text{daher} \quad v^2 = \frac{\mu}{r^2} + C,$$

und weil mit $r = r_0$, $v = v_0$, also $C = v_0{}^2 - \frac{\mu}{r_0{}^2}$, so folgt

$$v^2 = v_0{}^2 + \mu\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0{}^2}\right).$$

Um die Zeit t zu erhalten, während welcher der Fahrstrahl einen gewissen Winkel ϑ durchläuft, ist es zweckmässig, die Gleichung der Bahn in einer anderen Weise abzuleiten. Nach Formel (VI) ist

$$\frac{\mu}{r^3} = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}\right\},$$

woraus folgt

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} = \left(\frac{\mu}{c^2} - 1\right)\frac{1}{r} = \left(\frac{\mu}{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha} - 1\right)\frac{1}{r}, \tag{4}$$

welches eine weitere Gleichung der Bahn ist. Die Gestalt der Bahn ist abhängig von der Beschaffenheit der Klammergrösse auf der rechten Seite der Gleichung und sind die drei Fälle $\frac{\mu}{v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha} \gtreqless 1$ zu unterscheiden.

1) $\frac{\mu}{v_0{}^2 \cdot r_0{}^2 \sin^2\alpha} = 1$. Die Gleichung der Bahn ist in diesem Falle

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} = 0, \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{r} = C_1\,\vartheta + C_2.$$

Wählen wir der Einfachheit halber die Richtung von r_0 als Polaraxe, so ist mit $\vartheta = 0, \frac{1}{r} = C_2, -\frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r^2} = C_1$, und weil für den Anfangspunkt der Bewegung $r = r_0$, $\frac{r}{\frac{dr}{d\vartheta}} = -tg\,\alpha$, sind die Werte der Integrationskonstanten

$C_1 = \frac{cotg\,\alpha}{r_0}$, $C_2 = \frac{1}{r_0}$, daher ist die Bahngleichung

$$r = \frac{r_0}{1 + \vartheta\, cot\,\alpha}, \tag{5}$$

welches diejenige der hyperbolischen Spirale ist. Mit $\alpha < 90^0$ ist $cotg\,\alpha > 0$, es nähert sich der Punkt mit wachsendem ϑ dem Pole. Mit $\alpha = 90^0$ wird $cotg\,\alpha = 0$, die Spirale geht in einen Kreis vom Radius r_0 über und fällt dessen Mittelpunkt mit dem Pole zusammen, was unter den Verhältnissen stets der Fall ist, wo die Geschwindigkeit v_0 senkrecht auf dem Radiusvektor der Anfangslage steht und der Quotient aus dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem Fahrstrahle die Beschleunigung φ giebt. Ist $\alpha > 90^0$, so entfernt sich der Punkt vom Pole, mit $\vartheta = -tg\,\alpha$ wird $r = \infty$, wodurch zugleich die Asymptote der Spirale bestimmt ist.

Die Zeit, innerhalb welcher der Fahrstrahl einen gewissen Winkel ϑ beschreibt, folgt aus (I) und (5), es ist

$$d\,t = \frac{r_0^{\,2}\,d\,\vartheta}{c\,(1 + \vartheta\, cotg\,\alpha)^2}, \quad t = -\frac{r_0}{c\,cotg\,\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \vartheta\, cotg\,\alpha} + C,$$

oder, weil t und ϑ gleichzeitig verschwinden, also $C = \frac{c\,cotg\,\alpha}{r_0}$, und $c = v_0\, r_0\, sin\,\alpha$ ist

$$t = \frac{r_0}{v_0\, cos\,\alpha}\left(1 + \frac{1}{1 + \vartheta\, cotg\,\alpha}\right) = \frac{1}{v_0\, cos\,a}(r_0 - r). \tag{6}$$

Damit sind die Polarcoordinaten als Funktionen der Zeit

$$r = r_0 - v_0\, cos\,\alpha\,.\,t \quad (7) \qquad \vartheta = \frac{1}{cotg\,\alpha}\left(\frac{r_0}{r_0 - v_0\, cos\,\alpha\,.\,t} - 1\right). \quad (8)$$

Die Zeit T, in welcher der Punkt den Pol erreicht, für welchen $r = 0$ ist, resultiert aus (7), sie ist

$$T = \frac{r_0}{v_0\, cos\,\alpha}. \tag{9}$$

Diesem Werte entspricht $\vartheta = \infty$, so dass der Punkt unendlich viele Umläufe zu machen hat, ehe er den Pol erreicht. Ist die Lage des Punktes vor der Zeit, die zum Anfangspunkte gewählt wurde, zu bestimmen, dann haben wir t negativ von Null bis Unendlich zu nehmen, wobei r von r_0 bis ∞ wächst, ϑ von 0 bis $-tg\,\alpha$ abnimmt.

2) $\frac{\mu}{v_0^{\,2}\, r_0^{\,2}\, sin^2\,\alpha} - 1 < 0 = -n^2$, wo n eine reelle Zahl bezeichnet.

Die Differentialgleichung der Bahn ist $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,\vartheta^2} = -n^2$, so dass

$\frac{1}{r} = C_1\, sin\,n\,\vartheta + C_2\, cos\,n\,\vartheta$. Mit Rücksicht auf die Werte für die Anfangslage des Punktes sind die Integrationskonstanten $C_1 = \frac{cotg\,\alpha}{n\, r_0}$, $C_2 = \frac{1}{r_0}$, daher ist die Bahngleichung

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\vartheta + \frac{\cot g\,\alpha}{n} \sin n\vartheta, \tag{10}$$

oder, wenn $\frac{\cot g\,\alpha}{n} = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\vartheta + \cot g\,\varepsilon \sin n\vartheta, \quad \frac{r_0}{r} = \frac{\sin(n\vartheta + \varepsilon)}{\sin\varepsilon}. \tag{10'}$$

Nehmen wir in der letzten Gleichung r möglichst klein, so ergiebt sich der von dem Punkte zu durchlaufende Bogen, um dem Pole möglichst nahe zu kommen. Die rechte Seite der (10′) wird aber zu einem Maximum mit $\sin(n\vartheta + \varepsilon) = 1$, so dass in diesem Falle $r = r_0 \sin\varepsilon$ und $n\vartheta + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ist, womit die Bedingung erscheint $n\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, oder $tg\, n\vartheta = \cot g\,\varepsilon = \frac{\cot g\,\alpha}{n}$. Der Radiusvector erreicht seinen Maximalwert ∞ mit $\sin(n\vartheta + \varepsilon) = 0$, oder $n\vartheta + \varepsilon = m\pi$, wobei m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, es ist dann $tg\,\vartheta - tg\,\varepsilon = -n\, tg\,\alpha$, und giebt der kleinste dieser Gleichung genügende Wert von ϑ die Richtung, welcher sich der unendlich wachsende Fahrstrahl nähert. Gehen wir von dem kleinsten Fahrstrahle aus, legen ϑ zu seinen beiden Seiten gleiche Werte bei, so bleibt für diese $\sin(n\vartheta + \varepsilon)$ immer gleich gross, woraus sich ergiebt, dass die Bahn den kleinsten Fahrstrahl als Symmetrielinie besitzt. Die Zeit folgt aus den Gleichungen (I) und (10′), es ist

$$dt = \frac{r_0^2 \sin^2\varepsilon}{c \sin^2(n\vartheta + \varepsilon)} d\vartheta, \quad t = -\frac{r_0^2 \sin^2\varepsilon}{nc} \cot g(n\vartheta + \varepsilon) + C,$$

aber t und ϑ sind gleichzeitig gleich Null, wodurch $C = \frac{r_0^2 \sin^2\varepsilon}{nc} \cot g\,\varepsilon$, mithin wird

$$t = \frac{r_0 \sin^2\varepsilon}{n v_0 \sin\alpha} \left\{ \cot g\,\varepsilon - \cot g(n\vartheta + \varepsilon) \right\}. \tag{11}$$

Bewegt sich der Punkt bis zum kleinsten Fahrstrahle, dann ist $n\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, folglich die bis dahin verfliessende Zeit $t = \frac{r_0 \sin 2\varepsilon}{2 n v_0 \sin\alpha}$.

Läuft der Punkt von r_0 aus in entgegengesetzter Richtung, dann ist t negativ zu nehmen. Die bis zur Ankunft des Punktes in einem unendlichen Abstande vom Pole verstreichende Zeit ergiebt sich mit $n\vartheta + \varepsilon = m\pi$, sie ist $t = \infty$.

3) $\frac{\mu}{v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha} - 1 > 0 = n^2$. Jetzt ist die Differentialgleichung der Bahn $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} = n^2$, so dass $\frac{1}{r} = C_1 e^{n\vartheta} + C_2 e^{-n\vartheta}$.

Für die Integrationskonstanten finden wir $2\,C_1 = \frac{1}{r_0}\left(1 + \frac{cotg\,\alpha}{n}\right)$, $2C_2 = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{cotg\,\alpha}{n}\right)$, mithin ist die Gleichung der Spirale

$$\frac{2\,r_0}{r} = \left(1 + \frac{cotg\,\alpha}{n}\right) e^{n\vartheta} + \left(1 - \frac{cotg\,\alpha}{n}\right) e^{-n\vartheta}. \tag{12}$$

Bewegt sich der Punkt nach dem Pole, dann wächst ϑ mit abnehmendem r und wird unendlich gross, wenn r der Null sich nähert, es läuft mithin die Bahn in unendlich vielen Windungen um den Pol.

Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $r = \frac{2\,r_0}{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}$; diese Curve ist bezüglich der Polaraxe symmetrisch und jeder ihrer Zweige hat den Pol zur Asymptote. Die Zeit, innerhalb welcher der Fahrstrahl einen gegebenen Winkel ϑ beschreibt, ergiebt sich wieder mittelst des Prinzipes des Flächen, es ist

$$c\,d\,t = \frac{4 r_0{}^2\, e^{2n\vartheta}}{(e^{2n\vartheta} - 1)^2}\, d\,\vartheta, \quad \text{daher} \quad c\,t = -\frac{2\,r_0{}^2}{n\,(e^{2n\vartheta} + 1)} + C.$$

Knüpfen wir an die Bestimmung der Integrationskonstanten die Bedingung, dass c und ϑ gleichzeitig verschwinden, dann ist $C = \frac{2\,r_0{}^2}{n}$, und

$$t = \frac{2\,r_0{}^2}{c\,n}\left(1 - \frac{1}{e^{2n\vartheta} + 1}\right).$$

Mit $\vartheta = \infty$ ergiebt sich hieraus in Zeit T, in welcher der Punkt im Pole ankommt, sie ist

$$T = \frac{2\,r_0{}^2}{c\,n} = \frac{2\,r_0}{n\,v_0\,sin\,\alpha},$$

sie ist sonach endlich gross. Handelt es sich um eine vorausgegangene Zeit, dann ist t negativ zu nehmen, es wird in diesem Falle auch ϑ negativ, und bekommen wir für $\vartheta = -\infty$, $t = -\frac{2\,r_0{}^2}{c\,n}$, so dass auch der Punkt in einer endlichen Zeit aus unendlicher Entfernung nach der gewählten Anfangslage gelangt.

Mit $cotg\,\alpha = \pm n$ erscheint nur eine Exponentialgrösse in der Bahngleichung, dieselbe lautet dann $r = r_0\, e^{\mp n\vartheta}$, welches die Gleichungen der logarithmischen Spiralen sind.

Earnshaw, Dynamics. Schlömilch, Analyt. Mechanik.

13. Auf einen Punkt wirkt eine nach einem festen Centrum gerichtete und der fünften Potenz der Distanz umgekehrt proportionale Beschleunigung. Welches ist die von dem Punkte beschriebene Bahn, wenn die anfänglichen Bewegungsverhältnisse gegeben sind?

Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0, ihre Richtung schliesse mit dem Radiusvektor r_0 der Anfangslage den Winkel α ein. Hier ist

$$\varphi = \frac{\mu}{r^5}, \qquad v\frac{dv}{dr} = -\frac{\mu}{r^5},$$

womit sich ergiebt

$$v^2 = v_0{}^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_0{}^4}\right) = \left(\frac{c}{p}\right)^2.$$

Dadurch und mit $c = v_0 r_0 \sin\alpha$ erhalten wir

$$v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha \left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right\} = v_0{}^2 + \frac{\mu}{2}\left(u^4 - \frac{1}{r_0{}^4}\right).$$

oder $$v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{\mu}{2}u^4 - v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha\, u^2 + v_0{}^2 - \frac{\mu}{r_0{}^4}.$$

Diese Gleichung kann nicht in geschlossener Form integriert werden, es sei denn, dass ihre rechte Seite ein vollständiges Quadrat, oder $v_0{}^2 - \frac{\mu}{2r_0{}^4} = 0$ ist.

1) Die rechte Seite ist ein vollständiges Quadrat. Damit dieses der Fall sein kann, müssen wir haben $2\mu\left(v_0{}^2 - \frac{\mu}{2r_0{}^4}\right) = v_0{}^4 r_0{}^4 \sin^4\alpha$, folglich

$$v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{\mu}{2}u^4 - v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha\,.\,u^2 + \frac{v_0{}^4 r_0{}^4 \sin^4\alpha}{\mu},$$

oder $$d\vartheta = -\frac{\sqrt{2\mu}\,.\,v_0 r_0 \sin\alpha\,.\,dr}{\mu - v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha\,.\,r^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\vartheta + C = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot l\,\frac{v_0 r_0 \sin\alpha\,.\,r - \sqrt{\mu}}{v_0 r_0 \sin\alpha\,.\,r + \sqrt{\mu}}.$$

Nun wollen wir die Polaraxe so wählen, dass die willkürliche Konstante gleich Null ist, dann ist die Gleichung der Bahn

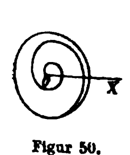
$$e^{\vartheta\sqrt{2}} = \frac{v_0 r_0 \sin\alpha\,.\,r - \sqrt{\mu}}{-v_0 r_0 \sin\alpha\,.\,r + \sqrt{\mu}}, \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{\sqrt{\mu}}{v_0 r_0 \sin\alpha}\,\frac{1 + e^{\vartheta\sqrt{2}}}{1 - e^{\vartheta\sqrt{2}}}. \qquad (1)$$

Hätten wir beim Ausziehen der Wurzel vor der Integration das Doppelzeichen $\pm$ vorausgesetzt, so würde das untere Zeichen gegeben haben

$$r = \frac{\sqrt{\mu}}{v_0 r_0 \sin\alpha}\,\frac{e^{\vartheta\sqrt{2}} - 1}{e^{\vartheta\sqrt{2}} + 1}. \qquad (2)$$

Beide Gleichungen gehören Spirallinien an, ihre Formen veranschaulichen die Figuren 49 und 50. Die durch (1) gegebene Curve nähert sich ununterbrochen einem Kreise vom Halbmesser $\frac{\sqrt{\mu}}{v_0 r_0 \sin\alpha}$, welcher erst erreicht werden kann, nachdem der Punkt eine unendliche Zahl von Umläufen gemacht hat und innerer asymptotischer Kreis genannt wird. Die durch (2) erhaltene Spirallinie besitzt einen äusseren asymptotischen Kreis von demselben Radius.

Figur 49.



Figur 50.

2) $v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^4} = 0$. Dieser Fall wird unter der folgenden allgemeineren Aufgabe behandelt.

14. Ein Punkt besitze eine nach einem festen Centrum gerichtete, der n^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Beschleunigung. Die Anfangsgeschwindigkeit sei diejenige, welche er erlangen würde, wenn er aus einer unendlichen Entfernung nach dem Centrum bis zum Anfangspunkte der Bewegung fallen würde. Welches ist die Geschwindigkeit und die Bahn des Punktes?

Sinkt der Punkt aus einer unendlichen Entfernung direkt nach dem festen Centrum, so ist, wenn x sein Abstand vom Centrum, v' seine Geschwindigkeit,

$$v'\frac{dv'}{dx} = -\varphi, \quad \text{daher} \quad v'\frac{dv'}{dx} = -\frac{\mu}{x^n},$$

d. i.

$$v'^2 = \frac{2\mu}{(n-1)x^{n-1}} + C.$$

Wenn nun $x = \infty$, so ist $v' = 0$, also $C = 0$ mit $n > 1$, aber $C = \infty$ mit $n < 1$, ersterer Fall soll in der Folge angenommen werden. Ist jetzt r_0 der Primradiusvektor, so ergiebt sich hiermit für die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{(n-1)r_0^{n-1}}. \tag{1}$$

Zwischen der Bahngeschwindigkeit und der Beschleunigung besteht die Relation

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{\mu}{r^n}, \quad \text{so dass} \quad v^2 = \frac{2\mu}{(n-1)r^{n-1}}, \tag{2}$$

denn die Integrationskonstante verschwindet, wenn v_0 und r_0 gleichzeitige Werte sind. Nun ist

$$\frac{c^2}{p^2} = \frac{2\mu}{(n-1)r^{n-1}}, \quad c^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha = \frac{2\mu \sin^2\alpha}{(n-1)r_0^{n-3}},$$

folglich

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2\mu}{(n-1)c^2 r^{n-1}} = \frac{2\mu u^{n-1}}{(n-1)c^2} = \frac{r_0^{n-3}}{r^{n-1}\sin^2\alpha} = u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2. \tag{3}$$

Damit ergiebt sich

$$d\vartheta = \frac{du}{u\sqrt{\frac{2\mu}{(n-1)c^2}u^{n-3} - 1}}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setzen wir $\frac{2\mu}{(n-1)c^2}u^{n-3} = y^2$, womit

$$\frac{2\mu}{(n-1)c^2}(n-3)u^{n-4}du = 2y\,dy, \quad \frac{n-3}{u}\frac{2\mu}{(n-1)c^2}u^{n-3}du = \frac{n-3}{u}y^2 du$$
$$= 2y\,dy, \quad \frac{n-3}{u}du = \frac{2}{y}dy, \quad du = \frac{2}{n-3}\frac{u}{y}dy, \text{ mithin}$$

$$d\vartheta = \frac{2}{n-3}\cdot\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}, \qquad \vartheta - C = \frac{2}{n-3}\,arc\left(\cos = \frac{1}{y}\right),$$

und wenn wir die Werte von y und u substituieren

$$\vartheta - C = \frac{2}{n-3}\, arc\left\{cos = \sqrt{\frac{n-1}{2\mu}}\,.\,c\,r^{\frac{n-3}{2}}\right\} = \frac{2}{n-3}\, arc\left\{cos = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{n-3}{2}} sin\,\alpha\right\}.$$

Da es sich hier nur um die Gleichung der Bahn handelt, so können wir die Polaraxe in einer solchen Lage wählen, dass die Integrationskonstante verschwindet, wodurch wir, von dem Bogen zu dem Cosinus übergehend, als solche erhalten

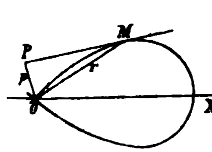
$$cos\left(\frac{n-3}{2}\vartheta\right) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{n-3}{2}} sin\,\alpha, \tag{4}$$

welche Gleichung mit $n > 3$ gilt. Ist dagegen $n < 3$, so lautet die Bahngleichung

$$cos\left(\frac{3-n}{2}\vartheta\right) = \frac{sin\,\alpha}{r_0^{\frac{n-3}{2}}\,.\,r^{\frac{3-n}{2}}}. \tag{4'}$$

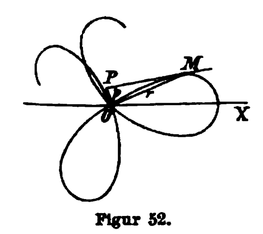
Wenn in dem ersten Falle $\frac{n-3}{2} = 1$, so hat die Bahn eine Abside. Die Absidallinie ist Symmetrieaxe der Curve und r nimmt mit wachsendem ϑ ab. Mit $\vartheta = \frac{\pi}{n-3}$ wird $r = 0$, die Curve läuft durch das Centrum. Wenn im zweiten Falle $\frac{3-n}{2} = 1$, so wächst r mit zunehmendem ϑ. Mit $\vartheta = \frac{\pi}{3-n}$ wird r unendlich gross, die Curve zu diesem Fahrstrahle parallel. Die Beschaffenheit des unendlichen Zweiges lässt sich erkennen aus der Relation $\frac{1}{p^2} = \frac{r_0^{n-3}}{r^{n-1}\,sin\,\alpha}$, dieselbe sagt, dass mit $r = \infty$ auch $p = \infty$, folglich der sich ins Unendliche erstreckende Zweig keine Asymptote besitzt.

Mit $n = 7$ erhalten wir $r^2 = r_0^{\,2}\,cosec\,\alpha\,cos\,2\,\vartheta$, oder $r^2 = a^2\,cos\,2\,\vartheta$. Dieses ist die Gleichung der Lemniscate; das Attraktionscentrum fällt mit dem Knoten der Bahn zusammen.



Figur 51.

Mit $n = 2$ ergiebt sich $cos\,\frac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\,sin\,\alpha$, oder $r = \frac{2\,r_0\,sin^2\,\alpha}{1 + cos\,\vartheta} = \frac{2\,m}{1 + cos\,\vartheta}$. Der Punkt beschreibt in diesem Falle eine Parabel und das Beschleunigungscentrum hat in dem Focus der Bahn seinen Sitz.



Figur 52.

Wenn $n > 3$ ist, so ergeben sich zwei Formen für die Bahn. Die Figur 51 versinnlicht ihre Gestalt in dem Falle, wo $\frac{n-3}{2}$ eine gerade Zahl, Figur 52 wenn $\frac{n-3}{2}$ eine ungerade Zahl ist.

15. Die Erde erteilt dem Monde eine nach ihrem Mittelpunkte gerichtete Beschleunigung, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der wechselseitigen Entfernung der Mittelpunkte beider Körper ist. Wäre der Mond nur dieser Beschleunigung unterworfen, so würde seine Bahn eine Ellipse sein, von welcher ein Focus mit dem Erdcentrum zusammenfiele. Es ist gefunden worden, dass die Sonne störend auf diese Beschleunigung einwirkt, indessen ist die Beschleunigung des Mondes durch die Sonne klein im Vergleich mit derjenigen durch die Erde. Die Beschleunigung des Mondes besteht aus zwei Teilen, der eine ist proportional dem umgekehrten Quadrate, der andere umgekehrt proportional dem Kubus des Abstandes des Mondmittels vom Erdcentrum, und beide Teile sind nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet. Welches ist die Mondbahn, wenn die Erde als unbeweglich gedacht wird?

Es seien $\frac{\mu}{r^2} = \mu u^2$ und $\frac{\mu'}{r^3} = \mu' u^3$ die beiden Beschleunigungscomponenten, welche die Bewegung des Mondes verursachen, wobei die absolute Acceleration μ' klein im Vergleich mit der absoluten Beschleunigung μ gedacht ist, dann ist die resultierende Beschleunigung

$$\varphi = \mu u^2 + \mu' u^3 = c^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\vartheta^2}\right),$$

so dass $$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \left(1 - \frac{\mu'}{c^2}\right) u = \frac{\mu}{c^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + n^2 u = n^2 a',$$

wenn $1 - \frac{\mu'}{c^2} = n^2$, $\frac{\mu}{c^2} = n^2 a'$ gesetzt wird,

oder $$\frac{d^2}{d\vartheta^2}(u - a') + n^2 (u - a') = 0.$$

Multiplicieren wir diese Gleichung mit $2\frac{d}{d\vartheta}(u-a')$ und integrieren, so wird

$$\left\{\frac{d}{d\vartheta}(u - a')\right\}^2 + n^2 (u - a')^2 = n^2 C, \text{ woraus folgt } n = \frac{\pm \frac{d}{d\vartheta}(u - a')}{\sqrt{C^2 - (u - a')^2}}.$$

Das untere Zeichen wählend, was einem gleichzeitigen Wachstum von r und ϑ, oder der Entfernung des Mondes von der Erde entspricht, eine Annahme, welche die Allgemeinheit der Resultate nicht afficieren wird, erhalten wir durch nochmalige Integration

$$n\vartheta + C' = arc\left(cos = \frac{u - a'}{C}\right).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung von der Abside aus beginnt, ist $C' = 0$ und daher die Gleichung der Mondbahn

$$u = a' + C \cos n\vartheta, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = a' + C \cos n\vartheta.$$

Die Gleichung einer Ellipse, deren einer Brennpunkt der Pol, ist

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left\{1 + e \cos(\vartheta + \omega)\right\},$$

wo ω den Bogenabstand des Scheitels vom Primradiusvektor bezeichnet, gemessen in entgegengesetztem Sinne von ϑ. Zwischen dieser Gleichung und derjenigen der Mondbahn besteht eine merkwürdige Gleichartigkeit, welche noch augenscheinlicher wird, wenn wir der ersteren die Form geben

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left\{1 + e \cos(\vartheta + \overline{n-1}\,\vartheta)\right\}.$$

Setzen wir hier $\frac{a}{b^2} = a' = \frac{\mu}{c^2 - \mu'}$, und $\frac{a\,e}{b^2} = C$, dann erscheint die Gleichung der Mondbahn. Wir können daher die Bahn des Mondes als diejenige einer Ellipse ansehen, bei welcher die Winkeldistanz jener Abside vom Primradiusvektor $(n-1)\,\vartheta$ ist, oder — wenn dieser Winkel in der nämlichen Richtung wie ϑ gemessen wird — es ist der Abstand der Abside vom Primradiusvektor $(1-n)\,\vartheta$, welcher ω' sei, so dass $\omega' = (1-n)\,\vartheta$, womit sich ergiebt

$$\frac{d\,\omega'}{d\,t} : \frac{d\vartheta}{d\,t} = 1 - n = 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu'}{c^2}},$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Abside steht in konstantem Verhältnisse zu der Winkelgeschwindigkeit des Mondes. Folglich kann die Bewegung des Mondes als eine in einer Ellipse vor sich gehende angesehen werden, wobei die Ellipse sich selbst in der nämlichen Richtung mit einer zu der Winkelgeschwindigkeit des Mondes in konstantem Verhältnisse stehenden Winkelgeschwindigkeit dreht. Während der Mond vom Perihel nach dem Aphel wandert, beschreibt er einen Winkel von 180° in der Ellipse, welcher gleich $(\vartheta - \omega')$ sein muss, daher

$$180^0 = \vartheta - \omega' = n\,\vartheta, \quad \text{oder} \quad \vartheta = \frac{180^0}{n} = \frac{180^0}{\sqrt{1 - \frac{\mu'}{c^2}}},$$

welches der Wert des Absidalwinkels der Mondbahn ist; derselbe ist grösser als 180°, was zeigt, dass die Absiden der Mondbahn fortschreiten.

13—15. **Earnshaw, Dynamics.**

16. Ein Punkt beschreibt eine Curve um ein festes Centrum, seine Geschwindigkeit v ist umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz seines Abstandes von demselben. Welches ist das Beschleunigungsgesetz und die Gleichung des Weges?

Offenbar ist, wenn μ eine konstante Grösse, $v = \frac{\mu}{r^n}$, so dass mit Formel (II)

$$\frac{\mu^2}{r^{2n}} = v_0{}^2 - \int_{r_0}^{r} \varphi \, d\, r,$$

folglich, indem wir differentiieren, das Accelerationsgesetz

$$\varphi = \frac{n\,\mu^2}{r^{2n+1}}.$$

Die Bahngleichung ergiebt sich mittelst der Formel (III), durch diese ist

$$\frac{\mu^2}{r^{2n}} = c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\}, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{\mu^2 - c^2 r^{2(n-1)}}{r^{2n}}} = c \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{r},$$

$$(n-1)\, d\, \vartheta = - \frac{d\,(r^{n-1})}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} - r^{2(n-1)}}}, \quad (n-1)\, \vartheta = C + arc\left(cos = \frac{c}{\mu} r^{n-1} \right),$$

$\vartheta = 0$ nehmend, wenn $r = a$ ist, und $\frac{c}{\mu} = k$ setzend, wird schliesslich

$$(n-1)\, \vartheta = arc\,(cos = k\, r^{n-1}) - arc\,(cos = k\, a^{n-1})$$

die Gleichung des Weges.

Riccati, Comment. Bonon. Tom. IV. p. 184. Walton, p. 268.

17. Wenn die Beschleunigung der n^{ten} Potenz der Distanz direkt proportional ist und ein Punkt aus einer Absidaldistanz mit einer Geschwindigkeit geworfen wird, deren Quadrat gleich ist dem $(1-\varepsilon)$fachen Quadrate der Geschwindigkeit in einem Kreise, beschrieben um dasselbe Centrum mit einem der Absidaldistanz gleichen Halbmesser, zu finden die Gleichung der Bahn unter der Annahme, dass ε eine kleine Grösse ist.

Es sei a die Absidaldistanz, $r = a - x$, unter x eine kleine Grösse verstanden, weil der Weg des Punktes, wie aus den anfänglichen Bewegungsverhältnissen hervorgeht, annähernd ein Kreis ist, dann haben wir

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right), \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 x}{d\vartheta^2}.$$

Ferner ist $\varphi \frac{r^2}{c^2} = \frac{\mu\, r^{n+2}}{c^2} = \frac{\mu}{c^2}(a-x)^{n+2}\left\{1 - \frac{(n+2)\,x}{a}\right\},$

folglich durch die Formel (V)

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2 x}{d\vartheta^2} + \frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{\mu\, a^{n+2}}{c^2}\left\{1 - \frac{(n+2)\,x}{a}\right\} = 0,$$

$$\frac{d^2 x}{d\vartheta^2} + \left\{1 + (n+2)\frac{\mu\, a^{n+3}}{c^2}\right\} x + a - \frac{\mu\, a^{n+4}}{c^2} = 0. \tag{1}$$

Nun sei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit in einem um dasselbe Centrum als Mittelpunkt mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreise, so ist

$$v_0{}^2 = (1-\varepsilon)\, v^2 = (1-\varepsilon)\, \mu\, a^{n+1}. \tag{2}$$

Aber nach (IV) ist $c^2 = a^2 v_0{}^2$, weil die Bewegung anfangs rechtwinkelig zu dem Radiusvektor ist und a, v_0 die Anfangswerte des Fahrstrahles und der Geschwindigkeit sind, folglich mit (2)

$$c^2 = \mu(1-\varepsilon)a^{n+3}, \quad \frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon)a^{n+3}},$$

daher ergiebt sich mit (1), weil das Produkt aus ε und x vernachlässigt werden kann,

$$\frac{d^2x}{d\vartheta^2} + (n+3)x - \varepsilon a = 0, \text{ oder } \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(x - \frac{\varepsilon a}{n+3}\right) + (n+3)\left(x - \frac{\varepsilon a}{n+3}\right) = 0.$$

Das Integral der letzten Gleichung ist offenbar, wenn A und β konstante Grössen bedeuten,

$$x - \frac{\varepsilon a}{n+3} = A\sin\left\{\sqrt{n+3}\,\vartheta + \beta\right\}.$$

Mit $\vartheta = 0$, wenn $x = 0$, ist $A\sin\beta = -\frac{\varepsilon a}{n+3}$, ferner ist durch die Annahme $\frac{dr}{d\vartheta} = 0$, wenn $r = a$, und daher $\frac{dx}{d\vartheta} = 0$, wenn $x = 0$, $\cos\beta = 0$. Dadurch geht die letzte Gleichung über in

$$x - \frac{\varepsilon a}{n+3} = -\frac{\varepsilon a}{n+3}\cos\left\{\sqrt{n+3}\,\vartheta\right\},$$

und mithin ist die Polargleichung der Bahn

$$r = a - \frac{\varepsilon a}{n+3}\operatorname{vers}\left\{\sqrt{n+3}\,\vartheta\right\}. \tag{3}$$

Die (3) differentiierend, bekommen wir für die Bestimmung der Abside

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{\varepsilon a}{\sqrt{n+3}}\sin\left\{\sqrt{n+3}\,\vartheta\right\} = 0.$$

Setzen wir nun $\sqrt{n+3}\,\vartheta = \lambda\pi$, wobei λ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, sind ϑ', ϑ'' die Werte von ϑ für zwei aufeinanderfolgende Absidaldistanzen, dann ist

$$\sqrt{n+3}\,\vartheta' = \lambda\pi, \quad \sqrt{n+3}\,\vartheta'' = (\lambda+1)\pi,$$

und mithin ergiebt sich für den Winkel ψ zwischen zwei aufeinanderfolgende Absidallinien

$$\psi = \vartheta'' - \vartheta' = \frac{\pi}{\sqrt{n+3}}.$$

Walton, p. 269.

18. Ein Punkt bewegt sich in einer Spirale $r = a\left(\sec\frac{\vartheta}{n}\right)^n$, um ein Centrum im Pole. Welches ist das Beschleunigungsgesetz?

$$\varphi = \frac{\mu}{r^{\frac{3n-2}{n}}}.$$

19. Welches ist das Beschleunigungsgesetz, mittelst dessen die Cissoide des Diocles beschrieben werden kann, wenn das Centrum in der Spitze liegt?

$$\varphi \propto \frac{\operatorname{cosec}^2\vartheta}{r^3},$$

wenn r, ϑ die Polarcoordinaten sind, das Zeichen $\propto$ proportional bedeutet.

20. Ein Punkt beschreibt eine Ellipse um ein Centrum in dem einen Ende ihrer grossen Axe. Welches ist das Beschleunigungsgesetz?

Die Beschleunigung ist direkt proportional dem Abstande des Punktes vom Centrum und umgekehrt proportional dem Kubus seiner Entfernung von der Tangente an die Bahn im Centrum.

21. Ein Punkt beschreibt die Curve $x^4 + y^4 = a^4$ um ein Centrum in ihrem Mittelpunkte. Welches ist das Beschleunigungsgesetz?

Mit r als Fahrstrahl ist $\varphi = \mu r (r^4 - a^4)$.

22. Ein Punkt bewegt sich in einem Kreise um ein Centrum in seinem Umfange. Welches ist das Beschleunigungsgesetz und die Geschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle der Bahn?

$$\varphi = \frac{\mu}{r^5}, \quad v^2 = \frac{\mu}{2 r^4}.$$

Newton, Principia, Lib. I, Prop. 7. Riccati, Comment. Bonon. Tom. IV, p. 175.

23. Ein Punkt bewegt sich um ein festes Centrum, seine Geschwindigkeit ist an jeder Stelle der Bahn umgekehrt proportional seinem Centralabstande. Welches ist die Bahn des Punktes?

Der Weg hat die Gestalt einer logarithmischen Spirale.

Riccati, Ibd. p. 184.

24. Ein Punkt bewegt sich um ein festes Centrum mit einer dem Quadrate seiner Centraldistanz umgekehrt proportionalen Beschleunigung; seine Anfangsgeschwindigkeit ist gleich der Geschwindigkeit in einem um das Centrum als Mittelpunkt mit dem Primradiusvektor als Halbmesser beschriebenen Kreise und sie schliesst mit diesem Fahrstrahle einen Winkel von 45° ein. Welches ist die Grösse und die Lage der Bahn?

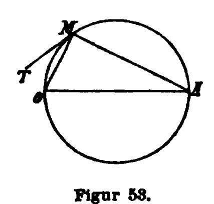
Die Bahn ist eine Ellipse, der Anfangspunkt der Bewegung ist ein Endpunkt der kleinen Axe, das Centrum ein Brennpunkt. Wenn der Primradiusvektor $= a$ ist, so ist die grosse Axe $= 2a$, und die kleine $= a\sqrt{2}$.

25. Wenn die Beschleunigung sich umgekehrt proportional der siebenten Potenz des Abstandes ändert und ein Punkt aus einer Abside mit einer Geschwindigkeit geworfen wird, welche zu der Geschwindigkeit in einem um das Centrum als Mittelpunkt mit einem der Absidaldistanz gleichen Halbmesser beschriebenen Kreise in dem Verhältnisse $1:\sqrt{3}$ steht, die Bahngleichung zu finden.

Wird die Absidaldistanz als Primradiusvektor genommen und mit a bezeichnet, dann ist die Bahngleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\vartheta.$$

26 Ein Punkt besitzt eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit von gegebener Richtung und wird nach einem festen Centrum beschleunigt. Die Geschwindigkeit des Punktes, bei jedem Abstande von dem Centrum, steht zu derjenigen eines anderen Punktes, welcher einen um dasselbe Centrum mit einem der Anfangsdistanz des ersteren Punktes gleichen Halbmesser beschriebenen Kreis durchläuft, in dem Verhältnisse $1:\sqrt{2}$. Welches ist die von dem ersten Punkte beschriebene Bahn und sein Beschleunigungsgesetz?



Figur 53.

Es sei (Fig. 53) O das feste Centrum, M der Anfangspunkt der Bewegung, $OM = a$, $\beta =$ dem Winkel zwischen OM und der Richtung MT der Anfangsgeschwindigkeit. Ziehe MA rechtwinkelig zu OM und $= a \cot g\, \beta$, verbinde O und A. Die beschriebene Bahn ist dann ein Kreis vom Durchmesser $OA = a \operatorname{cosec} \beta$. Die Beschleunigung ist verkehrt proportional der fünften Potenz der Distanz.

27. Ein Punkt bewegt sich in einer gleichseitigen Hyperbel um ein Centrum in ihrem Mittelpunkte. Zu finden den Ort, nach welchem der beschleunigte Punkt von der Bahn ausgehen muss, um die Bahngeschwindigkeit zu erlangen.

Ist a die Halbaxe der von dem Punkte beschriebenen Hyperbel, dann ist der verlangte Ort ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbaxe $a\sqrt{2}$; die Mittelpunkte beider Curven fallen zusammen und ihre Axen liegen in derselben geraden Linie.

28. Bei einer von einem Punkte vermöge einer Centralbeschleunigung beschriebenen Curve ändert sich der Winkel zwischen Fahrstrahl und Tangente wie die Zeit. Zu bestimmen die Bahn und die Beschleunigung.

Sind β, c, ω gewisse Konstante, dann ist die Differentialgleichung der Bahn

$$\vartheta = \int \frac{dr}{r\left(\beta^2 r e^{-\frac{\omega r^2}{c}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}},$$

und die Beschleunigung $\varphi = \beta^2 c e^{-\frac{\omega r^2}{c}} \frac{\omega r^2 + c}{r^3}$.

29. Ein Punkt besitzt eine nach einem festen Centrum gerichtete Beschleunigung $\varphi = \frac{r}{m^2} + \frac{c^2}{r^3}$, und wird aus einer Abside in dem Abstande $\sqrt{mc}$ vom Centrum geworfen, wobei c das Doppelte der in der Zeiteinheit vom Fahrstrahle beschriebenen Fläche bezeichnet. Welches ist die Polargleichung der Bahn? In welcher Zeit t beschreibt der Radiusvektor einen gegebenen Winkel ϑ um das Centrum?

$$r^2 = \frac{mc}{1+\vartheta^2}, \qquad t = m \operatorname{arc}(tg = \vartheta).$$

30. Aus einem Abstande a von einem festen Centrum wird ein Punkt unter einem Winkel $\frac{\pi}{4}$ zu der Richtung dieses Abstandes mit einer Geschwindigkeit geworfen, welche zu derjenigen eines anderen in einem Kreise, beschrieben um das Centrum mit diesem Abstande als Radius, sich bewegenden Punktes in dem Verhältnisse $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ steht. Die Beschleunigung in einem beliebigen Abstande r vom Centrum ist $\varphi = \frac{2a^2 n}{r^5} + \frac{n}{r^3}$. Welches ist die Bahngleichung?

Wird die Winkelcoordinate von dem Primradiusvektor an gerechnet, dann ist

$$r = a(1 - \vartheta).$$

31. Ein Punkt wird aus einer Entfernung a von einem festen Centrum rechtwinkelig zu dieser geworfen. Die Beschleunigung ist repulsiv und von konstanter Intensität. Die Anfangsgeschwindigkeit ist diejenige, welche erlangt werden würde durch die Bewegung des Punktes aus dem Centrum nach seiner Anfangslage mit dieser Beschleunigung. Welches ist die Bahn?

Ist r die Entfernung des Punktes zu einer beliebigen Zeit von dem Centrum und ϑ die Neigung von r gegen die Anfangsdistanz a, dann ist die verlangte Gleichung

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \cos^2 \frac{3}{2} \vartheta.$$

32. Ein Punkt, auf welchen eine sich wie eine beliebige Funktion seines Abstandes vom Centrum ändernde Beschleunigung wirkt, wird von einer Abside aus mit einer Geschwindigkeit geworfen, die näherungsweise gleich der für eine Kreisbahn erhaltenen ist. Wie gross ist der Abstand der Abside vom Centrum, in welcher der Punkt zunächst ankommt?

Ist die Beschleunigung in einem beliebigen Abstande r vom Centrum $\frac{1}{r^2}\psi\left(\frac{1}{r}\right)$, wo $\psi\left(\frac{1}{r}\right)$ irgend eine Funktion von $\frac{1}{r}$ bedeutet, a die Entfernung der Anfangslage vom Centrum, a' diejenige der Abside, in welcher der Punkt zunächst ankommt, verhält sich die Wurfgeschwindigkeit zu der Geschwindigkeit im Kreise um dasselbe Centrum wie $1 : 1 + m$, dann ist

$$a' = a\left\{1 - \frac{4 m \psi\left(\frac{1}{a}\right)}{\psi\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\psi'\left(\frac{1}{a}\right)}\right\}.$$

18—32. Walton, p. 274—278.

Dritter Abschnitt.

Zerlegung der Beschleunigung in tangentialer und normaler Richtung zur Bahn.

Die Mechanik lehrt, dass — wenn φ_t und φ_n die Componenten der Beschleunigung φ parallel zur Tangente und Normalen der fraglichen Stelle der Bahn eines Punktes sind — die Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung durch die Gleichungen gegeben sind

$$\varphi_t = v\frac{dv}{ds}, \qquad \varphi_n = \frac{v^2}{\varrho},$$

wobei v die Geschwindigkeit des die Bahn beschreibenden Punktes, ds das Bogenelement der Bahn, ϱ ihren Krümmungshalbmesser an der fraglichen Stelle bezeichnet.

1. Ein Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 in einer gegebenen Richtung geworfen, auf ihn wirkt parallel einer festen Geraden eine konstante Beschleunigung. Welches ist die Bahn des Punktes?

Es sei die Anfangslage des Punktes Coordinatenursprung, die Axe der y parallel zur Richtung der Beschleunigung φ, die Axe der x senk-

recht dazu, α der Winkel zwischen der Wurfrichtung und der Abscissenaxe. Die Tangential- und Normalcomponente der Acceleration φ sind $\varphi_t = -\varphi \frac{dy}{ds}$, $\varphi_n = \varphi \frac{dx}{ds}$, daher die Bewegungsgleichungen des Punktes

$$v \frac{dv}{ds} = -\varphi \frac{dy}{ds}, \qquad (1) \qquad\qquad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi \frac{dx}{ds}, \qquad (2)$$

$$v = v_0, \; x = 0, \; y = 0, \text{ wenn } t = 0. \qquad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt $v^2 = v_0{}^2 - 2\varphi y$.

Diesen Ausdruck für v^2 in (2) substituiert und beachtet, dass $\varrho = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2y}{dx^2}$, wird

$$-\frac{d^2y}{dx^2}(v_0{}^2 - 2\varphi y) = \varphi \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \varphi \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right],$$

oder $(v_0{}^2 - 2\varphi y)\frac{d}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d}{dx}(v_0{}^2 - 2\varphi y) = 0.$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$C\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = v_0{}^2 - 2\varphi y.$$

Aus dieser Relation und den Anfangsbedingungen geht hervor, dass $C = v_0{}^2 \cos^2\alpha$, folglich ist

$$v_0{}^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (v_0{}^2 - 2\varphi y)\sec^2\alpha,$$

also $\qquad v_0\, dy = \sqrt{v_0{}^2 tg^2\alpha - 2\varphi y \sec^2\alpha}\, dx,$

und, indem wir die letzte integrieren,

$$C - v_0\sqrt{v_0{}^2 tg^2\alpha - 2\varphi y \sec^2\alpha} = \varphi x \sec^2\alpha.$$

Weil x und y gleichzeitig verschwinden, so ist $C = v_0{}^2 tg\,\alpha$, daher

$$v_0{}^2 tg\alpha - v_0\sqrt{v_0{}^2 tg^2\alpha - 2\varphi y \sec^2\alpha} = \varphi x \sec^2\alpha,$$

und schliesslich giebt die Auflösung dieser Gleichung für y

$$y = tg\,\alpha \,.\, x - \frac{\varphi \sec^2\alpha}{2 v_0{}^2} x^2,$$

welches die gesuchte Bahngleichung ist; dieselbe thut dar, dass der Punkt eine Parabel beschreibt.

Euler, Mechanica, Tom. I. p. 232.

2. Ein Punkt beschreibt infolge einer zu einer festen Geraden parallelen Beschleunigung eine gegebene Curve. Wie ist diese Beschleunigung beschaffen, wenn die Grösse und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind?

Der Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes falle mit der Anfangslage des Punktes zusammen, die Beschleunigung φ sei nach der

Axe der x gerichtet und parallel zur Axe der y, alsdann sind die Bewegungsgleichungen der Punktes

$$v\frac{dv}{ds} = -\varphi\frac{dy}{ds}, \quad (1) \qquad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi\frac{dx}{ds}. \quad (2)$$

Durch Elimination von φ aus (1) und (2) erhalten wir

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\varrho}\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3},$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die Integration der letzten Gleichung giebt

$$lv = C + \frac{1}{2}l\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = C + l\frac{ds}{dx}.$$

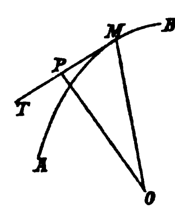
Bezeichnet nun v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und α den Winkel, welchen ihre Richtung mit der Abscissenaxe macht, so ist $l(v_0) = C + l(\sec\alpha)$, folglich $l\frac{v}{v_0} = l\frac{\frac{ds}{dx}}{\sec\alpha}$, oder $v = v_0\cos\alpha\frac{ds}{dx}$.

Substituieren wir diesen Wert von v in (2), dann ergiebt sich für die gesuchte Beschleunigung

$$\varphi = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{\varrho}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

Euler, Mechanica, Tom. I. p. 240.

3. Ein Punkt beschreibt infolge einer nach einem festen Centrum gerichteten Beschleunigung eine gegebene Curve. Wie ist die Bewegung dieses Punktes beschaffen?



Figur 54.

Es sei (Fig. 54) AMB die Bahn des Punktes, O das feste Centrum, M der Ort des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, MT die Tangente im Punkte M an die Bahn, OP senkrecht zu MT und gleich p, φ die Beschleunigung entlang MO, $\measuredangle OMT = \psi$. Damit ist, wenn die Bewegung in der Richtung MB erfolgt,

$$v\frac{dv}{ds} = -\varphi\cos\psi, \quad (1) \qquad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi\sin\psi. \quad (2)$$

Nun haben wir, weil $ds\cos\psi = dr$, $\varrho\sin\psi = r\frac{dr}{dp}\sin\psi = p\frac{dr}{dp}$, mit (1) und (2)

$$v\,d\,v = -\,\varphi\,d\,r, \quad (3) \qquad v^2 = \varphi\,p\,\frac{d\,r}{d\,p}. \quad (4)$$

Eliminierend φ aus (3) und (4) wird

$$\frac{d\,v}{v} = -\,\frac{d\,p}{p}, \quad \text{oder} \quad l\,(v) = C - l\,(p),$$

und wenn v_0, p_0 die Anfangswerte von v, p sind, weil dann $l(v_0) = C - l(p_0)$,

$$l\,\frac{v}{v_0} = l\,\frac{p_0}{p}, \quad \text{oder} \quad v = v_0\,\frac{p_0}{p}. \quad (5)$$

Ferner ist

$$\frac{d\,s}{d\,t} = v = v_0\,\frac{p_0}{p}, \quad \text{oder} \quad p\,d\,s = v_0\,p_0\,d\,t,$$

oder, wenn wir $p\,d\,s = d\,c'$ setzen, wo c' das Doppelte der von dem Radiusvektor bei seiner Bewegung von einer gewissen Position aus beschriebenen Fläche bezeichnet,

$$d\,c' = v_0\,p_0\,d\,t, \quad \text{so dass} \quad c' = v_0\,p_0\,t, \quad (6)$$

wobei gedacht ist, dass diese Fläche mit der Zeit anfängt.

Weiter erhalten wir mittelst (2)

$$\varphi = \frac{v^2}{\varrho\,sin\,\psi} = \frac{v^2}{p}\,\frac{d\,p}{d\,r}, \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{v_0{}^2\,p_0{}^2}{p^3}\,\frac{d\,p}{d\,r}, \text{ durch (5)}, \quad (7)$$

Bezeichnet c das Doppelte der in der Zeiteinheit von dem Radiusvektor durchfahrenen Fläche, dann ist, weil vermöge (6) $c = v_0\,p_0$, mit (6), (5), (7)

$$c' = c\,t, \quad (8) \qquad v = \frac{c}{p}, \quad (9) \qquad \varphi = \frac{c^2}{p^3}\,\frac{d\,p}{d\,r} = \frac{c^2\,r}{\varrho\,p^3}. \quad (10)$$

Die Gleichungen (8) und (9) wurden von Newton gegeben. (Principia, Lib. I. Prop. I.) Die Formel (10) entdeckte De Moivre im Jahre 1705, durch welchen sie ohne Beweis dem Johann Bernoulli mitgeteilt wurde. Bernoulli erhielt einen Beweis für diese Gleichung und schickte denselben De Moivre in einem Briefe zu (datirt: Basel, Feb. 16, 1706). Später wurden auch Erläuterungen durch Keill und Hermann gegeben. (Phil. Trans. Num. 317, 1708, und Phoronomia, p. 70.) Siehe auch: De Moivre, Miscell. Analyt. Lib VIII. Johann Bernoulli, Opera, Tom. I. p. 477.

Die Integration der Gleichung (3) giebt einen anderen Ausdruck für die Geschwindigkeit, nämlich mit r_0 als Fahrstrahl der Anfangslage

$$v^2 = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\,d\,r. \quad (11)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Geschwindigkeit des Punktes nur von seinem Centralabstande und nicht von dem beschriebenen Wege abhängig ist, ein durch Newton zuerst bewiesenes Theorem. (Principia, Lib. I. Prop. 40.)

Euler, Mechanica, Tom. I. p. 240.

4. Punkte werden geworfen mit derselben Geschwindigkeit und aus dem nämlichen Orte, aber in verschiedenen Richtungen, in einer Ebene und beschreiben Curven

um ein festes Beschleunigungscentrum. Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise der verschiedenen Bahnen am Wurfpunkte?

Der verlangte Ort ist eine gerade Linie, welche die Verbindungslinie des Centrums und Wurfpunktes rechtwinkelig schneidet.

1—4. Walton, p. 279—284.

Vierter Abschnitt.

Hodographe.

Bewegt sich ein Punkt in irgend einer Weise und zieht man von einem beliebigen festen Punkte O aus gerade Linien OP, welche die auf einander folgenden Geschwindigkeiten des Punktes nach Grösse und Richtung darstellen, so wird der Ort von P der **Hodograph** des Punktes genannt. Die Theorie des Hodographen ist Sir William Rovan Hamilton zu verdanken, welcher dieselbe der königlich irischen Akademie am 14. Dezember 1846 mitteilte. Siehe: Hamilton, Lectures on Quaterniones, 1853, und Elements of Quaterniones, 1866.

1. Ein Punkt beschreibt eine Bahn in einer Ebene infolge einer zu einer geraden Linie in dieser Ebene senkrechten Beschleunigung. Welches ist der Hodograph?

Es sei v die Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit, a die Projektion von v auf die gegebene Linie, ψ die Neigung der Tangente der Bahn des Punktes zu dieser Linie. Damit ist $v \cos \psi = a$, welches — weil a eine konstante Grösse — die Gleichung des Hodographen ist. Mithin ist der Hodograph eine zu der gegebenen Linie rechtwinkelige Gerade.

2. Ein Punkt beschreibt eine logarithmische Spirale um ein Beschleunigungscentrum in ihrem Pole. Welches ist die Gestalt des Hodographen?

Die Gleichung der von dem Punkte beschriebenen Curve ist $r = r_0{}^{\vartheta}$. nach Aufgabe 8, Absch. II., ist die Geschwindigkeit des Punktes $v = \frac{v_0 r_0}{r}$, folglich auch $v = v_0 r_0{}^{1-\vartheta}$, oder $v = a^{\vartheta'}$, wenn $v_0 r_0 = a$, $1 - \vartheta = \vartheta'$ gesetzt wird, welches die Gleichung der gesuchten Linie ist. Der Hodograph ist mithin auch eine logarithmische Spirale.

3. Zwei Punkte beschreiben in einer Ebene freie Bahnen, welche zu einander hodographisch sind. Wenn beide Punkte immer an entsprechenden Stellen sich befinden, zu bestimmen die Beschaffenheit ihrer Bahnen und die Art ihrer Beschleunigungen.

Die Bahnen sind Kegelschnitte, die Beschleunigungen sind centrisch und proportional den Abständen der Punkte von dem gemeinsamen Centrum.

4. Zu beweisen, dass die Beschleunigung eines Punktes zu einer beliebigen Zeit nach Grösse und Richtung dargestellt wird durch das mit dem Zeitelemente geteilte Element des Hodographen.

Hamilton, Proceedings of the Royal Irisch Academy, 1846—1847, No. 58, p. 345.

5. Bei einer beliebigen Bewegung eines freien Punktes verhält sich die Beschleunigung zu der Geschwindigkeit wie das Element des Hodographen zu dem entsprechenden Bahnelemente.

Hamilton, Ibid. p. 345.

6. Wenn ein Punkt eine Bahn um ein festes Centrum beschreibt, zu beweisen, dass die halbe Krümmungssehne des Hodographen (gehend durch das feste Centrum, oder gerichtet nach demselben) sich zu dem Radiusvektor der Bahn verhält wie das Element des Hodographen zu dem Elemente der Bahn.

Hamilton, Ibid. p. 346.

7. Unter denselben Verhältnissen wie vorhin zu beweisen, dass der Krümmungsradius des Hodographen zu dem Radiusvektor der Bahn, genannt „Positionsvektor", sich verhält wie das Rechteck aus dem Radiusvektor und der Beschleunigung zu dem Parallelogramm aus dem Positionsvektor und der Geschwindigkeit.

8. Wenn ein Punkt eine Bahn um ein festes Centrum mit einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Beschleunigung beschreibt, so ist der Hodograph ein Kreis.

9. Wenn der Hodograph eines Punktes, welcher eine Bahn um ein festes Centrum beschreibt, ein Kreis ist, so ist die Beschleunigung umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanz.

7—9. Hamilton, Ibid. p. 347.

10. Wenn zwei kreisförmige Hodographe, welche eine gemeinschaftliche, durch ein gemeinsames Beschleunigungscentrum gehende, oder nach demselben gerichtete Sehne besitzen, durch einen dritten Kreis senkrecht geschnitten werden, zu beweisen, dass die Zeiten hodographisch beschriebener Bögen gleich sind.

Hamilton, Ibid. No. 63, p. 417.
1—10. Walton, p. 295—297.

Zweite Abteilung.

Freie krummlinige Bewegung eines Punktes im widerstehenden Mittel.

Erster Abschnitt.

Die Richtung der Beschleunigung ist parallel zu einer festen, gegebenen Geraden.

1) Ein der Fallbeschleunigung unterliegender Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit von einem gegebenen Neigungswinkel zum Horizont in einem gleichförmigen Fluidum geworfen. Die Verzögerung durch das Mittel ist seiner Geschwindigkeit direkt proportional. Die Bewegung dieses Punktes soll untersucht werden.

Es bezeichne s die Länge der Bahn vom Anfangspunkte ($x = 0$, $y = 0$) der Bewegung, bis zu einem beliebigen Punkte (x, y), welcher in der Zeit t

erreicht wird, v_0 die Wurfgeschwindigkeit, α die Neigung der Wurfrichtung gegen die horizontale Abscissenaxe, so dass $v_0 \cos\alpha = a$, $v_0 \sin\alpha = b$ die Projektionen dieser Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen sind, k die Verzögerung durch den Widerstand des Mittels für die Einheit der Geschwindigkeit. Die Ebene der xy wird die Wurfrichtung enthaltend und vertikal gedacht.

Die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn ist $\frac{ds}{dt}$, daher die Beschleunigung, welche daselbst dem Beweglichen durch das Fluidum in der Richtung der Bahntangente entzogen wird, $k\frac{ds}{dt}$. Die Componenten dieser Beschleunigung parallel zu den Coordinatenaxen sind, weil ihre Richtung derjenigen der Geschwindigkeit v entgegengesetzt ist, $-k\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}$, $-k\frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds}$, $-k\frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds}$. Daher ist das Gleichungensystem für die Bewegung des Punktes

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}, & \frac{dx}{dt} = v_x; & x = 0,\ y = 0,\ z = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}, & \frac{dy}{dt} = v_y; & v_x = a,\ v_y = b,\ v_z = 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -k\frac{dz}{dt}, & \frac{dz}{dt} = v_z; & v = v_0 \end{array}\right\} \text{für } t = 0.$$

Die Integration der ersten Gleichungenreihe gestaltet sich wie folgt.

Die erste Gleichung geht mit $\frac{dx}{dt} = u$ über in $\frac{du}{dt} = -ku$, so dass $C - kt = l(u)$, und weil mit $t = 0$, $u = a$, so ist $C = l(a)$, mithin $-kt = l\frac{u}{a}$, oder

$$\frac{dx}{dt} = a e^{-kt} = v_x. \tag{1}$$

Durch nochmalige Integration folgt, weil x und t gleichzeitig verschwinden,

$$x = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}). \tag{2}$$

Setzen wir in der zweiten Gleichung $\frac{dy}{dt} = u$, so kommt $dt = -\frac{du}{g + ku}$, daher ist $t = C - \frac{1}{k}l(g + ku)$. Aber mit $t = 0$, ist $u = b$, folglich $C = (g + kb)$, mithin $kt = l\frac{g + bk}{g + ku}$, oder

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(e^{-kt} - 1) + b e^{-kt} = v_y. \tag{3}$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$y = C - \frac{g + kt}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t,$$

und weil gleichzeitig y und t verschwinden ist $C = \frac{g + bk}{k}$, folglich

$$y = \left(\frac{b}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}. \tag{4}$$

Durch die Integration der dritten Gleichung erhalten wir $v_z = 0$, $z = 0$. Der Punkt bewegt sich demnach in der Ebene der xy.

Aus (2) resultiert die Zeit als Funktion der Abscisse, nämlich

$$t = \frac{1}{k} l \frac{a}{a + kx}. \tag{5}$$

Eliminieren wir aus (2) und (4) die Zeit, so ergiebt sich die Bahngleichung

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{b}{a} + \frac{g}{ak}\right) x + \frac{g}{k^2} l \left(1 - \frac{kx}{a}\right), \\ \text{oder} \quad y &= \left(tg\,\alpha + \frac{g}{k v_0} \sec\alpha\right) x + \frac{g}{k^2} l \left(1 - \frac{kx}{v_0} \sec\alpha\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch Entwickelung des Logarithmus in eine Reihe wird

$$y = \frac{b}{a} x - \frac{g}{2a^2} x^2 - \frac{gk}{3a^3} x^3 - \cdots$$

und folgt aus dieser Gleichung mit $k = 0$ diejenige für die Bewegung im luftleeren Raume, nämlich

$$y = \frac{b}{a} x - \frac{g}{2a^2} x^2.$$

Im höchsten Punkte der Bahn ist die Vertikalgeschwindigkeit $v_y = 0$, so dass mit (3) die Zeit t_1, welche zur Erreichung dieser Stelle erforderlich ist,

$$t_1 = \frac{1}{k} l \left(1 + \frac{bk}{g}\right), \quad \text{also auch} \quad e^{-kt_1} = \frac{g}{g + bk}. \tag{7}$$

Die Coordinaten x_1, y_1 dieses Punktes sind mit (2), (4) und (7)

$$x_1 = \frac{ab}{g + bk}, \quad y_1 = \frac{b}{k} - \frac{g}{k^2} l \left(1 + \frac{bk}{g}\right) = \frac{b^2}{2g} - \frac{1}{3} \frac{b^3 k}{g^2} + \frac{1}{4} \frac{b^4 k^2}{g^3} - \cdots \tag{8}$$

Mit $k = 0$, geben die beiden letzten Gleichungen $x_1 = \frac{ab}{g}$, $y_1 = \frac{b^2}{2g}$, welches die bekannten Formeln für die Bewegung eines Punktes im leeren Raume sind. Die Punkte, in welchen die Bahn die Abscissenaxe schneidet, erhalten wir mit $y = 0$ in (6). Dadurch ergeben sich zwei Punkte mit den Abscissen $x = 0$, und $x = x_2$, wovon die letztere, die Wurfweite, sich nur annähernd bestimmen lässt. Ersetzen wir wieder den Logarithmus durch eine Reihe, so wird

$$0 = \frac{b}{a}x - \frac{g}{2a^2}x^2 - \frac{1}{3}\frac{gk}{a^3}x^3 - \frac{1}{4}\frac{gk^2}{a^4}x^4 - \dots$$

woraus folgt $x = 0$, und

$$x_2 = \frac{b}{a} - \frac{g}{2a^2}x - \frac{1}{3}\frac{gk}{a^3}x^2 - \frac{1}{4}\frac{gk^2}{a^4}x^3 - \dots.$$

Werden nun hier nur die drei ersten Glieder dieser Reihe berücksichtigt, so ergiebt sich in roher Annäherung

$$x_2 = \frac{3}{4}\frac{a}{k}\left\{\sqrt{1 + \frac{3}{16}\frac{bk}{g}} - 1\right\} \tag{9}$$

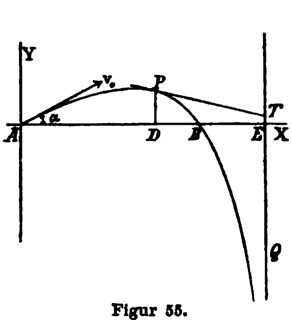
für die Wurfweite, welche mit $k = 0$, gleich $\frac{2ab}{g}$ ist.

Bezeichnet β die Horizontalneigung der Bahn an einer beliebigen Stelle, dann ist mit (6)

$$tg\,\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\left(b + \frac{g}{k}\right) - \frac{g}{ka}\frac{1}{a - kx}. \tag{10}$$

Weil der Logarithmus einer negativen Grösse imaginär ist, so kann die Abscisse x den Wert $\frac{a}{k}$ nicht überschreiten, es wird aber für $x = \frac{a}{k}$, $y = -\infty$, und daher ist diese Ordinate eine Asymptote an die Bahn. Lassen wir x in negativem Sinne wachsen, dann ergiebt sich keine Asymptote, denn für $x = -\infty$ ist die Neigung der Bahn durch die Relation bestimmt

$$tg\,\beta = \frac{1}{a}\left(b + \frac{g}{k}\right).$$



Figur 55.

Ist (Fig. 55) AB die Bahn, P ein beliebiger Bahnpunkt, $AE = \frac{a}{k}$, EQ die Asymptote, ziehen wir in P die Bahntangente, bezeichnen die Coordinaten von P, AD und DP mit x und y, den spitzen Winkel, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst, durch ϑ, so ist die Tangentenlänge zwischen Berührungspunkt und Asymptote

$$PT = (AE - x)\sec\vartheta = \left(\frac{a}{k} - x\right)\frac{ds}{dx} = \left(\frac{a}{k} - x\right)\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left(\frac{a}{k} - x\right)\frac{v}{v_x},$$

womit
$$v = \frac{k\,.\,PT}{a - kx}v_x = k\,.\,PT, \quad v\; prop.\, PT. \tag{11}$$

Folglich ist die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle proportional der Länge der Tangente daselbst zwischen Berührungspunkt und Asymptote. Die Geschwindigkeit v ist aber auch gegeben durch die Gleichung $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, womit wir erhalten

$$v^2 = a^2 e^{-2kt} + \frac{1}{k^2}\left\{(g + b\,k)\,e^{-kt} - g\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{(g + b\,k)[a\,b - (b + g)x]}{a}\right\}^2 + (a - k\,x)^2. \tag{12}$$

Die Vertikalgeschwindigkeit giebt die Gleichung (3). Hieraus folgt, dass bei bis ins Unendliche fortschreitender Bewegung, also mit $t = \infty$, $v = v_y = -\frac{g}{k}$, welches der Grenzwert von v ist, und es bewegt sich der Punkt mit dieser Geschwindigkeit im Unendlichen gleichförmig, ihr entspricht die Tangentenlänge $P\,T = \frac{g}{k^2}$.

Für die Zeit, welche bis dahin verfliesst, wo der Punkt die Bahnstelle mit der Horizontalneigung β erreicht, folgt aus (1) und (3), womit

$$\frac{d\,y}{d\,x} = tg\,\beta = \frac{g + b\,k - g\,e^{kt}}{a\,k},$$

nach einer kleinen Rechnung,

$$g\cos\beta\,(e^{kt} - 1) = v_0\,k\sin(\alpha - \beta), \tag{13}$$

mittelst welcher Gleichung t gefunden werden kann.

Werden unter gleichen Verhältnissen gleichzeitig von einem Orte aus im Mittel und in der Leere zwei Punkte geworfen, dann besteht zwischen den Zeiten t_1 und t_2, während welcher sie Bögen beschreiben, deren Tangenten in ihren Endpunkten gleiche Horizontalneigung besitzen, eine beachtenswerte Beziehung. Für die Bewegung im Fluidum ist $\frac{dy}{dx} = \frac{g(1 - e^{kt_1}) + b\,k}{a\,k}$, für diejenige im leeren Raume $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{b - g\,t_2}{a}$. Daher muss sein

$$\frac{g\,(1 - e^{kt_1}) + b\,k}{k} = b - g\,t_2,$$

folglich $$1 - e^{kt_1} = -k\,t_2,\ \text{oder}\ e^{kt_1} = 1 + k\,t_2. \tag{14}$$

Earnshaw, Dynamics.

2. Gegeben habend die Coordinaten des höchsten Punktes der durch einen schweren Punkt in der Leere beschriebenen Bahn, welcher unter gegebenem Elevationswinkel geworfen wird, zu finden die Abnahme dieser Coordinaten, wenn der Punkt in einem dünnen Medium unter denselben Verhältnissen geworfen wird und die Widerstandsbeschleunigung der Geschwindigkeit direkt proportional ist.

Lasse sein m, n die gegebenen Coordinaten, k die Verzögerung für die Geschwindigkeitseinheit, α den Wurfwinkel, dann ist

$$\delta\,m = -k\sqrt{\frac{m^3}{g}\,tg\,\alpha}, \quad \delta\,n = -k\sqrt{\frac{8\,n^3}{9\,g}}.$$

Walton, p. 295.

3. Ein schwerer Punkt wird in einem Medium, dessen Widerstandsbeschleunigung dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional ist, in einer gegebenen Richtung mit gegebener Geschwindigkeit geworfen. Die Bewegung dieses Punktes soll untersucht werden.

Erste Lösung. Wir wählen die Bezeichnungen und Anordnung des Coordinatensystemes so, wie bei der Lösung des ersten Problems dieses Abschnittes, und leiten die Componenten der Widerstandsbeschleunigung in derselben Weise ab, dann ist das Gleichungensystem für die Bewegung des Punktes

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dx}{ds} = -k\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -g-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dy}{ds} = -g-k\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dz}{ds} = -k\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt},
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
x &= y = z = 0, \\
v_x &= a = v_0 \cos\alpha, \\
v_y &= b = v_0 \sin\alpha, \\
v_z &= 0, \\
v &= v_0
\end{aligned}\right\}\text{für } t=0.$$

Zunächst haben wir die Integration der drei ersten Gleichungen zu bewirken.

Die erste dieser Gleichungen lässt sich schreiben

$$\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -k\,ds; \quad \text{so dass} \quad l\left(\frac{dx}{dt}\right) = -ks + C.$$

Mit Rücksicht auf die Anfangswerte finden wir $C = l(a)$, folglich wird

$$l\frac{\frac{dx}{dt}}{a} = -ks, \qquad \frac{dx}{dt} = v_x = a\,e^{-ks}. \tag{1}$$

Eliminieren wir aus der zweiten Differentialgleichung mittelst der ersten $k\,ds$, so ergiebt sich

$$g\,dt^2 = \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^2}\,dx = -dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{2}$$

und wenn wir hier aus (1) den Wert von dt einführen, sodann beide Seiten der resultierenden Gleichung mit $ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ multiplizieren, hierauf $\frac{dy}{dx} = p$ setzen

$$-\frac{g\,e^{2ks}\,ds}{a^2} = dp\sqrt{1+p^2}, \tag{3}$$

durch Integration dieser Gleichung wird

$$c - \frac{g\,e^{2ks}}{2ka^2} = \frac{p}{2}\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\,l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right). \tag{4}$$

Bei der Bestimmung der Integrationskonstanten ist zu berücksichtigen, dass mit $s = 0$, $p = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = tg\,\alpha$, womit

$$c = \frac{g}{2ka^2} + \frac{1}{2} tg\,\alpha \sqrt{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{2} l\left(tg\,\alpha + \sqrt{1 + tg^2\alpha}\right).$$

Der Kürze halber behalten wir aber für die nun bestimmte Konstante das Zeichen c bei.

Um noch s aus (4) zu entfernen, haben wir zu beachten, dass $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ ist, wodurch vermöge (3) $-g e^{2ks} dx = a^2 dp$. Den hieraus resultierenden Wert von e^{2ks} in die (3) substituiert, giebt

$$k\,dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) - 2c}, \tag{5}$$

und wenn wir mit $\frac{dy}{dx} = p$ multiplizieren

$$k\,dy = \frac{p\,dp}{p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) - 2c}. \tag{6}$$

Die Gleichung (2) zeigt, dass auch $g\,dt^2 = -dx\,dp$, wodurch mit (5)

$$\sqrt{kg}\,dt = \frac{-dp}{\left\{2c - p\sqrt{1+p^2} - l(p + \sqrt{1+p^2})\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Das negative Zeichen der Wurzelgrösse ist deshalb zu nehmen, weil für die aufsteigende Bewegung p ab- und t zunimmt, also dp und dt entgegengesetzte Zeichen haben müssen.

Für die Geschwindigkeit v an einer beliebigen Bahnstelle besteht die Relation

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

daher ist mit den Werten von dx, dy, dp aus (5), (6), (7)

$$v^2 = \frac{g}{k}\,\frac{1 + p^2}{2c - p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2})}. \tag{8}$$

Die Integration der Gleichungen (5), (6), (7) ist nur näherungsweise möglich, sie kann durch Reihenentwickelung oder durch Konstruktion bewirkt werden. Die erste Methode ist nur dann zulässig, wenn die Reihen konvergent sind. Im zweiten Falle wird für alle drei Curven p als Abscisse betrachtet, so dass x die Ordinate der Curve (5), y diejenige der Linie (6), t diejenige der Curve (7) ist. Die Anfangspunkte dieser Curven sind $x = 0$, $p = tg\,\alpha$; $y = 0$, $p = tg\,\alpha$; $t = 0$, $p = tg\,\alpha$. Werden für eine Reihe von Werten zwischen $p = tg\,\alpha$ und $p = 0$ die entsprechenden Werte von x, y, t ermittelt, diese Ordinaten verzeichnet und die entsprechenden Endpunkte derselben durch stetige Linienzüge verbunden, so erhalten wir eine Abscissen-, eine Ordinaten- und eine Zeitcurve für den

aufsteigenden Ast der Bahn, welcher sich nun mittelst der zusammengehörigen Werte von x und y konstruieren lässt. Der absteigende Ast ergiebt sich dadurch, dass die Werte von p zwischen 0 und $-\infty$ genommen werden, ebenso die entsprechende Zeitcurve. Die beiden Curvenäste, welche durch die dem höchsten Bahnpunkte angehörige Vertikale getrennt werden, sind nicht symmetrisch, der aufsteigende Ast ist weniger steil als der absteigende. Die Wurfweite ist kleiner als diejenige unter gleichen Verhältnissen im leeren Raume, auch wird das Maximum der Wurfweite mit einem unter 45° liegendem Elevationswinkel erreicht. Der absteigende Ast neigt sich rascher gegen die Abscissenaxe als der aufsteigende und wird, wenn die Bewegung bis ins Unendliche fortschreitet, parallel zur Ordinatenaxe, so dass die Curve eine Asymptote besitzt. Für den absteigenden Ast ist p negativ, daher für denselben durch (5)

$$k\,d\,x = \frac{-d\,p}{-p\sqrt{1+p^2} + l(-p+\sqrt{1+p^2}) - 2\,c}. \tag{9}$$

Berücksichtigen wir nun, dass $l(1) = 0$, also auch $l(1+p^2-p^2) = 0$, allein $(1+p^2-p^2) = (\sqrt{1+p^2}-p)(\sqrt{1+p^2}+p)$, folglich $l(\sqrt{1+p^2}+p) + l(\sqrt{1+p^2}-p) = 0$, so geht die (9) über in

$$k\,d\,x = \frac{d\,p}{p\sqrt{1+p^2} + l\,(\sqrt{1+p^2}+p) + 2\,c}.$$

Denken wir uns jetzt p so gross, dass $p\sqrt{1+p^2}$ mit p^2 vertauscht und $l(\sqrt{1+p^2}+p) + 2\,c$ gegen p^2 vernachlässigt werden kann, dann folgt

$$k\,d\,x = \frac{d\,p}{p^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$k\,x = -\frac{1}{p} + C.$$

Ist nun x' die Abscisse eines Curvenpunktes in dem sehr steilen Teile der Bahn unterhalb der Abscissenaxe, so wird für diesen Punkt p zu p' und es ist

$$k\,x' = -\frac{1}{p'} + C.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, $x > x'$ angenommen,

$$x = x' + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right).$$

Da aber p ins Unendliche wächst, wenn der Punkt nach dem Unendlichen fortrückt, so nähert sich $\frac{1}{p}$ dem Werte Null, und ist in der Grenze

$$x = x' + \frac{1}{k\,p'}.$$

Mithin nähert sich der absteigende Ast mehr und mehr einer vertikalen Geraden, welche eine Asymptote dieses Astes ist.

Bei unbegrenzt fortschreitender Bewegung nähert sich aber auch die Geschwindigkeit einem gewissen Grenzwerte. Nehmen wir in (8) p negativ und so gross, dass der Nenner des zweiten Bruches rechts mit p^2 vertauscht werden kann, dann wird in der Grenze

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

und die Beschleunigung durch das Fluidum gleich der Fallbeschleunigung.

Zweite Lösung. Die Bewegung des Punktes erfolgt in der Ebene, welche die Richtungen der Wurfgeschwindigkeit und der Fallbeschleunigung enthält. Diese Ebene sei die Coordinatenebene, die Lage der Coordinatenaxen nehmen wir wie vorhin. Mit Coriolis zerlegen wir die Beschleunigung des Punktes an einer beliebigen Bahnstelle in zwei Componenten, von denen die eine parallel zur Abscissenaxe, die andere parallel zur Bahnnormalen an der fraglichen Stelle. Dadurch ergeben sich zwei Gleichungen, in der einen erscheint die Widerstandsbeschleunigung, in der anderen die Fallbeschleunigung. Bezeichnet β die Horizontalneigung der Geschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle der Bahn, dann ist die zur Abscissenaxe parallele Beschleunigung $\frac{d(v\cos\beta)}{dt} = -kv^2\cos\beta$, folglich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v\cos\beta)}{dt} = -kv^2\cos\beta. \tag{1}$$

Die Acceleration in der Richtung der Bahnnormalen ist, wenn ϱ der Krümmungshalbmesser für den fraglichen Curvenpunkt, $\frac{v^2}{\varrho} = g\cos\beta$, und weil $\varrho = -\frac{ds}{d\beta}$, da $d\beta$ negativ ist, haben wir folglich

$$g\cos\beta = -v^2\frac{d\beta}{ds} = -v\frac{d\beta}{dt} = -\frac{ds}{dt}\frac{d\beta}{dt}. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) lässt sich auf die Form bringen

$$\frac{d(v\cos\beta)}{v\cos\beta} = -kv\,dt = -k\,ds,$$

so dass durch Integration

$$l(v\cos\beta) = -ks + C.$$

Beim Beginn der Bewegung ist aber $s = 0$, $v = v_0$, $\beta = \alpha$, daher $C = l(v_0\cos\alpha)$, und mithin

$$l\frac{v\cos\beta}{v_0\cos\alpha} = -ks, \qquad \text{oder} \qquad \frac{v\cos\beta}{v_0\cos\alpha} = e^{-ks},$$

so dass

$$v \cos\beta = \frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \cos\alpha \,.\, e^{-ks}. \tag{3}$$

Aus dieser Formel bestimmen wir v und setzen den dafür erhaltenen Wert in die erste der Gleichungen (2), dann wird

$$\frac{d\beta}{\cos^2\beta} = -\frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} e^{2ks} ds. \tag{4}$$

Hier sind nur β und s veränderlich, so dass wir eine Differentialgleichung der Bahncurve erhalten haben. Um diese Gleichung zu integrieren, setzen wir $tg\,\beta = p$, wodurch sie wird zu

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} e^{2ks} ds, \tag{5}$$

und es giebt deren Integration

$$p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) = -\frac{g}{{v_0}^2 k \cos^2\alpha} e^{2ks} + c. \tag{6}$$

Mit $s = 0$ ist $p = tg\,\alpha$, daher die willkürliche Konstante

$$c = tg\,\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha} + l\,(tg\,\alpha + \sqrt{1+tg^2\alpha} + \frac{g}{{v_0}^2 k \cos^2\alpha},$$

jedoch behalten wir für diesen Wert das Zeichen c bei.

Zwecks der Erlangung einer bequemeren Gleichung der Bahncurve führen wir für den Bogen s die Coordinaten x und y ein.

Es ist $dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}}$, so dass dadurch die (5) wird zu

$dx = -\frac{{v_0}^2 \cos^2\alpha}{g} e^{-2ks} dp$. Diese und die Gleichung (3) geben, wenn die Exponentialgrösse eliminiert wird

$$k\,dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) - c}, \tag{7}$$

und weil $dy = p\,dx$, so bekommen wir noch

$$k\,dy = \frac{p\,dp}{p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) - c}. \tag{8}$$

Werden diese beiden Gleichungen integriert, was nur näherungsweise geschehen kann, dann erhalten wir für jeden Wert von p entsprechende Werte von x und y und somit eine Reihe von Punkten der Flugbahn.

Die dritte der Gleichungen (2) sagt, dass $dt^2 = -\frac{ds\,d\beta}{g\cos\beta}$, und wenn wir aus (4) den Wert von ds bestimmen, dabei beachtend, dass dt und $d\beta$ entgegengesetzte Zeichen haben, dann den Wert hier substituieren, so ist

$$dt = -\frac{v_0 \cos\alpha}{g} e^{-ks} \frac{d\beta}{\cos^2\beta} = -\frac{v_0 \cos\alpha}{g} e^{-ks} dp.$$

Nun giebt noch die Elimination der Exponentialgrösse mittelst (6)

$$\sqrt{kg}\,dt = \frac{-dp}{\{c - p\sqrt{1+p^2} - l(p + \sqrt{1+p^2})\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

womit die Flugzeit annähernd bestimmt werden kann.

Für die Geschwindigkeit verfahren wir ebenso, wie bei der ersten Lösung angegeben, es ist

$$v^2 = \frac{g}{k} \frac{1+p^2}{c - p\sqrt{1+p^2} - l(p + \sqrt{1+p^2})}. \tag{10}$$

Die Gleichungen (7) bis (10) sind identisch mit den Gleichungen (5) bis (8) der ersten Lösung, die Konstante c hier und diejenige $2c$ dort sind gleichwertig. Alle weiteren Betrachtungen bleiben dieselben wie vorhin.

Ist der Elevationswinkel α sehr klein, dann weicht der über der Abscissenaxe liegende Teil der Bahnkurve nur wenig von dieser Axe ab, und kann in diesem Falle $ds = dx$, $s = x$ näherungsweise gesetzt, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigt werden, wodurch sich eine angenäherte Gleichung der Bahnkurve entwickeln lässt. Unter dieser Voraussetzung gehen die Relationen (1) und (3) der ersten Lösung des allgemeinen Falles über in

$$dt = \frac{1}{a} e^{kx} dx, \quad (1) \qquad g e^{2kx} dx = a^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (2)$$

Die Integration der (1) giebt

$$t = \frac{1}{ak}(e^{kx} - 1), \tag{3}$$

denn die willkürliche Konstante ist $C = -\frac{1}{ak}$, weil t und x gleichzeitig verschwinden.

Indem wir die (2) integrieren, wird, weil mit $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} + \frac{g}{2ka^2}(1 - e^{2kx}) = tg\,\beta. \tag{4}$$

Die nochmalige Integration liefert, weil x und y gleichzeitig verschwinden,

$$y = \left(\frac{b}{a} + \frac{g}{2ka^2}\right)x - \frac{g}{4k^2a^2}(e^{2kx} - 1). \tag{5}$$

Durch die Gleichung (3) erhalten wir die Flugzeit, die Formel (5) giebt die Bahn des Punktes. Für den höchsten Bahnpunkt ist $\frac{dy}{dx} = 0$, daher die Abscisse dieses Punktes mit (4)

$$x_1 = \frac{1}{2k} l\left(1 + \frac{2k}{g}ab\right).$$

Ist x_1 gefunden, dann kann mit (5) die zugehörige Ordinate y_1 berechnet werden.

Setzen wir in (5) $y = 0$, so werden die Abscissen der Durchschnittspunkte der Bahn und der Abscissenaxe gefunden, sie folgen aus der Gleichung

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{g}{2ka^2}\right)x = \frac{g}{4k^2a^2}(e^{2kx} - 1). \tag{6}$$

Diese Formel liefert zwei Werte von x, der eine entspricht dem Anfangspunkte der Bewegung, der andere der Wurfweite.

Die Formeln (6) und (3) können zur Bestimmung des Coëfficienten k verwendet werden. Im ersten Falle müssen bekannt sein der Wurfwinkel und die Wurfweite, im zweiten die Zeit, innerhalb welcher ein bestimmter Punkt der Bahn erreicht wird, und dessen Abscisse. Diese Grössen sind durch Beobachtung zu ermitteln.

Die soeben behandelte Aufgabe kann auch dadurch gelöst werden, dass wir die auf den Punkt wirkenden Beschleunigungen in tangentialer und normaler Richtung zur Bahn zerlegen, die Gleichungen für diese Componenten sind

$$\frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds} = -kv^2 - g\frac{dy}{ds}, \quad (1) \qquad \frac{v^2}{\varrho} = g\frac{dx}{ds}. \quad (2)$$

Aus (2) folgt

$$v^2 = g\frac{dx}{ds}\varrho = -g\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\,\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad v^2 = -g\frac{1+p^2}{q}, \tag{3}$$

wenn geschrieben wird $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$. Indem wir nun v zwischen (1) und (3) eliminieren, gelangen wir zu

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1+p^2}{q}\right) + 2k\frac{1+p^2}{q} - 2\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1+p^2}{q}\right) + 2k\frac{1+p^2}{q}\frac{ds}{dx} - 2p = 0,$$

$$\frac{d}{dx}l\frac{1+p^2}{q} + 2k\frac{ds}{dx} - 2\frac{pq}{1+p^2} = 0.$$

Die Integration der letzten Gleichung giebt

$$l\frac{1+p^2}{q} + 2ks + l(C) - l(1+p^2) = 0,$$

wenn $l(C)$ die willkürliche Konstante bedeutet, so dass

$$l\frac{C}{q} + 2ks = 0, \qquad q = Ce^{2ks}. \tag{4}$$

Beim Beginn der Bewegung ist aber $s = 0$, $v = v_0$, $\frac{dy}{dx} = p = tg\,\alpha$, mithin durch (4) und (3)

$$C = q, \quad v_0{}^2 = -g\frac{1+tg^2\alpha}{q},$$

daher $C = -\frac{g}{v_0{}^2 cos^2 \alpha}$, folglich mit (4) $q = -\frac{g}{v_0{}^2 cos^2 \alpha} e^{2ks}$.

Weil der Wurfwinkel klein ist, so können wir alle Potenzen von p über die erste hinaus vernachlässigen, wodurch annähernd

$$s = \int_0^x \sqrt{1+p^2}\, dx = \int_0^x dx = x, \quad \text{folglich} \quad q = -\frac{g}{v_0{}^2 cos^2 \alpha} e^{2kx}.$$

Multiplizieren wir mit dx und integrieren, so kommt

$$p = C - \frac{g}{2kv_0{}^2 cos^2 \alpha} e^{2kx}, \quad C = \frac{g}{2kv_0{}^2 cos^2 \alpha} + tg\, \alpha,$$

weil mit $x = 0$, $p = tg\, \alpha$ ist, mithin wird

$$p = tg\, \alpha + \frac{g}{2kv_0{}^2 cos^2 \alpha}(1 - e^{2kx}).$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$y = C + tg\, \alpha . x + \frac{g}{2kv_0{}^2 cos^2 \alpha}\left(x - \frac{1}{2k} e^{2kx}\right).$$

Durch das gleichzeitige Verschwinden von x und y ist $C = \frac{g}{4k^2 v_0{}^2 cos^2 \alpha}$,

daher die Gleichung der Bahn

$$y = \left(tg\, \alpha + \frac{g}{2kv_0{}^2 cos^2 \alpha}\right) x - \frac{g}{4k^2 v_0{}^2 cos^2 \alpha}(e^{2kx} - 1). \qquad (5)$$

Die Gleichung (6) der ersten Lösung und diese Gleichung sind identisch. Die letzte Lösung stammt von Moreau.

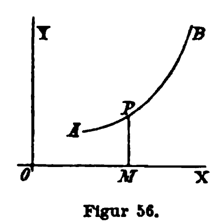
Journal de l'Ecole Polytech. Cahier XI. p. 215.

Das allgemeine Problem der Bestimmung der Bahn eines Wurfgeschosses in einem gleichförmigen Fluidum, dessen Widerstandsbeschleunigung dem Quadrate der Geschwindigkeit des Punktes direkt proportional ist, wurde dem Johann Bernoulli im Februar 1817 von Keill vorgeschlagen, denselben herausfordernd, durch die Lösung dieser Aufgabe einen Beweis von seiner Geschicklichkeit zu geben. Keill, vertrauend auf die Zusammengesetztheit der Untersuchung, welche möglicherweise Newton von dem Versuche einer regelrechten Lösung der Aufgabe im zweiten Buche der Principia abgehalten hat, gab sich der Hoffnung hin, dass die Bemühungen Bernoullis erfolglos bleiben würden. Bernoulli gelangte indessen rasch zu einer Lösung, und zwar nicht nur für Keills Problem, sondern auch für den allgemeinen Fall, in welchem die Widerstandsbeschleunigung direkt proportional der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit des Punktes ist. Jetzt gab dieser den Entschluss kund, seine Untersuchungen nicht eher zu veröffentlichen, als bis er davon Andeutung erhalten habe, dass sein Gegner imstande gewesen sei, seine eigene Aufgabe zu lösen. Auch noch den Monat September gab er Keill zur Beschäftigung seiner Talente, dabei erklärend, dass er sich berechtigt fühlen werde, die Geschicklichkeit seines Gegners in Frage zu ziehen, wenn in dieser Zeit eine befriedigende Mitteilung nicht eintreffen würde. Auf das Ansuchen eines gemeinschaftlichen Freundes sah sich Bernoulli bewogen, den Zeitabschnitt des ersten November zu erwarten. Es stellte sich jedoch heraus, dass Keill keine Lösung erhalten konnte. Endlich teilte Nikolaus Bernoulli, Professor der Mathematik in Padua, eine Lösung von Keills Problem dem Johann Bernoulli mit, welche der Verfasser später auf ein allgemeineres ausdehnte. Am 17. November erhielt J. Bernoulli davon Kenntnis, dass

Brook Taylor eine Lösung erzielt hatte. Johann Bernoulli veröffentlichte seine eigene Abhandlung und diejenige seines Neffen Nikolaus 1719; Acta Erudit. Lips. mai. p. 216. Siehe auch seine Opera, Tom. II, p. 393. Zur weiteren Kenntnisnahme dieses berühmten Problemes mag der Leser selbst benutzen die Arbeiten von Euler (Mém. de l'Acad. de Berlin, 1753), Borda (Ib. 1769), Legendre (Ib. 1782), Templehoff (Ib. 1788 bis 89) und Moreau (Journal de l'Ecole Polytech. Cahier XI. p. 204).

Autenheimer, Elementarbuch der Differentialrechnung etc. Schlömilch, Analyt. Mechanik. Walton, p. 289—292.

3. Ein in einem Fluidum sich bewegender Punkt ist einer Beschleunigung unterworfen, deren Richtung stets parallel zu einer festen Geraden ist. Welches ist die Verzögerung durch das Fluidum, wenn der Punkt irgend eine vorausgesetzte Curve beschreibt, und umgekehrt.



Figur 56.

Die Lage des Punktes werde auf zwei rechtwinkelige Axen OX, OY, letztere parallel zur Richtung der Beschleunigung, bezogen. APB (Fig. 56) sei die von dem Punkte beschriebene Bahn, P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, $PM \perp OX$, $OM = x$, $MP = y$, $AP = s$, Y die Beschleunigung, v die Geschwindigkeit, w die Widerstandsbeschleunigung des Punktes in P. Indem wir die Accelerationen in tangentialer und normaler Richtung zur Bahn zerlegen, sind die Gleichungen der Bewegung des Punktes, welche in der Coordinatenebene erfolgt, da wir annehmen, dass dieselbe durch die Anfangslage des Punktes geht,

$$v\frac{dv}{ds} = -w + Y\frac{dy}{ds}, \quad (1) \qquad \frac{v^2}{\varrho} = Y\frac{dx}{ds}. \quad (2)$$

Nun ist $\varrho = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2y}{dx^2}$, folglich mit (2)

$$v^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} Y.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt, weil $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$,

$$v\frac{dv}{dx} = Y\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right), \quad v\frac{dv}{ds} = Y\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

folglich erhalten wir mit (1)

$$w = -\frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right), \quad (3)$$

wodurch die Beschleunigung durch das Mittel, wenn die Bahn des Punktes

gegeben, bestimmt ist, und umgekehrt. $\varrho \frac{dx}{ds}$ ist gleich der halben zu OY parallelen Krümmungssehne für den Bahnpunkt P, daher auch, wenn q die Länge der Sehne bezeichnet,

$$v^2 = 2Y\frac{1}{4}q.$$

Die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle ist gleich derjenigen, welche der Punkt erlangt, wenn er mit konstanter Beschleunigung den vierten Teil der Krümmungssehne durchfällt.

Die Lösung dieses Problemes, welche Newton in der ersten Ausgabe der Principia veröffentlicht hat, schloss gewisse Irrtümer in sich, sie wurde später nach der Angabe von Johann Bernoulli verbessert.

Ist das Fluidum gleichförmig und die Widerstandsbeschleunigung dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportional, so haben wir

$$w = kv^2 = k\varrho\frac{dx}{ds}Y, \text{ durch (2)},$$

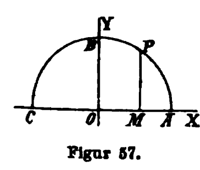
mithin

$$k = \frac{w}{Y}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{ds}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{Y}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

$$k = -\frac{1}{2}\frac{dx}{ds}\,l\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right). \tag{4}$$

Newton, Principia, Lib. II. Prop. 10. Johann Bernoulli, Act. Erudit, Lips. 1713; Opera, Tom. I, p. 514. Walton, p. 285—87.

4. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einem Fluidum, welches eine der Dichtigkeit und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportionale Widerstandsbeschleunigung erzeugt, in einer halbkreisförmigen Bahn. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung, die Geschwindigkeit und das Dichtigkeitsgesetz?



Figur 57.

Es sei (Fig. 57) OA ein horizontaler, OB ein vertikaler Radius der halbkreisförmigen Bahn ABC des Punktes, OAX die Abscissen-, OBY die Ordinatenaxe, P ein beliebiger Bahnpunkt, $PM \perp OX$, $OM = x$, $MP = y$, $a =$ dem Halbmesser der Bahn, g die Fallbeschleunigung.

Aus der Bahngleichung $x^2 + y^2 = a^2$ folgt $\frac{dy}{dx} = -x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{ds}{dx} = a(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Setzen wir diese Werte

in die Formel (3) der vorhergehenden Aufgabe ein und beachten, dass jetzt $Y = g$ ist, so ergiebt sich für die Widerstandsbeschleunigung

$$w = \frac{3}{2}\frac{g}{a}x. \tag{1}$$

Für die Geschwindigkeit folgt mit (2) unter 3, da $\varrho = a$ ist,

$$v^2 = g\sqrt{a^2 - x^2} = g y. \tag{2}$$

Endlich ist mit (4) unter 4, oder mit (1) und (2),

$$k = \frac{3}{2a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{3}{2ay}. \tag{3}$$

Newton, Principia, Lib. II. Prop. 10, Ex. 1. Johann Bernoulli, Act. Erudit. Lips. 1713. Euler, Mechan., Tom. II, p. 392. Walton, p. 292.

5. Ein schwerer Punkt beschreibt in einem Fluidum eine in einer vertikalen Ebene liegende Parabel $y = b - cx^n$ mit vertikaler Axe. Welches sind die Gleichungen für w, v und k, wenn $k = \frac{w}{v^2}$?

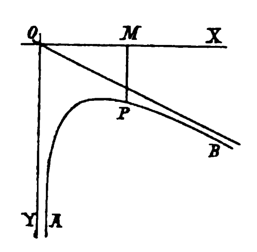
$$w = \frac{(n-2)\sqrt{1 + n^2c^2x^{2(n-1)}}}{2n(n-1)cx^{n-1}}\,g;\; v^2 = \frac{1 + n^2c^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)cx^{n-2}}\,g;\; k = \frac{n-2}{2x\sqrt{1 + n^2c^2x^{2(n-1)}}}.$$

Mit $n = 2$, also wenn die Bahnkurve eine gewöhnliche Parabel ist, ergiebt sich

$$w = 0, \quad v^2 = \frac{1 + 4c^2x^2}{2c}\,g, \quad k = 0.$$

Damit zeigt es sich, dass die Widerstandsbeschleunigung, wenn ein schwerer Punkt in einer Parabel zweiter Ordnung sich bewegt, gleich Null ist.

6. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einem Fluidum und beschreibt eine Hyperbel irgend welcher Art, eine ihrer Asymptoten ist vertikal. Die Widerstandsbeschleunigung ist kv^2 und die Dichtigkeit des Fluidums veränderlich. Welches sind die Grössen w, v und k?



Figur 58.

Es sei (Fig. 58) APB die Bahn des Punktes, OY, die vertikale Asymptote der Curve, Ordinatenaxe, positiv vertikal abwärts, die horizontale Gerade OX Abscissenaxe, die Gleichung der Hyperbel $y = \alpha x + \frac{\beta^{n+1}}{x^n}$, dann ergiebt sich

$$w = \frac{1}{2}\frac{(n+2)g}{n(n+1)\beta^{n+1}}\sqrt{x^{2(n+1)} + (\alpha x^{n+1} - n\beta^{n+1})^2},$$

$$v^2 = \frac{x^{2(n+1)} + (\alpha x^{n+1} - n\beta^{n+1})^2}{n(n+1)\beta^{n+1}x^n},$$

$$k = \frac{w}{v^2} = \frac{1}{2}\frac{(n+2)x^n}{\sqrt{x^{2(n+1)} + (\alpha x^{n+1} - n\beta^{n+1})^2}}.$$

In dem Spezialfalle $n = 2$ folgt hierdurch:

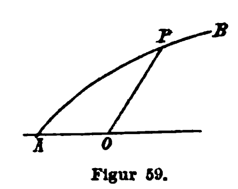
$$w = \frac{1}{3}\frac{g}{\beta^3}\sqrt{x^6 + (\alpha x^3 - 2\beta^3)^2}, \quad v^2 = \frac{x^6 + (\alpha x^3 - 2\beta^3)^2}{6\beta^3x^2}, \quad k = \frac{2x^2}{\sqrt{x^6 + (\alpha x^3 - 2\beta^3)^2}}.$$

Euler, Mechanica, Tom. II, p. 400. Walton, p. 293.

Zweiter Abschnitt.

Centralbewegung eines Punktes.

1. Ein Punkt wird in einem Fluidum nach einem festen Centrum beschleunigt. Welches ist das Gesetz der Widerstandsbeschleunigung, wenn die Bahn des Punktes gegeben ist, und umgekehrt?



Figur 59.

Ist (Fig. 59) APB die Bahn des Punktes, O das feste Centrum, $AP = s$, $OP = r$, $p =$ der Senkrechten von O auf die Bahntangente in P, $v =$ der Geschwindigkeit, $\varrho =$ dem Krümmungshalbmesser, $w =$ der Widerstandsbeschleunigung daselbst, so haben wir, durch Zerlegung der Beschleunigung φ in tangentialer und normaler Richtung zur Bahn,

$$v\frac{dv}{ds} = -w - \varphi\frac{dr}{ds}, \quad (1) \qquad \frac{v^2}{\varrho} = \frac{p}{r}\varphi. \quad (2)$$

Weil aber $\varrho = r\dfrac{dr}{dp}$ ist, so ergiebt sich mit (2)

$$v^2 = p\frac{dr}{dp}\varphi, \tag{3}$$

und daher, wenn wir in Bezug auf s differentiieren

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right)\frac{1}{p^2}\right\} = \frac{1}{p^3}\frac{dp}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right) + \frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right),$$

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{dr}{ds}\varphi + \frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right),$$

folglich erhalten wir durch Substitution dieses Wertes von $v\dfrac{dv}{ds}$ in (1)

$$w = -\frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right), \tag{4}$$

womit das Gesetz der Widerstandsbeschleunigung bei gegebener Bahn bestimmt ist, und umgekehrt. In dem Spezialfalle $w = kv^2$ folgt mit (3)

$$w = kp\frac{dr}{dp}\varphi,$$

und daher vermöge (4)

$$k = -\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right)}{p^3\frac{dr}{dp}\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}l\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right), \tag{5}$$

welche Gleichung die Variation der Dichtigkeit des Fluidums bestimmt, wenn die Bahn des Punktes gegeben ist, und umgekehrt.

Bezeichnet q die Länge der Krümmungssehne durch O, dann ist mit (2)

$$v^2 = \frac{p}{r}\varrho\,\varphi = \frac{1}{2}q\,\varphi, \qquad v^2 = 2\,\varphi\,\frac{q}{4}. \tag{6}$$

Daher ist die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle gleich derjenigen, welche der Punkt erlangen würde, wenn er, direkt nach dem Centrum sich bewegend, den vierten Teil der Krümmungssehne zurücklegte. Mit (4) erhalten wir

$$p^3\frac{d\,r}{d\,p}\varphi = c^2\,e^{-2\int w\,ds}, \qquad \varphi = \frac{c^2}{p^3}\frac{d\,p}{d\,r}e^{-2\int w\,ds}, \tag{7}$$

wenn c eine konstante Grösse bedeutet. Diese Formel giebt die Centralbeschleunigung, wenn die Beschaffenheit von w und die Bahn gegeben sind.

Setzen wir $\sphericalangle A\,O\,P = \vartheta$, dann lässt sich zeigen, dass

$$\frac{c^2}{p^3}\frac{d\,p}{d\,r} = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}$$

und daher wird auch sein

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}e^{-2\int w\,ds}. \tag{8}$$

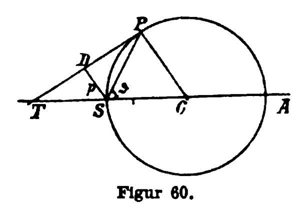
Mit $w = 0$ folgt hieraus

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\},$$

welches Binets Formel für die Centralbeschleunigung bei der Bewegung im leeren Raume ist.

Newton, Principia, Lib. II. Prop. 17, 18. Johann Bernoulli, Opera. Tom. IV, p. 347. Euler, Mechan., Tom. I, p. 428, et seq., p. 451. et seq. Walton, p. 287—289.

2. Ein Punkt beschreibt in einem Fluidum einen Kreis vermöge einer nach einem Punkte seines Umfanges gerichteten, einer beliebigen Potenz der Entfernung direkt proportionalen Beschleunigung. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung, die Geschwindigkeit des Punktes und die Dichtigkeit des Mittels, wenn $w = k\,v^2$?



Figur 60.

Es sei (Fig. 60) P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, seine Bewegung finde nach dem Centrum S hin statt, C der Mittelpunkt der Bahn, $S\,P = r$, $\sphericalangle P\,S\,A = \vartheta$, $C\,S = a$, die Beschleunigung $= \mu\,r^n$.

Mit S als Pol und $S\,C\,A$ als Polaraxe ist die Polargleichung der Bahn

$$r = 2\,a\cos\vartheta. \tag{1}$$

Ziehen wir die Kreistangente $P\,T$ und auf dieselbe die Normale $S\,D = p$, so lässt sich leicht zeigen, dass

$$p = r\cos\vartheta = 2\,a\cos^2\vartheta. \tag{2}$$

Ferner ist, weil der Krümmungshalbmesser der Bahn $\varrho = a$,

$$r\frac{dr}{dp} = a \qquad \frac{dr}{dp} = \frac{a}{r} = \frac{1}{2\cos\vartheta}. \tag{3}$$

Für das Bogenelement haben wir $ds^2 = \left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\} d\vartheta^2$ und, weil $\frac{dr}{d\vartheta} = -2a\sin\vartheta$, hiermit

$$\frac{ds}{d\vartheta} = 2a, \quad \text{oder} \quad \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{2a}. \tag{4}$$

Nun ergiebt sich mit (4) unter 1, (2) und (3)

$$w = -\frac{1}{2^3\cos^4\vartheta}\frac{d}{ds}\left\{2^3 a^3 \cos^6\vartheta \frac{1}{2\cos\vartheta}\mu(2a\cos\vartheta)^n\right\}.$$

$$w = -\frac{\mu 2^n a^{n+1}}{2\cos^4\vartheta}\frac{d}{ds}(\cos^{n+5}\vartheta) = \mu 2^{n-1} a^{n+1}(n+5)\cos^n\vartheta \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds}$$

und mit Rücksicht auf (4)

$$w = \frac{1}{4}\mu(5+n)(2a\cos\vartheta)^n \sin\vartheta = \frac{1}{4}\mu(5+n)r^n \sin\vartheta, \tag{5}$$

womit die Widerstandsbeschleunigung bestimmt ist.

Die Geschwindigkeit v folgt aus den Gleichungen (3) unter 1, (2) und (3), es ergiebt sich

$$v^2 = \frac{1}{2}\mu r^{n+1}. \tag{6}$$

Schliesslich erhalten wir

$$k = \frac{w}{v^2} = \frac{1}{2}\mu(5+n)\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

Mit $n = 1$ ist die Beschleunigung der Entfernung direkt proportional, in welchem Falle mithin

$$w = \frac{3}{2}\mu r \sin\vartheta, \qquad v^2 = \frac{1}{2}\mu r^2, \qquad k = 3\mu\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

Wenn die Beschleunigung dem Quadrate der Distanz direkt proportional, also $n = 2$ ist, ergiebt sich

$$w = \frac{7}{4}\mu r^2 \sin\vartheta, \qquad v^2 = \frac{1}{2}\mu r^3, \qquad k = \frac{7}{2}\mu\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

3. Ein Punkt beschreibt einen Kreis infolge einer stets nach seinem Mittelpunkte gerichteten Beschleunigung. Die Widerstandsbeschleunigung ist konstant. Welches ist die Beschleunigung, die Geschwindigkeit, der Weg und die Zeit, wenn der Punkt in seiner Ruhelage ankommt?

Es sei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes, a der Halbmesser der Bahn, ε die konstante Widerstandsbeschleunigung. Für die Bewegung des Punktes bestehen hier die allgemeinen Gleichungen

$$v^2 = p\frac{dr}{dp}\varphi, \quad (1) \qquad w = -\frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}\varphi\right), \quad (2) \qquad \frac{ds}{dt} = v. \quad (3)$$

Im vorliegenden Falle ist $p = a, \frac{dr}{dp} = 1, \quad v = v_0, \quad s = 0,$ wenn $t = 0.$

Mit (1) und diesen Werten ergiebt sich

$$v^2 = a\varphi, \quad \varphi = \frac{v^2}{a}, \text{ wenn } t = t, \quad \varphi = \frac{v_0{}^2}{a}, \text{ wenn } t = 0. \qquad (4)$$

Aus (2) folgt

$$\varphi = -\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr}\int p^2 w\,ds = -\frac{2\varepsilon}{a}\int ds = \frac{2\varepsilon}{a}s + C.$$

Aber mit $s = 0$ ist $\varphi = \frac{v_0{}^2}{a}$, also $C = \frac{v_0{}^2}{a}$, mithin

$$\varphi = \frac{1}{a}(v_0{}^2 - 2\varepsilon s). \qquad (5)$$

Jetzt ergiebt sich mit (4) und (5)

$$v^2 = v_0{}^2 - 2\varepsilon s. \qquad (6)$$

Der Weg, welchen der Punkt bis dahin zurücklegt, wo die Geschwindigkeit gleich Null wird, folgt aus (6) mit $v = 0$, er ist

$$s = \frac{v_0{}^2}{2\varepsilon}. \qquad (7)$$

Für die Zeit erhalten wir mit (3) und (6)

$$t = \int\frac{ds}{v} = \int_0^s\frac{ds}{\sqrt{v_0{}^2 - 2\varepsilon s}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(v_0 - \sqrt{v_0{}^2 - 2\varepsilon s}\right) \qquad (8)$$

und ist schliesslich mit (7) und (8) die bis zum Verschwinden der Bewegung verstreichende Zeit

$$t = \frac{v_0}{\varepsilon}.$$

4. Ein Punkt bewegt sich in einer logarithmischen Spirale mit einer nach ihrem Pole gerichteten Beschleunigung. Die Bewegung findet in einem Medium statt, dessen Widerstandsbeschleunigung direkt proportional einer beliebigen Potenz der Entfernung vom Pole ist. Wie gross ist die Beschleunigung?

Es sei α der konstante Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor der Bahn, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, a die Anfangsdistanz des Punktes vom Pole, kr^n die Widerstandsbeschleunigung in der Entfernung r, dann wird gefunden werden

$$\varphi = \frac{(n+3)a^2 v_0{}^2 \cos\alpha + 2k(r^{n+3} - a^{n+3})}{(n+3)r^3\cos\alpha}.$$

Euler, Mechan., Tom I, p. 442. Walton, p. 294.

5. Ein Punkt bewegt sich in einer gleichwinkeligen Spirale vermöge einer nach ihrem Pole gerichteten, einer beliebigen Potenz seiner Poldistanz direkt proportionalen Beschleunigung. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung und der Wert des Coëfficienten k, wenn $w = kv^2$ ist?

Bezeichnet α den konstanten Winkel, r den Fahrstrahl eines beliebigen Bahn-

punktes, μr^n die Acceleration, und nähert sich der Punkt bei seiner Bewegung dem Pole, so wird gefunden werden

$$w = \frac{1}{2}\mu(n+3)r^n \cos\alpha, \qquad k = \frac{1}{2}(n+3)\frac{\cos\alpha}{r}.$$

Newton, Principia, Lib. II. Prop. 15, 16. Johann Bernoulli, Opera, Tom. IV, p. 350. Walton, p. 293.

Viertes Kapitel.

Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

Die Bewegung eines Punktes ist vollständig bestimmt durch seine Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigung, er beschreibt dadurch eine ganz bestimmte Bahn nach einem Gesetze, welches die notwendige Folge dieser Bestimmungsstücke ist. Wird ausserdem noch die von dem Punkte zu durchlaufende Bahn vorgeschrieben, so ist es nur dann möglich, wenn noch ein gewisser Zwang hinzutritt, welcher den Punkt nötigt, sich in dieser vorgeschriebenen Bahn anstatt in jener zu bewegen, welche er bei freier Bewegung beschreibt. Dieser Zwang wird je nach den Umständen, welche ihn hervorbringen, Widerstand der Bahn, Druck oder Spannung, die ihm äquivalente Beschleunigung Widerstandsbeschleunigung, Druck- oder Spannungsbeschleunigung genannt.

Erfolgt die Bewegung eines Punktes auf einer doppelt gekrümmten Linie, sind X, Y, Z die Componenten der gegebenen Beschleunigung φ des Punktes, N_x, N_y, N_z diejenigen der Widerstandsbeschleunigung N, welche ihrer Richtung nach mit der Bahnnormalen in dem Kurvenpunkte (x, y, z), der der augenblicklichen Lage des beweglichen Punktes entspricht, zusammenfällt, parallel zu den Axen eines beliebig gelegenen rechtwinkeligen Coordinatensystemes, so ist das System der Bewegungsgleichungen des Punktes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y, \quad (2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z, \quad (3)$$

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2, \quad (4) \qquad N_x\frac{dx}{ds} + N_y\frac{dy}{ds} + N_z\frac{dz}{ds} = 0, \quad (5)$$

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad (6) \qquad \Psi(x, y, z) = 0. \quad (7)$$

Die drei ersten Gleichungen geben die Beschleunigungen in den Richtungen der Coordinatenaxen, durch die Formel (4) erhalten wir die Beschleunigung des Widerstandes, wenn ihre Projektionen auf die Coordinatenaxen gegeben sind; die fünfte Relation thut dar, dass die Widerstandsbeschleunigung senkrecht zur Bahntangente ist; die Gleichungen (6) und (7) sind diejenigen der Bahn.

Projizieren wir die Beschleunigungen X, Y, Z, N_x, N_y, N_z auf die entsprechende Bahntangente und bilden die Summe aus diesen Projektionsbeschleunigungen, so ist dieselbe die Beschleunigung des Punktes in der Richtung der Tangente, nämlich

$$\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = P. \quad (8)$$

Ferner ist, wenn v die Geschwindigkeit im Bahnpunkte (x, y, z) bezeichnet,

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + C = 2\int S\,ds + C, \quad (9)$$

und kann die Integrationskonstante bestimmt werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangslage des Punktes bekannt sind.

Um die Beschleunigung des Widerstandes zu finden, multiplizieren wir (1) mit $\cos\alpha$, (2) mit $\cos\beta$, (3) mit $\cos\gamma$, wobei α, β, γ die von der Richtung der Bahnnormalen und den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel sind, addieren die resultierenden Gleichungen, dabei beachtend, dass $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $N_x = N\cos\alpha$, $N_y = N\cos\beta$, $N_z = N\cos\gamma$ ist, so wird

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\beta + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma + N.$$

Nun ist aber

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

wenn p und q die aus den Gleichungen der gegebenen Bahn abgeleiteten partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ sind, womit sich ergiebt

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\beta + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma = \frac{\frac{d^2z}{dt^2} - p\frac{d^2x}{dt^2} - q\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Ferner ist

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt},\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{dq}{dt}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dx}{dt}.$$

Folglich erhalten wir

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

und mithin ist

$$N = -(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma) + \frac{\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Sind λ und μ die Winkel, welche die Bewegungsrichtung des Punktes mit der Axe der x und der y einschliesst, dann ist $\frac{dx}{dt} = v\cos\lambda$, $\frac{dy}{dt} = v\cos\mu$, folglich auch

$$N = -(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma) + \frac{\frac{d^2z}{dt^2}\cos^2\lambda + 2\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\cos\lambda\cos\mu + \frac{d^2z}{dy^2}\cos^2\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}}v^2.$$

Der Faktor von v^2 ist aber der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers ϱ für den Curvenpunkt (x, y, z), mithin ergiebt sich schliesslich für die Widerstandsbeschleunigung

$$N = -(X\cos\alpha + X\cos\beta + Z\cos\gamma) \pm \frac{v^2}{\varrho}, \tag{10}$$

wobei das Doppelzeichen nicht umgangen werden darf, da der Punkt sich auf der konvexen oder der konkaven Seite der Curve bewegen kann. Die Centrifugalbeschleunigung vermehrt oder vermindert die Widerstandsbeschleunigung, je nachdem die Bewegung des Punktes auf der konkaven oder konvexen Seite der Curve stattfindet.

Die Gleichungen der Bahn ergeben sich durch Elimination von N aus den Bewegungsgleichungen. Indem wir (3) mit p multiplizieren, das Resultat zu (1) addieren, gelangen wir zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{d^2z}{dt^2}&=X+pZ\\ \text{und}\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+q\frac{d^2z}{dt^2}&=Y+qZ\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

ergiebt sich in ähnlicher Weise. Wir müssen bemüht sein aus diesen zwei Gleichungen entweder t auszuscheiden, oder aus ihnen eine integrable Gleichung herauszuziehen und dann zwischen dieser und (9) t zu eliminieren. Dieses ist nicht immer möglich, wenn es gethan werden kann, wird eine Relation zwischen x, y und z gefunden werden und dann die Bahngleichung gegeben sein.

Bewegt sich der Punkt auf einer ebenen Curve, dann kann die Ableitung vorstehender Resultate genau ebenso erfolgen, weil aber in diesem Falle $Z=0$, $N_z=0$, so ist dann offenbar

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X+N_x=X+N\frac{dy}{ds}, \quad (12) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=Y+N_y=Y+N\frac{dx}{ds}, \quad (13)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}=P, \quad (14) \qquad v^2=2\int(Xdx+Ydy)+C=2\int Sds+C, \quad (15)$$

$$N=-\left(X\frac{dy}{ds}+Y\frac{dx}{ds}\right)\pm\frac{v^2}{\varrho}=P\pm\frac{v^2}{\varrho}, \quad (16)$$

wobei P die Projektion der Beschleunigung φ des Punktes auf die Normale der Curve im Punkte $(x\,y)$ ist.

Die letzte Formel wurde zuerst durch L'Hôpital bekannt, er fand dieselbe bei der Diskussion des Problemes der Curve gleicher Pressung von Johann Bernoulli.

Wenn der Ausdruck für $N=0$ wird, so verlässt entweder der Punkt die Curve oder er bewegt sich auf ihr frei, d. h. ohne irgend welchen Widerstand zu erfahren, und die in solchem Falle geltende analytische Bedingung $\frac{v^2}{\varrho}=\mp P$ zeigt, dass beim Beginne der freien Bewegung die Normalbeschleunigung und die Centrifugalbeschleunigung gleich und von entgegengesetzter Richtung sein müssen.

Weil $(Xdx+Ydy)$ ein vollständiges Differential einer Funktion von x und y ist, so ist der Wert des Integrales dieses Ausdruckes, zwischen gegebenen Grenzen, unabhängig von der besonderen Relation, welche, zwischen x und y bestehend, die Gleichung der Bahn ausmacht. Folglich ist die Geschwindigkeit des Punktes, wenn er sich aus einer gegebenen Lage nach irgend einer gegebenen Bahnstelle bewegt, unabhängig von der Gestalt der Bahn. Dieses gilt auch bei der Bewegung auf einer doppelt gekrümmten Curve.

Für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt die Bahn verlässt, besteht die Relation

$$v^2=P\varrho=X\varrho\frac{dx}{ds}+Y\varrho\frac{dy}{ds}=X\varrho\cos\alpha+Y\varrho\sin\alpha,$$

wenn α den von der Richtung der Bahnnormalen und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel bedeutet. Ist ferner β die Neigung der Richtung der Beschleunigung φ gegen dieselbe Axe, so ist $X=-\varphi\cos\beta$, $Y=\varphi\sin\beta$, mithin auch

$$v^2=-\varphi\cos\beta\,\varrho\cos\alpha+\varphi\sin\beta\,\varrho\sin\alpha=\varphi\varrho\cos(\alpha+\beta).$$

Aber es ist $(\alpha+\beta)$ der von den Richtungen der Normalen und der Beschleunigung φ eingeschlossene Winkel, so dass, wenn χ die aus dem fraglichen Bahnpunkte in der Richtung von φ gezogene Krümmungssehne bezeichnet, $\chi=2\cos(\alpha+\beta)$ ist, womit für die Geschwindigkeit noch die Formel erscheint

$$v^2=\frac{1}{2}\varphi\chi=2\varphi\frac{\chi}{4}. \tag{17}$$

Der Punkt verlässt folglich die Bahn an der Stelle, wo die Geschwindigkeit gleich derjenigen ist, die er beim Durchfallen des vierten Teiles der Krümmungssehne mit der Beschleunigung φ erlangen würde.

Ist die auf den Punkt wirkende Beschleunigung central, φ ihre Grösse, r die Centraldistanz des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, das Centrum Ursprung der Coordinaten, dann haben wir $X dx + Y dy + Z dz = \varphi dr$, womit für diesen Fall die Gleichungen (8) und (9) übergehen in

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = \varphi \frac{d r}{d s}, \quad (18) \qquad v^2 = \left(\frac{d s}{d t}\right)^2 = 2 \int \varphi d r + C. \quad (19)$$

Erste Abteilung.

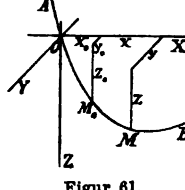
Bewegung eines Punktes im leeren Raume.

Erster Abschnitt.

Die von dem Punkte zu durchlaufende Bahn ist gegeben.

a) Die Richtung der Beschleunigung ist parallel zu einer festen, gegebenen Geraden.

1. Ein schwerer Punkt bewegt sich auf einer beliebigen, doppelgekrümmten Linie. Die Bewegung dieses Punktes ist zu untersuchen.



Figur 61.

Den Punkt O der Bahn AB (Fig. 61) nehmen wir zum Ursprunge des rechtwinkeligen Coordinatensystemes, die Axen der x und der y horizontal, die Axe der z vertikal und positiv im Sinne der Fallbeschleunigung g. M_0 sei der Ort der Anfangslage des Punktes mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0, daselbst die Geschwindigkeit $v = v_0$. Im vorliegenden Falle ist $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, so dass die Gleichungen für die Bewegung sind

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = N_x, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = N_y, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = g + N_z, \quad N = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2.$$

Für die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle haben wir

$$v^2 = 2\int(X dx + Y dy + Z dz) + C = 2\int g dz + C = 2 g z + C,$$

und weil, mit Rücksicht auf die fraglichen Werte für die Anfangslage, $C = v_0^2 - 2 g z_0$,

$$v^2 = v_0^2 + 2 g (z - z_0) = (v_0^2 - 2 g z_0) + 2 g z. \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit ist mithin von der Gestalt der Bahn unabhängig, sie ist dieselbe, so oft der Punkt dieselbe Horizontalebene passiert. Die (1) kann auch geschrieben werden

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0{}^2}{2g} = z - z_0. \tag{2}$$

Der Unterschied der Geschwindigkeitshöhen ist stets gleich der Differenz der Ordinaten der fraglichen Bahnpunkte.

Bezüglich des Verhältnisses der Geschwindigkeit v_0 zu der Ordinate z_0 sind die drei Fälle $\frac{v_0{}^2}{2g} \lesseqgtr z_0$ zu unterscheiden.

1) $\frac{v_0{}^2}{2g} < z_0$. Hier wächst die Geschwindigkeit mit z, im tiefsten Bahnpunkte wird sie zu einem Maximum, von da ab steigt der Punkt, seine Geschwindigkeit verschwindet mit $z = z_0 - \frac{v_0{}^2}{2g}$, so dass er über die Anfangslage um die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_0{}^2}{2g}$ hinaussteigt, und dann eine schwingende Bewegung zwischen den Punkten mit den Ordinaten $z = z_0 - \frac{v_0{}^2}{2g}$ annimmt.

2) $\frac{v_0{}^2}{2g} = z_0$. Hier ist $v^2 = 2gz$, die Geschwindigkeitshöhe gleich der Ordinate. Die Geschwindigkeit v wird in der tiefsten Bahnstelle zu einem Maximum, von da an steigt der Punkt nach der Ebene der xy hinauf, kann dieselbe aber erst nach einer unendlich grossen Zeit erreichen, was bei der Lösung der Aufgabe 15 nachgewiesen wird.

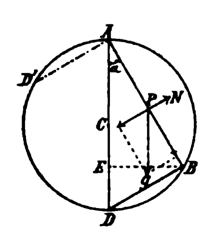
3) $\frac{v_0{}^2}{2g} > z_0$. Die Geschwindigkeit v verschwindet hier erst für ein negatives z, d. h. der Punkt steigt über die horizontale Coordinatenebene hinaus bis zur Höhe $\frac{v_0{}^2}{2g} - z_0$. Ist die Curve geschlossen und ihr höchster Punkt Coordinatenursprung, dann kann z nie negativ werden und macht der Punkt Umläufe in der Bahn. Im vorliegenden Falle ist die Beschleunigung des Widerstandes

$$N = g \cos\gamma \pm \frac{v^2}{\varrho},$$

wenn γ den von der Richtung der Bahnnormalen und der Axe der z eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Im tiefsten Bahnpunkte ist, weil für ihn $\gamma = 0$, $N = g + \frac{v^2}{\varrho}$, an der höchsten Stelle der Bahn, wenn sie geschlossen ist, $N = g - \frac{v^2}{\varrho}$.

2. Der höchste Punkt einer vertikalen Kreislinie ist durch eine Sehne mit einem beliebigen anderen Punkte dieser Curve verbunden. Auf

dieser Sehne bewegt sich von ihrer höchsten Stelle aus ein schwerer Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit. Die Bewegung dieses Punktes ist zu untersuchen.



Figur 62.

Es sei (Fig. 62) AD der vertikale Durchmesser des Kreises, AB die Sehne, auf welcher der Punkt sich bewegt, $\sphericalangle BAD = \alpha$, BD die Verbindungsgerade der Punkte B und D, B der Ort des schweren Punktes zur Zeit t, letztere gerechnet vom Beginn der Bewegung an, $AP = s$, $AD = 2a$, $AB = l$. Zerlegen wir die an dem Punkte wirkende Fallbeschleunigung in ihre Componenten parallel und senkrecht zu der Bahn AB, so sind dieselben $g \cos\alpha$ und $g \sin\alpha$, und wir erhalten

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\cos\alpha, \quad \text{so dass} \quad \frac{ds}{dt} = v = g\cos\alpha . t, \tag{1}$$

denn die Integrationskonstante verschwindet, weil mit $t = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ ist. Dieses zeigt, dass die Geschwindigkeit der Zeit direkt proportional ist.

Die Integration der (1) giebt

$$s = \frac{1}{2} g \cos\alpha . t^2 \tag{2}$$

und ist auch jetzt die willkürliche Konstante gleich Null, weil s und t gleichzeitig verschwinden. Die Bewegung des Punktes auf der geneigten Geraden AB ist mithin eine gleichförmig beschleunigte. Bezeichnet T die zum Durchlaufen der ganzen Länge der Sehne $AB = l$ erforderliche Zeit, so ist, weil dann $s = l = 2a\cos\alpha$,

$$2a\cos\alpha = \frac{1}{2} g\cos\alpha . T^2, \quad \text{mithin} \quad T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{3}$$

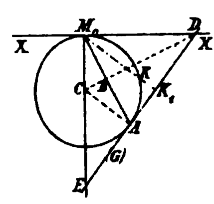
Dieses Resultat ist unabhängig von der Vertikalneigung der Sehne AB, so dass das Durchfallen aller solcher Sehnen in derselben Zeit erfolgt, eine schon von Galileo erkannte Eigenschaft des Kreises. Ziehen wir zu BD durch A eine Parallelsehne AD', dann ist klar, dass die Gerade BD in derselben Zeit durchfallen wird, wie die Sehnen AD', resp. AD, folglich werden auch alle nach dem tiefsten Punkte des Kreises gehenden Sehnen in der nämlichen Zeit durchfallen.

Die Beschleunigung des Widerstandes ist der Normalcomponente von g, absolut genommen, gleich, es ist $N = -g\sin\alpha$ während der ganzen Bewegung des Punktes auf der Geraden konstant.

Wolff, Elementa Matheseos Universae, Tom. II, p. 58.

3. Es ist gegeben in einer Vertikalebene (Fig. 63) ein Punkt M_0 und eine Gerade G. Durch M_0 soll eine Gerade so gelegt werden, damit

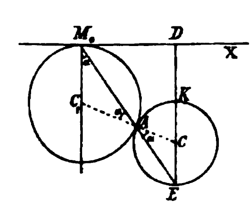
ein auf ihr von M_0 aus fallender Punkt die Gerade G in der kürzesten Zeit erreicht.



Figur 63.

Legen wir durch M_0 in der Ebene von M_0 und G einen Kreis so, dass er in M_0 seinen höchsten Punkt besitzt und die Gerade G in A berührt, und ziehen die Gerade $M_0 A$, dann ist letztere die verlangte Linie nach der Lösung der vorhergehenden Aufgabe. Ziehen wir durch M_0 in der Ebene von M_0 und G eine horizontale Gerade XX und eine vertikale Gerade $M_0 E$, dann muss erstere den erforderlichen Kreis berühren, letztere seinen Mittelpunkt enthalten. Ist D der Schnittpunkt der Linien XX und G, so machen wir $AD = DM_0$, alsdann ist A der gesuchte Berührungspunkt und $M_0 A$ die verlangte Gerade. Der Mittelpunkt C des Kreises liegt im Schnittpunkte der Vertikalen $M_0 E$ und der Halbierungslinie des Winkels $M_0 DA$. Legen wir von M_0 eine andere Gerade, etwa $M_0 K_1$, nach dem Punkte K_1 von G, dann schneidet diese den Kreis in K, die Bahnen $M_0 A$ und $M_0 K$ werden von dem schweren Punkte in gleichen Zeiten beschrieben und er hat noch eine gewisse Zeit t' nötig, um von K nach K_1 zu gelangen. Dieses gilt von jeder weiteren durch M_0 nach G gezogenen Geraden, so dass wirklich $M_0 A$ die gesuchte Linie ist. Wenn die gegebene Gerade G horizontal, dann ist offenbar die verlangte Linie die von M_0 auf G gefällte Senkrechte.

4. In einer Vertikalebene ist ein Punkt und ein tiefer liegender Kreis gegeben. Welche Gerade muss ein ohne Anfangsgeschwindigkeit von M_0 ausgehender schwerer Punkt durchfallen, damit er den Umfang des Kreises in der kürzesten Zeit erreicht?



Figur 64.

Ist (Fig. 64) M_0 die Anfangslage des schweren Punktes, K der in der kürzesten Zeit zu erreichende Kreis, so ist offenbar die Ankunftsstelle auf diesem Kreise der Berührungspunkt des gegebenen und eines Kreises mit dem Scheitel M_0. Legen wir daher durch den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises K eine Vertikale DCE und verbinden den Schnittpunkt E dieser Linie und des Kreises mit M_0 durch eine gerade Linie, so ist $M_0 AE$ die Gerade, auf welcher der Punkt fallen muss, und A sein Ankunftsort auf dem Kreise K. Es ist dann nämlich A der Berührungspunkt des Kreises K und desjenigen Kreises, welcher die horizontale Gerade $M_0 X$ zur Tangente hat, dessen Mittelpunkt C_1 auf der Vertikalen durch M_0 und dem Strahle CA liegt. Mit $CD \perp M_0 X$

und $= a$, $CE = r$, $M_0 D = b$, $\sphericalangle C_1 M_0 E = \alpha$ ist die Vertikalneigung der zu durchfallenden Linie durch die Relation gegeben $tg\,\alpha = \frac{b}{a+r}$, und für die Länge des zu durchlaufenden Weges haben wir

$$M_0 A = M_0 E - AE = \sqrt{(a+r)^2 + b^2} - 2r\cos\alpha$$
$$= \sqrt{(a+r)^2 + b^2} - \frac{2r(a+r)}{\sqrt{(a+r)^2 + b^2}}.$$

5. Von dem einen Endpunkte des horizontalen Durchmessers eines vertikalen Kreises sind zwei, die Centriwinkel α und 2α umspannende Sehnen gezogen. Von dem gemeinschaftlichen Punkte beider Sehnen aus bewegt sich ohne Anfangsgeschwindigkeit auf jeder derselben ein schwerer Punkt und ist die Zeit herab die letztere $n$mal grösser als diejenige herab die erstere Sehne. Wie gross ist α?

Sind l_1, l_2 die Längen der zwei Sehnen, t_1, t_2 die Zeiten, in welchen sie durchlaufen werden, dann ist

$$l_1 = \frac{1}{2} g \cos\alpha_1\, t_1^2, \qquad l_2 = \frac{1}{2} g \cos\alpha_2\, t_2^2,$$

womit
$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2}\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = n^2\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Aber durch die Geometrie ist, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet,

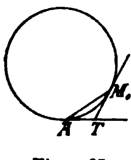
$$l_1 = 2r\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad l_2 = 2r\sin\alpha,$$

folglich
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = n^2\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \qquad n^2\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

und daher
$$\cos\alpha = \frac{1}{n^2-1}, \qquad \alpha = arc\left(\cos = \frac{1}{n^2-1}\right).$$

Walton, p. 300.

6. Ein schwerer Punkt fällt aus der Ruhe auf einen in einer vertikalen Ebene liegenden Kreisbogen herab; die Tangente in seinem tiefsten Punkte ist horizontal. Zu vergleichen die anfängliche Beschleunigung herunter die Curve mit derjenigen entlang die Sehne, wenn der Bogen unangebbar klein ist.



Figur 65.

Es sei (Fig. 65) A der tiefste Punkt des Bogens, T der Schnitt der Tangente in M_0, der Anfangslage des Punktes, mit der Tangente in A, ψ die Beschleunigung in M_0 herunter den Bogen, ψ' diejenige herab die Sehne $M_0 A$, $\sphericalangle M_0 A T = \vartheta = \sphericalangle A M_0 T$.

Die Beschleunigungen sind $\psi = g\sin 2\vartheta$, $\psi' = g\sin\vartheta$,

folglich ist $\psi : \psi' = \sin 2\vartheta : \sin\vartheta = 2\cos\vartheta$, und daher, wenn der Bogen unendlich klein ist, $\psi = 2\psi'$.

Saurin, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1724, p. 70.
Liouville, Ib. p. 128. **Courtivron**, Ib. 1744, p. 384. **Walton**, p. 299.

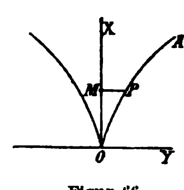
7. Die grosse Axe einer Ellipse ist vertikal. Ein schwerer Punkt durchfällt ohne Anfangsgeschwindigkeit einen Radiusvektor von dem oberen Fokus aus in der kürzesten Zeit. Welches ist die Lage dieses Fahrstrahles?

Die Polargleichung der Ellipse, mit genanntem Brennpunkte als Pol, ist $r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$. Der auf irgend einem Fahrstrahle von dem schweren Punkte in der Zeit t zurückgelegte Weg ist $s = \frac{1}{2} g\cos\vartheta . t^2$. Mithin ist die zum Durchlaufen eines Fahrstrahles erforderliche Zeit, weil dann $s = r$, $t = \left(\frac{2p}{g\cos\vartheta(1 + e\cos\vartheta)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Damit diese Zeit ein Minimum werde, muss $\cos\vartheta(1 + e\cos\vartheta)$ ein Maximum sein. Dieses ist der Fall, wenn $\sin\vartheta = 0$, oder $\cos\vartheta = -\frac{1}{2e}$ ist. Wenn $e < \frac{1}{2}$, muss demnach $\vartheta = 0$, wenn $e > \frac{1}{2}$, $\vartheta = arc\left(\cos = -\frac{1}{2e}\right)$ sein, damit die Ellipse in der kürzesten Zeit erreicht werden kann.

8. Die Axe einer Parabel ist vertikal. Nach welcher Stelle muss aus dem Brennpunkte, ohne Anfangsgeschwindigkeit, auf einem Fahrstrahle ein schwerer Punkt fallen, damit er die Curve in der kürzesten Zeit erreicht?

Die Polargleichung der Parabel ist $r = \frac{p}{1 - \cos\vartheta}$, mithin $\frac{1}{2} g\cos\vartheta . t^2 = \frac{p}{1 - \cos\vartheta}$, so dass die Fallzeit $t = \left(\frac{2p}{g\cos\vartheta(1 - \cos\vartheta)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Die Zeit wird zu einem Minimum mit $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$, für welchen Wert $t = 2\sqrt{\frac{2p}{g}}$, $r = 2p$ ist, was zeigt, dass derjenige Fahrstrahl durchfallen werden muss, dessen Länge gleich dem Parameter der Parabel ist. Die Scheitelgleichung der Parabel für rechtwinkelige Coordinaten ist $y^2 = 2px$. Daher sind die rechtwinkeligen Coordinaten des in der kürzesten Zeit zu erreichenden Curvenpunktes $x = \frac{1}{2}p + 2p\cos\vartheta = \frac{1}{2}p + p = \frac{3}{2}p$, $y = \sqrt{2p \cdot \frac{3}{2}p} = p\sqrt{3}$.

9. Ein schwerer Punkt fällt auf dem Bogen AO (Fig. 66) einer semikubischen Parabel, ihre Axe OX ist vertikal und ihre Spitze O der tiefste Punkt. Welches ist die Fallzeit aus einem gegebenen Punkte A nach der Spitze O?



Figur 66.

Es seien $OM = x$, $MP = y$ die Coordinaten eines beliebigen Bahnpunktes P. Im vorliegenden Falle ist $X = -g$, $Y = 0$, $Z = 0$, daher sind die Gleichungen für die Bewegung des Punktes

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -g \frac{d x}{d s}, \quad (1) \qquad a y^2 = x^3, \quad (2)$$

wo (2) diejenige der vorgeschriebenen Bahn ist.

Die Integration der (1) giebt, wenn h die anfängliche Höhe des schweren Punktes über der Axe der y bezeichnet und anfangs $\frac{ds}{dt} = 0$ ist,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = 2g(h - x). \quad (3)$$

Aus (2) folgt

$$y\sqrt{a} = x^{\frac{3}{2}}, \qquad a\,d y^2 = \frac{9}{4} x\, d x^2, \qquad a\, d s^2 = \frac{1}{4}(9x + 4a)\, d x^2,$$

womit (3) übergeht in

$$\frac{9x + 4a}{4a}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g(h - x), \quad \text{oder} \quad dt = -\frac{1}{2\sqrt{2ag}}\sqrt{\frac{9x + 4a}{h - x}}\, dx.$$

Das negative Zeichen ist gewählt, weil x mit wachsendem t abnimmt. Setzen wir $z^2 = 9x + 4a$, so wird

$$dt = -\frac{1}{2\sqrt{2ag}} \frac{z}{\sqrt{h + \frac{4}{9}a - \frac{z^2}{9}}} \frac{2}{9} z\, dz = -\frac{1}{3\sqrt{2ag}} \frac{z^2\, dz}{\sqrt{4a + 9h - z^2}},$$

und wenn wir noch $4a + 9h = \beta^2$ setzen

$$dt = -\frac{1}{3\sqrt{2ag}} \frac{z^2\, dz}{\sqrt{\beta^2 - z^2}}, \quad \text{folglich} \quad t = C - \frac{1}{3\sqrt{2ag}} \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{\beta^2 - z^2}},$$

$$t = C - \frac{1}{3\sqrt{2ag}}\left\{-\frac{1}{2} z \sqrt{\beta^2 - z^2} + \frac{1}{2}\beta^2\, arc\left(sin = \frac{z}{\beta}\right)\right\}.$$

Nun ist anfangs $t = 0$, $z^2 = \beta^2$, daher

$$0 = C - \frac{1}{3\sqrt{2ag}} \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\pi}{2},$$

und erhalten wir durch Elimination von C

$$t = \frac{1}{3\sqrt{2ag}}\left\{\frac{1}{2} z \sqrt{\beta^2 - z^2} + \frac{1}{2}\beta^2\, arc\left(cos = \frac{z}{\beta}\right)\right\},$$

so dass, wenn wir noch für β und z die Werte substituieren,

$$t = \frac{1}{3\sqrt{2ag}} \left\{ \frac{3}{2}\sqrt{9x+4a}\sqrt{h-x} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(9h+4a)\, arc\left(cos = \sqrt{\frac{9x+4a}{9h+4a}}\right) \right\}. \quad (4)$$

Wenn der Punkt in der Spitze ankommt, ist $x = 0$, daher die ganze Fallzeit, welche T sein möge,

$$T = \frac{1}{3\sqrt{2ag}} \left\{ 3\sqrt{ah} + \frac{1}{2}(9h+4a)\, arc\left(cos = 2\sqrt{\frac{a}{9h+4a}}\right) \right\}. \quad (5)$$

Walton, p. 304.

10. Ein schwerer Punkt befindet sich in dem Scheitel einer Parabel mit vertikaler Axe und fällt auf ihrer Konvexseite mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle?

Für die Beschleunigung des Widerstandes haben wir die Relation

$$N = P \pm \frac{v^2}{\varrho}.$$

Im vorliegenden Falle ist $P = g\frac{dy}{ds}$, und für die Centrifugalbeschleunigung ist das Minuszeichen zu nehmen, so dass

$$N = g\frac{dy}{ds} - \frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

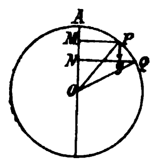
Mit $y^2 = 4mx$ als Gleichung der Bahn ist $\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{m}{m+x}}$, $\varrho = \frac{2}{\sqrt{m}}(m+x)^{\frac{3}{2}}$, ferner haben wir, wenn h die der Anfangsgeschwindigkeit zukommende Fallhöhe bezeichnet, $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(x+h)$, womit sich ergiebt

$$N = g(m-h)\sqrt{\frac{m}{(m+x)^3}}.$$

Wenn $h = m$, so ist die Beschleunigung des Widerstandes gleich Null, der Punkt beschreibt die Parabel frei. Wenn $h > m$ wäre, dann würde, weil N im vorliegenden Falle nicht negativ sein kann, gleich anfangs eine von der gegebenen Bahn abweichende krumme Linie beschrieben. Würden wir dagegen voraussetzen, dass sich der Punkt in einer unendlich dünnen parabolischen Röhre bewege, und $h > m$ sei, dann kann N negativ sein, es würde in diesem Falle die Bewegung so beschaffen sein, als wenn der Punkt auf der Konkavseite der parabolischen Bahn sich befände.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 64. Walton, p. 314.

11. Ein schwerer Punkt bewegt sich mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf der konvexen Seite eines vertikalen Kreises. Welches ist der Ort, wo er die Curve verlässt?



Figur 67.

Es sei (Fig. 67) O der Mittelpunkt des Kreises, AO sein vertikaler Halbmesser, P die Anfangslage des schweren Punktes, Q der Ort seines Abganges. PM, QN seien horizontale Linien, $ON=y$, $NQ=x$, $OA=a$, $OM=h$.

Die Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit ist gegeben durch

$$v^2=2\int -g\,dy + C, \quad \text{so dass} \quad v^2 = C - 2gy,$$

und weil mit $t=0$, $v=v_0$, $y=h$, also $C=v_0{}^2+2gh$,

$$v^2 = v_0{}^2 + 2g(h-y). \tag{1}$$

Die Beschleunigung des Widerstandes ist

$$N = g\frac{dx}{ds} - \frac{v^2}{\varrho}. \tag{2}$$

Aus der Kreisgleichung $x^2+y^2=a^2$ folgt $\frac{dx}{ds}=\frac{y}{a}$, $\varrho=a$, mit welchen Werten sich ergiebt

$$N = \frac{(3y-2h)g - v_0{}^2}{a}. \tag{3}$$

An der Abgangsstelle von der Bahn ist $N=0$, womit aus (3) für die Ordinate des Abgangspunktes folgt

$$y = \frac{v_0{}^2+2gh}{3g}. \tag{4}$$

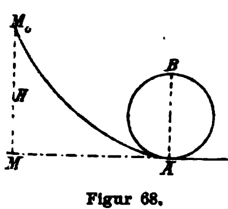
Besitzt der Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit, dann erhalten wir aus (4) mit $v_0=0$, $y=\frac{2}{3}h$, und wenn in diesem Falle die Bewegung von dem höchsten Punkte des Kreises aus beginnt $y=\frac{2}{3}a$. Verbinden wir den höchsten Punkt und die Abgangsstelle des Kreises durch eine Sehne, deren Vertikalneigung α sein möge, so ist noch im letzten Falle

$$tg\,\alpha = NQ : NA = \sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}a\right)^2} : \frac{1}{3}a = \sqrt{5}, \quad \text{oder} \quad \alpha = arc\,(tg=\sqrt{5}).$$

Fontana, Memorie della Societa Italiana, 1782, p. 175. Walton, p. 315.

12. Ein schwerer Punkt fällt auf einer kontinuierlich in einen Kreis übergehenden Curve und bewegt sich auf der Innenseite des Kreises weiter. Curve und Kreis liegen in einer vertikalen Ebene. Die Höhe, welche der Punkt bis zum Übergang auf den Kreis zu durchfallen hat, ist gleich H; die Übergangstangente ist horizontal und liegt der Kreis so, dass der Punkt

auf ihm zuerst aufsteigen muss. Wie gross darf der Halbmesser des Kreises höchstens sein, damit der Punkt die Bahn nicht verlässt?



Figur 68.

Ist (Fig. 68) $M_0 A B$ die Bahn, $A M$ die Tangente im tiefsten Punkte an den Kreis, also das Lot $M_0 M$ auf $A M$ gleich H, r der Kreisradius, v die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte A, v_1 diejenige im höchsten Punkte B des Kreises, dann haben wir

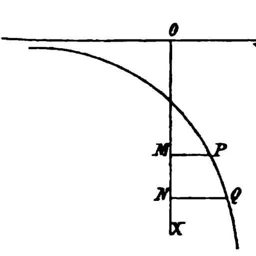
$$v^2 = 2 g H, \qquad v_1{}^2 = 2 g (H - 2 r).$$

Die Beschleunigung des Widerstandes im höchsten Punkte B des Kreises ist $N = -g + \frac{v_1{}^2}{r}$, demnach muss, wenn der Punkt die Bahn nicht verlassen soll, die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{v_1{}^2}{r} \gtreqless g, \quad \text{folglich auch} \quad r g \lesseqgtr v_1{}^2 \lesseqgtr 2 g (H - 2 r), \text{ d. i. } r \lesseqgtr \frac{2}{5} H.$$

Mithin ist der Radius des Kreises kleiner als $\frac{2}{5}$ der Fallhöhe H, durch welche der Punkt seine Eintrittsgeschwindigkeit in die tiefste Bahnstelle erlangt, zu nehmen.

13. Ein schwerer Punkt steigt auf der konvexen Seite einer logarithmischen Linie herab; die Curve liegt in einer vertikalen Ebene und ihre Asymptote ist horizontal. Wo verlässt der Punkt die Curve?



Figur 69.

Es sei (Fig. 69) P die Anfangslage des Punktes, Q der Ort, wo er die Curve verlässt, PM, $QN \parallel OY$, $OM = h$, $ON = x$ und die Gleichung der Bahn $y = m\, l(x)$. Die Reaktionsbeschleunigung ist hier

$$N = g \frac{dy}{ds} - \frac{v^2}{\varrho}. \tag{1}$$

Aus der Bahngleichung folgt $\frac{dy}{ds} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - x^2}}$, $\varrho = \frac{(m^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{m x}$, ferner ist $v^2 = 2 g (x - h)$, mit welchen Werten sich durch (1) ergiebt

$$N = \frac{g m}{\sqrt{m^2 + x^2}} - 2 g \frac{(x - h) m x}{\sqrt{(m^2 + x^2)^3}}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt sich nun mit $N = 0$ die Abscisse der Abgangsstelle, sie ist

$$x = h + \sqrt{m^2 + h^2},$$

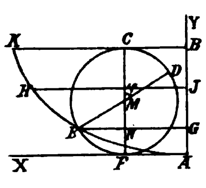
und ihre Ordinate ist

$$y = m\, l(x) = m\, l(h + \sqrt{m^2 + h^2}).$$

Würden wir die Bahngleichung $y = l_a(x)$ zugrunde gelegt und $A = l_e(a)$ gesetzt haben, dann hätten wir bekommen $x = \frac{1}{A}\left\{Ah + \sqrt{1 + A^2 h^2}\right\}$.

Fontana, Memoire della Societa Italiana, 1782, p. 182.

14. Ein schwerer Punkt fällt auf einer Cycloide. Die Curve liegt in einer vertikalen Ebene, ihre Basis ist horizontal und ihr Scheitel ihr tiefster Punkt. Die Bewegung dieses Punktes soll untersucht werden.



Figur 70.

Es sei (Fig. 70) BCK die Grundlinie der Cycloide A ihr tiefster Punkt, A Ursprung der Coordinaten, die Horizontale AX Abscissenaxe, die Vertikale AY Ordinatenaxe. Der Erzeugungskreis vom Durchmesser $2a$ bewege sich auf BC von B nach C, so dass für eine beliebige Lage desselben die Strecke BC gleich dem Bogen CD ist. Ziehen wir durch den Mittelpunkt M des Erzeugungskreises die Linien CF, DE, setzen $\sphericalangle CMD = \varphi$, machen $EG \parallel AX$, so dass $GE = x$, $AG = y$ die Coordinaten des Cycloidenpunktes E sind, dann haben wir Bogen CD = Bogen $EF = a\varphi$, $x = GE = GN + NE = BC + NE$. Nun ist BC = Bogen $EF =$ $= a\varphi = a\,arc\left(cos = \frac{MN}{ME}\right) = a\,arc\left(cos = \frac{a-y}{a}\right)$, $NE = \sqrt{\overline{EM}^2 - \overline{NM}^2}$ $= \sqrt{a^2 - (a-y)^2} = \sqrt{2ay - y^2}$, folglich die Gleichung der Cycloide

$$x = \sqrt{2ay - y^2} + a\,arc\left(cos = \frac{a-y}{y}\right). \tag{1}$$

Für die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle besteht die Relation

$$v^2 = -2\int g\,dy + C = -2gy + C.$$

Ist H die Anfangslage des schweren Punktes, $AJ = h$ seine Ordinate, dann ist, weil beim Beginn der Bewegung $t = 0$, $v = 0$, $y = h$, $C = 2gh$, folglich

$$v^2 = 2g(h - y). \tag{2}$$

Die Projektionen der Geschwindigkeit v auf die Coordinatenaxen sind

$$v_x = v\frac{dx}{ds}, \qquad v_y = v\frac{dy}{ds}. \tag{3}$$

Aus (1) geht hervor, dass

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{2a - y}{2a}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{y}{2a}}, \tag{4}$$

und es ist mit (3), (4) und (2)

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{(h-y)(2a-y)}, \quad (5) \qquad v_y = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{(h-y)y}. \quad (6)$$

Die Horizontalgeschwindigkeit v_x ist abhängig von h und y, sie ist für jede Lage des Punktes am grössten, wenn $h = 2a$ ist, in welchem Falle

$v_x = \sqrt{\frac{g}{a}}\,(2a - y)$. Das absolute Maximum tritt mit $y = 0$ ein, es ist im Scheitel der Bahn $v_x = \sqrt{2gh}$. Damit die Vertikalgeschwindigkeit v_y ein Maximum werde, muss $(h - y)\,y$ ein Maximum sein, was mit $y = \frac{h}{2}$ der Fall ist, so dass $v_{y\,max} = \frac{1}{2} h \sqrt{\frac{g}{a}}$, was in der Mitte des vertikalen Weges des Punktes eintritt. In der Anfangslage und für den Scheitel ist v_y ein Minimum, nämlich gleich Null.

Die Zeit folgt aus (6) mit $v_y = \frac{dy}{dt}$, wodurch, da mit wachsendem t y abnimmt,

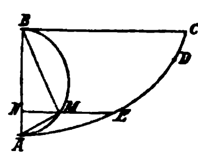
$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}, \qquad \int_0^t dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,arc\left(cos = \frac{2y - h}{h}\right). \tag{7}$$

Für die Zeit T, welche der Punkt nötig hat, um nach der tiefsten Bahnstelle zu gelangen, erhalten wir aus (7) mit $y = 0$

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{8}$$

Die ganze Fallzeit des Punktes ist sonach von seiner Anfangslage unabhängig. Diese mechanische Eigenschaft der Cycloide, durch welche sie den Namen einer tautochronischen Curve erhalten hat, wurde zuerst von Huyghens entdeckt. (Horolog. Oscill. Pars II.)



Figur 71.

Eine andere Bestimmung der Fallzeit ist die folgende. Es sei (Fig. 71) D die Anfangslage des Punktes, E sein Ort nach der Zeit t. Ziehe EMN horizontal, den Erzeugungskreis in seiner Mittellage in in dem Punkte M schneidend, die Geraden AM, BM, dann ist, wenn angenommen wird, dass die Axe BA die Fallbeschleunigung darstellt, die zur Bahntangente in E parallele Kreissehne MA die Beschleunigung des Punktes in E und MB seine Normalbeschleunigung, welche keinen Einfluss auf die Bewegung hat, folglich (Beschleunigung herunter die Curve): $g = MA : BA = 2.MA : 2.BA = AE : AC$. Ist nun Bogen $AE = s$, $AC = l$, Bogen $AD = s_0$, so ist die Beschleunigung herunter die Curve $\frac{s}{l}g$, daher

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{s}{l}g.$$

Multiplizierend mit $2\frac{ds}{dt}$ und integrierend, wird

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(C - s^2).$$

Aber für die Anfangslage ist $s = s_0$, $\frac{ds}{dt} = 0$, folglich $C = s_0{}^2$, mithin

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{l}(s_0{}^2 - s^2).$$

Weiter haben wir

$$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_0{}^2 - s^2}, \quad \int_0^t dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{s_0{}^2 - s^2}},$$

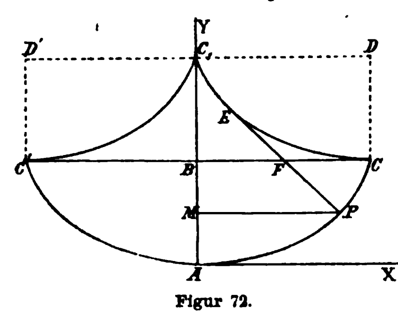
$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\, arc\left(cos = \frac{s}{s_0}\right).$$

Für den Scheitel der Bahn ist $s = 0$, daher die ganze Fallzeit

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Weil nun $l = 4a =$ dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises ist, so haben wir auch

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\left(cos = \frac{s}{s_0}\right), \qquad T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$



Figur 72.

Die Curve der Krümmungsmittelpunkte $C C_1 C'$ (Fig. 72) der Cycloide besteht bekanntlich aus zwei Cycloidenhalbbogen, welche kongruent den Halbbogen $C' A$, $C A$ der Cycloide sind. Denken wir uns nun die Evolute $C C_1 C'$ der Cycloide $C A C'$, einen Faden von der Länge $4a$, dessen eines Ende fest mit dem Punkte C_1, dessen anderes Ende mit dem schweren Punkte P verbunden ist und versetzen den Punkt P in Schwingungen, so bewegt sich dieser offenbar auf der Cycloide $C A C'$. Der Faden $C_1 P$ schneidet die Basis $C C'$ der vorgeschriebenen Bahn in einem gewissen Punkte F, welcher von C_1 während der Bewegung um eine veränderliche Strecke entfernt ist. Die Bewegung dieses Punktes F wollen wir jetzt untersuchen. Es sei $AM = y$, $MP = x$, dann ist die Gleichung der Bahnnormalen PE, wo E der dem Punkte P entsprechende Krümmungsmittelpunkt,

$$(x - x') = -\frac{dx}{dy}(y - y').$$

Aber für den Punkt F ist $y' = AB = 2a$, $x' = BF = x - (2a - y)\frac{dy}{dx}$

$= x - \sqrt{2ay - y^2} = a\, arc\left(cos = \frac{a-y}{a}\right)$, mit (1). Ferner ist $CF =$
$BC - BF = a\pi - a\, arc\left(cos = \frac{a-y}{a}\right)$.

Folglich haben wir für die Geschwindigkeit des Punktes F

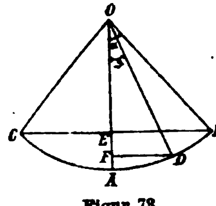
$$v = \frac{d}{dt}(CF) = -\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Nun ist $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{2a}{y}$, $-\frac{ds}{dt}$ = der Geschwindigkeit des Punktes $P = \sqrt{2g(2a-y)}$, mithin

$$v = \frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{\frac{y}{2a}}\sqrt{2g(2a-y)} = \sqrt{ag}.$$

Demnach ist die Bewegung des Punktes F eine gleichförmige.

15. **Bewegung eines schweren Punktes auf der Innenseite eines vertikalen Kreises. Mathematisches Pendel.**



Figur 73.

Der Punkt bewege sich auf dem Bogen BAC (Fig. 73), dessen tiefster Punkt A, dessen Mittelpunkt O ist. B sei die Anfangslage, D eine beliebige Lage zur Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung, des schwingenden Punktes. Ferner seien die Geraden BC, DF horizontal. Wir setzen $\sphericalangle AOB = \alpha$, $\sphericalangle AOD = \vartheta$, $OA = a =$ der Pendellänge, $OE = h$. O sei Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes, OA Axe der y, positiv vertikal abwärts. Ist v_0 die Geschwindigkeit des Punktes in der Anfangslage, dann ist die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle gegeben durch

$$v^2 = 2\int g\,dy + C = v_0^2 + 2g(y-h),$$

oder, weil $y = a\cos\vartheta$, $h = a\cos\alpha$,

$$v^2 = v_0^2 + 2ag(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \quad (1)$$

Die Länge des in der Zeit t durchlaufenen Bogens BD ist $= s = a(\alpha - \vartheta)$, also $ds = -a\,d\vartheta$, demnach

$$\left(a\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2ag(\cos\vartheta - \cos\alpha), \quad (2)$$

woraus folgt

$$t = C - a\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 2ag(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}. \quad (3)$$

Die Differentiation der Gleichung (2) giebt

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\vartheta = 0. \quad (4)$$

Dieses ist diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung unseres Problemes, welche gewöhnlich die Pendelgleichung genannt wird.

Die Gleichung (3) giebt die Zeit für einen bestimmten Schwingungsbogen ϑ. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst $v_0 = 0$ an, indem offenbar die Anfangsgeschwindigkeit durch einen entsprechenden Schwingungswinkel α ersetzt werden kann, so dass

$$t = C - \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}. \tag{5}$$

Gewöhnlich ist der Schwingungswinkel α verhältnismässig klein und unter dieser Voraussetzung kann das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (5) auf mehrfache Weise bestimmt werden.

Erste Integration. Mit $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$,

und wenn wir, da $\frac{\vartheta}{2}$ und $\frac{\alpha}{2}$ gewöhnlich sehr kleine Bogen sind, den Sinus mit dem Bogen vertauschen, wird

$$t = C - \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}, \quad t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\left(\cos = \frac{\vartheta}{\alpha}\right). \tag{6}$$

Die willkürliche Konstante verschwindet, weil mit $t = 0$, $\vartheta = \alpha$ ist.

Mit $\vartheta = 0$ wird $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, d. i. diejenige Zeit, welche der Punkt bis zu seiner Ankunft im tiefsten Bahnpunkte A nötig hat. Nehmen wir das Integral zwischen den Grenzen $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = -\alpha$, so ergiebt sich die Zeit T einer einfachen Schwingung, nämlich

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \tag{7}$$

welcher Wert jedoch nur für einen sehr kleinen Ausschlagswinkel α zulässig ist.

Zweite Integration. Durch Reihenentwickelung ist

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{2.3.4} - \cdots, \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \cdots$$

Für einen sehr kleinen Schwingungsbogen α genügt es, die Glieder dieser Reihen nur bis zur vierten Potenz beizubehalten, und giebt die Substraktion der beiden letzten Gleichungen von einander

$$2(\cos\vartheta - \cos\alpha) = (\alpha^2 - \vartheta^2)\left\{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \vartheta^2)\right\},$$

so dass mit Einführung dieses Wertes in die Gleichung (4)

$$t = C - \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{\left\{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \vartheta^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}\, d\vartheta.$$

Den Zähler des Bruches unter dem Integralzeichen in eine Reihe entwickelt und dieselbe mit der zweiten Potenz von ϑ abgebrochen, giebt

$$\left\{1-\frac{1}{12}(\alpha^2+\vartheta^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{24}(\alpha^2+\vartheta^2),$$

so dass auch

$$t=C-\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\int\frac{1+\frac{1}{24}\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}d\vartheta+\frac{1}{24}\int\frac{\vartheta^2}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}d\vartheta\right\}.$$

Nun ist $\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}=arc\left(sin=\frac{\vartheta}{\alpha}\right)+C'$,

$$\int\frac{\vartheta^2 d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}=-\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}+\frac{\alpha^2}{2}arc\left(sin=\frac{\vartheta}{\alpha}\right)+C'',$$

folglich $t=C-\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{(1+\frac{1}{16}\alpha^2)\,arc\left(sin=\frac{\vartheta}{\alpha}\right)-\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}\right\}$.

Aber mit $t=0$ ist $\vartheta=\alpha$, daher $C=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2\right)$, und mithin

$$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{(1+\frac{1}{16}\alpha^2)\left[\frac{\pi}{2}-arc\left(sin=\frac{\vartheta}{\alpha}\right)\right]+\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}\right\}. \quad (8)$$

Bewegt sich der Punkt von B bis A, dann ist in (8) $\vartheta=0$ zu nehmen, womit die ganze Fallzeit

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}(1+\frac{1}{16}\alpha^2),$$

und folglich ist die Zeit einer einfachen Oszillation, welche auch erhalten werden würde durch Integration zwischen den Grenzen $\vartheta=\alpha$ und $\vartheta=-\alpha$,

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2\right). \quad (9)$$

Ein Vergleich der Formeln (7) und (9) zeigt, dass der jetzt für T erhaltene Wert $\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2\right)$ mal grösser ist als der vorhin bekommene. Würde der Ausschlag des Pendels 5° betragen, dann wäre der entsprechende Bogen $\alpha=0{\cdot}087266$, $1+\frac{1}{16}\alpha^2=1{\cdot}000476$. Nach der ersten Formel würden in diesem Falle 1000476 Schwingungen gemacht, wenn die letztere für dieselbe Zeit 1000000 Schwingungen ergäbe.

Dritte Integration. In der Gleichung (4) setzen wir $1-cos\,\vartheta=z$, $1-cos\,\alpha=b$, dann ist $cos\,\vartheta-cos\,\alpha=z-b$, $d\vartheta=\frac{dz}{\sqrt{2z-z^2}}$, und es wird

$$t = C - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}\sqrt{1-\frac{z^2}{2}}}.$$

Nach dem biomischen Satze $\left(1-\frac{z^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe entwickelt, giebt

$$t = C - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{8}+\cdots\right). \quad (10)$$

Nun besteht die Relation

$$\int\frac{z^n}{\sqrt{bz-z^2}} = -\frac{z^{n-1}}{n}\sqrt{bz-z^2}+\frac{2n-1}{2n}b\int\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{bz-z^2}}, \quad (a)$$

mit welcher wir finden

$$\int\frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}} = arc\left(sin = \frac{2z-b}{b}\right),$$

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{bz-z^2}} = -\sqrt{bz-z^2}+\frac{b}{2}arc\left(sin = \frac{2z-b}{b}\right),$$

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{bz-z^2}} = -\frac{3b+2z}{4}\sqrt{bz-z^2}+\frac{3}{8}b^2 arc\left(sin = \frac{2z-b}{b}\right),$$

$$\int\frac{z^3dz}{\sqrt{bz-z^2}} = -\frac{8z^2+10bz+15b^2}{24}\sqrt{bz-z^2}+\frac{5}{16}b^3 arc\left(sin\frac{2z-b}{b}\right).$$

u. s. f.

Durch diese Werte geht die Gleichung (10) über in

$$t = C - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3+\cdots\right]arc\left(sin = \frac{2z-b}{b}\right) - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{3b+2z}{2} + \left(\frac{1}{4.8}\right)^2\frac{5(8z^2+10bz+15b^2)}{3}+\cdots\right]\sqrt{bz-z^2}\right\}.$$

Für $t=0$ ist $z = 1 - cos\,\alpha = b$, daher

$$C = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3+\cdots\right\},$$

folglich

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3+\cdots\right]arc\left(cos = \frac{2z-b}{b}\right)\right.$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{3b-2z}{2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4.8}\right)^2\frac{5(8z^2+10bz+15b^2)}{3}+\cdots\right]\sqrt{bz-z^2}\Bigg\}. \quad (11)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z=0$ und nehmen den resultierenden Wert doppelt, dann ist

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3+\cdots\right\} \quad (12)$$

die Zeit einer einfachen Schwingung.

Handelt es sich nur darum, die Schwingungsdauer T zu ermitteln, so kann die Integration in etwas einfacherer Weise bewirkt werden. Die Gleichung (10) giebt die halbe Zeit T, wenn wir das Integral von $\vartheta=\alpha$, bis $\vartheta=0$ nehmen. Weil $z=1-\cos\vartheta$, so sind dessen Grenzen $z=1-\cos\alpha=b$ und $z=0$, mithin ist

$$T=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^b\frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{8}+\cdots\right). \quad (13)$$

Die Zerlegung dieses Integrales in seine Glieder führt zu

$$\int_0^b\frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}}=\left\{arc\left(\sin=\frac{2z-b}{b}\right)+C\right\}_0^b=\pi.$$

$$\int_0^b\frac{z^n\,dz}{\sqrt{bz-z^2}}=\frac{2n-1}{n}\int_0^b\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{bz-z^2}},$$ bei Beachtung der Relation (α).

Bezeichnen wir die linke Seite dieser Gleichung mit A_n, dann ist

$$A_n=\frac{2n-1}{n}b\,A_{n-1} \qquad \text{und} \qquad \int_0^b\frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}}=\pi=A_0.$$

Damit ergiebt sich

für $n=0$ $\quad A_0= \quad A_0=\pi,$

$n=1 \quad A_1=\frac{1}{2}b\,A_0=\frac{1}{2}b\,\pi,$

$n=2 \quad A_2=\frac{3}{4}b\,A_1=\frac{1.3}{2.4}b^2\pi,$

$n=3 \quad A_3=\frac{5}{6}b\,A_2=\frac{1.3.5}{2.4.6}b^3\pi,$

u. s. f.

Die Einsetzung dieser Werte in die (13) giebt

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Berücksichtigen wir nur das erste Glied der Klammergrösse, dann ist wie

in (7) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, werden nur die zwei ersten Glieder beachtet, so folgt, weil $b=1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1+\frac{1}{16}\alpha^2\right\}$, wie in (9).

Die Gleichung $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ kann in Verbindung mit Beobachtungen dazu benutzt werden, die Fallbeschleunigung g zu ermitteln, wodurch genauere Resultate als mit Hilfe der Atwood'schen Fallmaschine erzielt werden. Ist T' die Zeit, in welcher das Pendel n einfache Schwingungen macht, so haben wir

$$T'=n\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad \text{folglich} \qquad g=\frac{n^2\pi^2 a}{T'^2}.$$

Sind nun die Werte von n und T' für ein Pendel von der Länge a beobachtet worden, dann giebt diese Formel den Wert von g. Die auf dem Observatorium zu Paris gemachten Beobachtungen haben ergeben $g=9{\cdot}8096$ Meter. Werden derartige Versuche an verschiedenen Stellen der Erde angestellt, so ergiebt sich das Gesetz, nach welchem die Fallbeschleunigung variiert.

Die genaue Differentialgleichung für die Bewegung eines Punktes auf einem vertikalen Kreise ist die Gleichung (2), nämlich

$$-a\frac{d\vartheta}{dt}=\sqrt{v_0{}^2+2ag(\cos\vartheta-\cos\alpha)}.$$

Mit $1-\cos\vartheta=2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ geht dieselbe, da dann $\cos\vartheta-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, über in

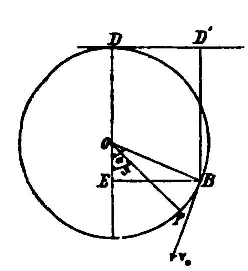
$$-a\frac{d\vartheta}{dt}=\sqrt{v_0{}^2+4ag\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}.$$

Ist nun für $t=0$, $\vartheta=\alpha$, und zur Zeit t die Abweichung des Fahrstrahles des schweren Punktes von der Vertikalen gleich ϑ, so ist die Zeit, innerhalb welcher der Winkel $(\alpha-\vartheta)$ beschrieben wird,

$$t=\int_{\vartheta}^{\alpha}\frac{a\,d\vartheta}{\sqrt{v_0{}^2+4ag\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}}. \tag{14}$$

Die von dem schweren Punkte zu durchfallende Höhe, um die Geschwindigkeit v_0 in B zu erlangen, ist $\frac{v_0{}^2}{2g}$. Der Abstand des Punktes B von der durch den höchsten Punkt D (Fig. 74, S. 215) gelegten Horizontalen ist

$BD' = ED = OD + OE = a + a\cos\alpha = a(1 + \cos\alpha) = 2a\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Bezüglich der Grösse von v_0 sind die drei Fälle $\frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr 2a\cos^2\frac{\alpha}{2}$, oder $\frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr 2a\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ zu unterscheiden, d. h. die der Geschwindigkeit v_0 entsprechende Fallhöhe kann kleiner, gleich oder grösser als der Vertikalabstand des Anfangspunktes der Bewegung vom höchsten Punkte des Kreises sein. Im ersten Falle finden Schwingungen im gewöhnlichen Sinne statt, im zweiten nähert sich der schwere Punkt dem Scheitel des Kreises asymptotisch, im dritten macht er volle Umläufe.



Figur 74.

Erster Fall. $\frac{v_0^2}{2g} < 2a\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$, oder $v_0^2 + 4ag\sin^2\frac{\alpha}{2} < 4ag$.

Setzen wir in der (14) $\dfrac{v_0^2 + 4ag\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4ag} = k^2$, dann wird

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{\frac{1}{2} d\vartheta}{\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}. \tag{15}$$

In dieser Gleichung ist gemäss der Voraussetzung $k^2 < 1$. Die Einführung zweier neuer Winkel ψ und β für ϑ und α durch die Relationen $\sin\frac{\vartheta}{2} = k\sin\psi$, $\sin\frac{\alpha}{2} = k\sin\beta$ giebt

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}. \tag{16}$$

Dieses Integral ist ein elliptisches erster Ordnung mit dem Mudul k und der Amplitude ψ, mithin

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ F(\beta, k) - F(\psi, k) \right\}. \tag{17}$$

Die Zeit des ersten Niederganges vom Anfangspunkte bis zum tiefsten Punkte A ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} F(\beta, k),$$

daher ist die Zeit, während welcher die Bewegung von P bis A stattfindet,

$$t_1 - t = \sqrt{\frac{a}{g}} F(\psi, k).$$

Nach (1) und (2) ist $v = -\frac{d\vartheta}{dt}$, nach (15) $\frac{dt}{d\vartheta} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{1}{\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$,

folglich

$$v = 2a\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Für den Fall nun, dass $v=0$ werden soll, muss $\sin\frac{\vartheta}{2} = -k$, oder $\sin\psi = -1$, $\psi = -\frac{\pi}{2}$ werden, mithin ist nach (17) die bis dahin verstreichende Zeit

$$t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left\{F(\beta, k) - F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right)\right\}.$$

Weil aber $F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$ $= -F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, so ist

$$t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left\{F(\beta, k) + F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right\}.$$

Wird von dieser Zeit die Zeit t_1, welche das Pendel nötig hat, um zum tiefsten Punkte zu gelangen, subtrahiert, so erhalten wir diejenige Zeit, welche das Pendel braucht, um vom tiefsten Punkte bis zur Ruhelage zu kommen, nämlich

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left\{F(\beta, k) + F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\beta, k)\right\} = \sqrt{\frac{a}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Von jetzt ab macht das Pendel Schwingungen, bei welchen die Zeit eines Nieder- und Aufganges $2(t_2 - t_1)$, folglich die Zeit eines Hin- und Herganges, also diejenige einer vollständigen Schwingung $4(t_2 - t_1)$ ist, welche mit T bezeichnet werden möge, so dass

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \qquad (18)$$

Das elliptische Integral mit der Amplitude $\frac{\pi}{2}$, nämlich

$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$, heisst das vollständige Integral erster Gattung, es wird von Legendre mit F', von Jakobi mit K bezeichnet, wodurch auch

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}K, \ mod.\ k, \qquad k^2 = \frac{v_0{}^2 + 4ag\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4ag}.$$

Sind α und v_0 sehr klein, dann wird auch k sehr klein, also

$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi = \frac{\pi}{2}$, mithin $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, wie früher, denn oben bezeichnet T die Zeit einer einfachen Schwingung.

Mit $v_0 = 0$, ist $k = \sin\frac{\alpha}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, folglich in diesem Falle die Zeit einer vollen Schwingung

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\, F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Unter diesen Verhältnissen können die Werte von $F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$, kurz F, für gegebene Werte von α aus nachstehender Tabelle entnommen werden.

α^0	F	α^0	F	α^0	F	α^0	F
0	1·57 080	10	1·57 379	20	1·58 284	30	1·59 814
2	1·57 091	12	1·57 511	22	1·58 539	32	1·60 197
4	1·57 127	14	1·57 667	24	1·58 819	34	1·60 608
6	1·57 187	16	1·57 848	26	1·59 125	36	1·61 045
8	1·57 271	18	1·58 054	28	1·59 456	38	1·61 509

Nun haben wir den Winkel ϑ und die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit darzustellen.

Wir erhielten $t_1 - t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, F(\psi, k)$, worinnen $k \sin\psi = \sin\vartheta$ ist. Aus dieser Gleichung folgt zunächst $F(\psi, k) = \sqrt{\frac{g}{a}}\,(t_1 - t)$, so dass die Auflösung für ψ giebt $\psi = am\left\{(t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{a}}, k\right\}$, daher ist

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = k \sin am\left\{(t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{a}}, k\right\}. \tag{19}$$

Weil ferner $d\, arc\,(\sin = k \sin am\, u) = k \cos am\, u\, d\, u$, folgt noch

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -2k\sqrt{\frac{g}{a}} \cos am\left\{(t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{a}}, k\right\}. \tag{20}$$

Die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle ist $v = -a\frac{d\vartheta}{dt}$, wo $-\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mithin erhalten wir

$$v = 2ak\sqrt{\frac{g}{a}} \cos am\left\{(t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{a}}, k\right\}. \tag{21}$$

Zweiter Fall. $\frac{v_0^2}{2g} = 2a\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$, oder $v_0^2 + 4ag\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4ag$. Damit geht die Gleichung (14) über in

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}},$$

und durch Intégration ergiebt sich

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \Big[-l\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{4}\right) + C \Big]_{\vartheta}^{\alpha}, \quad t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, l \frac{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{4}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}. \tag{22}$$

Die Geschwindigkeit v kann erst dann gleich Null werden, wenn der schwere Punkt im Scheitel des Kreises ankommt, es ist $v = \sqrt{4\,a\,g\left(1 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}$, welcher Ausdruck mit $\vartheta = -\pi$ verschwindet, wofür die Formel (22) $t = \infty$ giebt. Damit stellt sich heraus, dass der Punkt die höchste Bahnstelle nur nach einer unendlich grossen Zeit erreichen kann, sich dieser Stelle also asymptotisch nähert.

Bewegt sich ein Punkt auf einer geschlossenen Curve, ist ihr höchster Punkt Coordinatenanfang und die der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entsprechende Fallhöhe $\frac{v_0^2}{2g}$ gleich der Tiefe der Anfangslage unter dem höchsten Punkte, so geht die Gleichung für die Geschwindigkeit v, wenn die Axe der z vertikal abwärts positiv genommen wird, über in $v^2 = 2gz$. Rechnen wir den Bogen s der Bahn ebenfalls vom höchsten Punkte an, so dass s abnimmt, wenn der Punkt steigt, dann ist auch $v = -\frac{ds}{dt}$, mithin

$$\frac{ds}{dt} + \sqrt{2gz} = 0. \tag{β}$$

Sind ferner λ, μ, ν die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser im Bahnpunkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen einschliesst, dann ist

$$\frac{\cos\lambda}{d\frac{dx}{ds}}\,ds = \frac{\cos\mu}{d\frac{dy}{ds}}\,ds = \frac{\cos\nu}{d\frac{dz}{ds}}\,ds = \varrho, \quad \text{daher} \quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\cos\nu}{\varrho}.$$

Wählen wir nun eine Konstante α so, dass für die Bahnpunkte von der höchsten Stelle bis auf eine endliche Strecke des Bogens s hin stets $\alpha < \frac{\varrho}{\cos\nu}$, dann wird $\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} < \frac{1}{\alpha}$, $\frac{dz}{ds} < \frac{s}{\alpha}$, $z < \frac{s^2}{2\alpha}$. Die Einführung dieses Wertes von z in die (β) giebt

$$\frac{ds}{dt} + \sqrt{\frac{g s^2}{\alpha}} > 0, \quad \frac{ds}{s} + dt\sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0.$$

Die Integration dieser Gleichung von s', t' bis s, t zeigt, dass

$$l\frac{s}{s'} + (t - t')\sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0, \quad \text{oder} \quad t - t' > \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\, l\frac{s'}{s}.$$

Nimmt nun s fortwährend ab, dann wächst der Logarithmus auf der rechten Seite kontinuierlich, die Zeit nimmt um so mehr zu, je mehr sich der schwere Punkt der höchsten Bahnstelle nähert, und ist für den höchsten Bahnpunkt unendlich gross. (Diesen Beweis hat Sturm gegeben.)

Dritter Fall. $\frac{v_0^2}{2g} > 2a\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$, oder $v_0^2 + 4ag\sin^2\frac{\alpha}{2} > 4ag$.

Setzen wir jetzt in (14) $\frac{4ag}{v_0^2 + 4ag\sin^2\frac{\alpha}{2}} = k^2$, so folgt

$$t = k\sqrt{\frac{a}{g}}\int_\vartheta^\alpha \frac{\frac{1}{2}d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}, \text{ oder } t = k\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

mit $\vartheta = 2\psi$.

Nun ist das elliptische Integral erster Gattung $\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = F(\psi, k)$,

daher
$$t = k\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{F\left(\frac{\alpha}{2}, k\right) - F\left(\frac{\vartheta}{2}, k\right)\right\}. \tag{23}$$

Mit $\vartheta = 0$ ergiebt sich hieraus die Zeit t_1, welche bis zur Ankunft des schweren Punktes in der tiefsten Bahnstelle verfliesst,

$$t_1 = k\sqrt{\frac{a}{g}}F\left(\frac{\alpha}{2}, k\right).$$

Mithin ist die Zeit, innerhalb welcher der Punkt von P bis zur tiefsten Stelle niedersteigt,

$$t_1 - t = k\sqrt{\frac{a}{g}}F\left(\frac{\vartheta}{2}, k\right). \tag{24}$$

Im vorliegenden Falle macht der Punkt keine Schwingungen im gewöhnlichen Sinne des Wortes, sondern vollständige Umläufe um den festen Punkt des Pendels. Die Zeit eines Umlaufes ergiebt sich mit $\vartheta = -(2\pi - \alpha)$ in (24). Nun ist aber

$$F\left\{-(\pi - \alpha), k\right\} = \int_0^{-(\pi - \frac{\alpha}{2})} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = -\int_0^{(\pi - \frac{\alpha}{2})} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

$$= -\left\{\int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} - \int_{(\pi - \frac{\alpha}{2})}^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}\right\}.$$

Das erste dieser beiden Integrale ist, weil der Elementarfaktor zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ dieselben Werte wie zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π hat, gleich $2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$; das zweite geht durch die Substitution $\psi = \pi - \psi'$ über in $\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi'}}$

$= F\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$, so dass $-F\left\{-\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right), k\right\} = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = 2K - F\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$.

Damit giebt nun die Formel (23) als Umlaufszeit

$$T = 2\,k\sqrt{\frac{a}{g}}\,K,\ mod.\ k. \tag{25}$$

Die Bestimmung von ϑ als Funktion der Zeit hat durch Umkehrung der Formel (24) zu erfolgen. Indem wir $\psi = am\ (u, k)$ als die Umkehrung von $u\ F(\psi, k)$ ansehen, ist

$$\vartheta = 2\ am\left\{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{a}}(t_1 - t), k\right\} \text{ und } sin\,\vartheta = sin\,2\ am\left\{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{a}}(t_1 - t), k\right\}, \tag{26}$$

womit der Winkel ϑ bestimmt ist.

Ferner haben wir $d\,am\,u = \sqrt{1 - k^2\,sin\,am\,u}\,d\,u = \Delta\,am\,u\,d\,u$, folglich

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2}{k}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\Delta\,am\left\{\frac{t_1 - t}{k}\sqrt{\frac{g}{a}}, k\right\}. \tag{26}$$

Weil nun $v = -a\frac{d\vartheta}{dt}$, ist noch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

$$v = \frac{2}{k}\sqrt{a\,g}\,\Delta\,am\left\{\frac{t_1 - t}{k}\sqrt{\frac{g}{a}}, k\right\}. \tag{27}$$

Für die Beschleunigung des Widerstandes haben wir hier

$$N = g\,cos\,\vartheta + \frac{v^2}{a}. \tag{28}$$

Im tiefsten Punkte der Bahn ist $\vartheta = 0$, $cos\,\vartheta$ ein Maximum und auch die Geschwindigkeit ein Maximum $= v_1$, so dass für diese Stelle die Beschleunigung des Widerstandes ihr Maximum erreicht und $N_{max} = g + \frac{v_1^2}{a}$ ist. Wird die höchste Stelle des Kreises erreicht, dann ist $\vartheta = -\pi$, $v = v_2$ ein Minimum, daher die Widerstandsbeschleunigung ebenfalls ein Minimum, nämlich $N_{min} = \frac{v_2^2}{a} - g$. Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ wird $N = \frac{v^2}{a}$, wobei v diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher der Punkt die Horizontalebene des Kreismittelpunktes passiert.

Autenheimer, Elementarbuch der Differentialrechnung etc. Duhamel, Mécanique Analytique. Schell, Theorie der Bewegung u. der Kräfte.

15. Ein schwerer Punkt fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf einer gemeinen Schraubenlinie. Die Axe der Bahn ist vertikal. Wie ist die Bewegung beschaffen?

Es seien die Gleichungen der Coordinaten eines beliebigen Bahnpunktes (x, y, z)

$$x = a\,cos\,\varphi, \qquad y = a\,sin\,\varphi, \qquad z = a\,\varphi\,tg\,\alpha = m\,\varphi,$$

und werde die Axe der z vertikal abwärts positiv genommen. Damit erhalten wir

$$dx = -a \sin\varphi\, d\varphi,\quad dy = a\cos\varphi\, d\varphi,\ dz = m\, d\varphi,$$
$$d^2x = -a\cos\varphi\, d\varphi^2,\quad d^2y = -a\sin\varphi\, d\varphi^2,\quad d^2z = 0,$$

so dass $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a\sqrt{1+m^2}\, d\varphi,$

$$s = a\sqrt{1+m^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = a(\varphi - \varphi_0)\sqrt{1+m^2}.$$

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}} = a(1+m^2).$$

Beim Beginn der Bewegung sei $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, und v ist $= v_0$. Für die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle erhalten wir

$$v^2 = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + C = 2\int g\,dz + C = 2gz + C.$$

Mit $z = 0$ ist $v = v_0$, daher $C = v_0^2$, so dass

$$v^2 = v_0^2 + 2gz = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{1}$$

Die Zerlegung der Beschleunigung φ in tangentialer und normaler Richtung zur Bahn giebt $\varphi_t = g\sin\alpha$, $\varphi_n = g\cos\alpha$, so dass

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha,\quad \int_{v_0}^{v} dv = g\sin\alpha\int_0^t dt,\quad v = v_0 + g\sin\alpha\,.\,t. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$t = \frac{v - v_0}{g\sin\alpha} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gz} - v_0}{g\sin\alpha}. \tag{3}$$

Ferner erhalten wir mit (2)

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + g\sin\alpha\,.\,t,\quad \int_0^s ds = \int_0^t (v_0 + g\sin\alpha\,.\,t)\,dt,$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g\sin\alpha\,.\,t^2. \tag{4}$$

Für den beim Durchlaufen des Bogens s beschriebenen Winkel haben wir

$$\varphi = \frac{z}{m} = \frac{v^2 - v_0^2}{2mg} = (2v_0 + \sin\alpha\,.\,t)\frac{\sin\alpha\,.\,t}{2}. \tag{5}$$

Daraus geht hervor, dass die Bewegung auf der Schraubenlinie eine gleichförmig beschleunigte ist.

Die Beschleunigung des Widerstandes in der Richtung des Krümmungshalbmessers ist $\frac{v^2}{\varrho}$, senkrecht zur Bahn in der Tangentialebene an die Curve $g\cos\alpha$, mithin

$$N = \sqrt{g^2\cos^2\alpha + \left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2} = \sqrt{g^2\cos^2\alpha + \left[\frac{v^2}{a(1+m^2)}\right]^2}. \tag{6}$$

Weil ϱ konstant ist, so wächst die Beschleunigung des Widerstandes mit der Zeit.

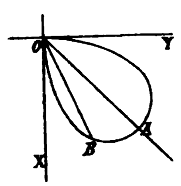
16. Die Ebene einer Ellipse ist unter beliebigem Winkel zu der ihre grosse Axe enthaltenden horizontalen Ebene geneigt. Von einem Brennpunkte aus fällt ein

schwerer Punkt auf einer Geraden in der kürzesten Zeit nach dem Perimeter der Ellipse. Welches ist die Lage dieser Geraden, wenn ϑ ihre Neigung gegen den Abstand des Brennpunktes von der entfernteren Abside bezeichnet?

$$\cos\vartheta = \frac{1-\sqrt{8e^2+1}}{4e}.$$

Walton, p. 309.

17. Ein schwerer Punkt fällt auf dem Bogen OB (Fig. 75) eines Auges der Lemniscate herab. Die Curve liegt in einer vertikalen Ebene und die Horizontalneigung ihrer Axe ist gleich 45°. Wie gross ist die Fallzeit t?



Figur 75.

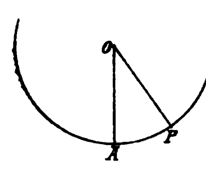
Bezeichnet a die Halbaxe der entsprechenden gleichseitigen Hyperbel, ϑ den Winkel zwischen der Sehne OB und der Lemniscatenaxe OA, dann ist

$$t = 2\sqrt{\frac{2a}{g}}\sqrt[4]{tg\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right)}.$$

Dieser Ausdruck ist derselbe wie derjenige für den Fall eines schweren Punktes herab die Sehne OB, eine von Saladini entdeckte Eigenschaft. (Memorie dell' Instituto Nazionale Italiano, Tom. I, parte 2).

Walton, p. 312.

18. Ein schwerer Punkt schwingt auf einem vertikalen Kreisbogen. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle?

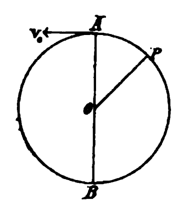


Figur 76.

Es sei (Fig. 76) O der Mittelpunkt der Kreisbahn, A ihre tiefste Stelle, P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit, $\measuredangle AOP = \vartheta$, α der Wert von ϑ, wenn die Geschwindigkeit gleich Null ist, dann ergiebt sich

$$N = (3\cos\vartheta - 2\cos\alpha)\,g.$$

19. Ein schwerer Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit nach dem Scheitel eines vertikalen Kreises entlang der konvexen Seite der Curve geworfen. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle?



Figur 77.

Es sei (Fig. 77) AOB der vertikale Durchmesser, O der Mittelpunkt des Kreises, P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit, $OP = a$, $\measuredangle AOP = \vartheta$, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bei A, dann ist

$$N = \frac{v_0^2}{a} + g(2 - 3\cos\vartheta).$$

Wenn anfangs $N = 0$, dann ist $\frac{v_0^2}{a} = g$ und in $P, N = 3g(1-\cos\vartheta)$, so dass $N = 6g$ mit $\vartheta = \pi$, also die Widerstandsbeschleunigung im tiefsten Bahnpunkte gleich der sechsfachen Fallbeschleunigung ist.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 65, Cor. 7.

20. Ein schwerer Punkt fällt in einer engen cycloidischen Röhre mit vertikaler Axe und nach oben gelegenem Scheitel. Die Anfangslage des Punktes ist nahe dem Scheitel. Wie gross ist die Widerstandsbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle,

wenn ϱ den Krümmungsradius der Bahn daselbst und a den Halbmesser ihres Erzeugungskreises bedeutet?

$$N = \left(\frac{\varrho}{2a} - \frac{4a}{\varrho}\right) g.$$

18—20. Walton, p. 319.

21. Auf der nach oben gehenden konvexen Seite einer Curve in einer vertikalen Ebene liegt ein schwerer Punkt und es wird ihm in der Richtung der Bahntangente eine Geschwindigkeit erteilt. Wo verlässt er die Curve?

An derjenigen Stelle, wo die doppelte Geschwindigkeitshöhe gleich der Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Vertikale ist.

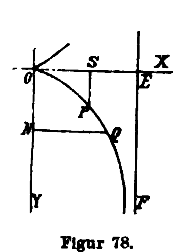
22. Ein schwerer Punkt fällt aus der Ruhe auf der konvexen Seite einer Ellipse mit vertikaler grosser Axe herab. Wo verlässt der Punkt die Bahn, wenn seine Anfangslage gegeben ist?

Es sei der höchste Bahnpunkt Ursprung der Coordinaten, die Axe der x vertikal, diejenige der y horizontal, a die grosse, b die kleine Halbaxe der Ellipse, h die vertikale Entfernung der Anfangslage von der Axe der y, x die Abscisse der Abgangsstelle, welche damit eine Wurzel der kubischen Gleichung ist

$$(a^2 - b^2)(x^3 - 3ax^2) - 3a^2b^2x + a^3(b^2 + 2ah) = 0.$$

Fontana, Memorie della Societa Italiana, 1782, p. 175. Walton, p. 320.

23. Ein schwerer Punkt fällt auf der konvexen Seite der Cissoide des Diocles; die Asymptote der Curve ist vertikal, die Anfangslage des Punktes ist bekannt. Wo verlässt der Punkt die Curve?



Figur 78.

Es sei (Fig. 78) P die Anfangslage des Punktes, Q der Ort, wo er die Curve verlässt. Ziehe die Geraden PS, QN rechtwinkelig zu OX, OY, lasse sein $PS = h$, $QN = x$, $a =$ dem Halbmesser des Erzeugungskreises, dann ist der Wert von x eine Wurzel der der kubischen Gleichung

$$x^3 - \frac{16a}{9}x^2 + \frac{64a^2 + 36h^2}{81}x - \frac{8ah^2}{9} = 0.$$

Beginnt die Bewegung von der Spitze O aus, so ist $h = 0$, mithin in diesem Falle $x = \frac{8}{9}a$.

Fontana, Ibd. p. 181. Walton, p. 321.

24. Die grosse Axe einer Ellipse mit den Halbaxen $a, b\ (a > b)$ ist vertikal. Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss ein schwerer Punkt aus einem Endpunkte der kleinen Axe vertikal aufwärts, entlang der Innenseite des Bogens geworfen werden, damit er nach dem Verlassen der Curve durch ihr Centrum sich bewegt?

$$v_0 = \sqrt{\frac{8a^2 + b^2}{3a\sqrt{3}}\, g}.$$

Walton, p. 322.

b) Die Beschleunigung ist central.

1. Ein Punkt ist genötigt, sich auf einer geraden Linie zu bewegen und befindet sich an einer beliebigen Stelle derselben. Auf den Punkt

wirkt eine nach einem festen Centrum gerichtete, der Entfernung direkt proportionale Beschleunigung. Wie gross ist die Zeit einer Schwingung?

Ist x der Abstand des Punktes zu einer beliebigen Zeit t von seiner Ruhelage, r seine entsprechende Centraldistanz, μ^2 die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung, dann ist $\mu^2 r$ die Acceleration zur Zeit t, folglich

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\mu^2 r \frac{x}{r} = -\mu^2 x.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$x = A \sin \mu t + B \cos \mu t.$$

Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$, $x = a$, $\frac{d x}{d t} = 0$, dann wird $A = 0$, $B = a$, mithin

$$x = a \cos \mu t.$$

Wenn x seinen grössten negativen Wert annimmt, ist $\mu t = \pi$, folglich ist die Periode T einer completen Schwingung

$$T = \frac{\pi}{\mu}.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 91. Cor. 4. Walton, p. 301.

2. Ein Punkt bewegt sich auf einer logarithmischen Spirale aus einem Abstande a von ihrem Pole nach diesem vermöge einer Centralbeschleunigung, welche daselbst ihren Sitz hat und umgekehrt proportional dem Quadrate der Centraldistanz ist, ohne Anfangsgeschwindigkeit. Nach welcher Zeit T kommt der Punkt im Pole an, wenn $r = a e^{n \vartheta}$ die Gleichung der Bahn ist?

Für die Geschwindigkeit des Punktes haben wir

$$v^2 = C - 2 \int \frac{\mu}{r^2} d r = C + \frac{2 \mu}{r}$$

und mithin, weil mit Rücksicht auf die anfängliche Beschaffenheit der Bewegung $C = -\frac{2 \mu}{a}$ ist,

$$v^2 = 2 \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = 2 \mu \frac{a - r}{a r} = \left(\frac{d s}{d t}\right)^2 = \left(\frac{d r}{d t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d \vartheta}{d t}\right)^2.$$

Hieraus und aus der Gleichung der Bahn ergiebt sich

$$-\sqrt{\frac{2 n^2 \mu}{n^2 + 1}}\, d t = \sqrt{a} \frac{r\, d r}{\sqrt{a r - r^2}},$$

so dass durch Integration

$$C - \sqrt{\frac{2 n^2 \mu}{n^2 + 1}} . t = \sqrt{a} \left\{ -\sqrt{a r - r^2} + \frac{a}{2} arc \left(\sin = \frac{2 r - a}{a}\right) \right\}.$$

Aber mit $t = 0$ ist $r = a$, demnach $C = \frac{\pi}{4}\sqrt{a^3}$, mithin

$$t = \sqrt{\frac{a(n^2+1)}{2n^2\mu}}\left\{\sqrt{ar - r^2} + \frac{\pi}{4}a - \frac{a}{2}arc\left(sin = \frac{2r-a}{a}\right)\right\}.$$

Aus dieser Gleichung resultiert mit $r = 0$ die zur Erreichung des Poles erforderliche Zeit, sie ist von endlichem Betrage, nämlich

$$T = \frac{\pi a}{2n}\sqrt{\frac{a(n^2+1)}{2\mu}},$$

und mit $n = 1$

$$T = \frac{\pi}{2}a\sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

3. Ein Punkt bewegt sich auf der Konvexseite einer logarithmischen Spirale nach deren Pole mit einer nach ihm gerichteten und einer beliebigen Potenz des Abstandes direkt proportionalen Beschleunigung. Wie gross ist die Widerstandsbeschleunigung zu einer beliebigen Zeit während der Bewegung?

Es sei r der Abstand des Punktes vom Pole zu einer beliebigen Zeit t, μr^n die Beschleunigung, α der konstante Winkel zwischen Curve und Radiusvektor, v_0 die Geschwindigkeit, wenn $r = a$ ist. Nach der Formel (16) ist $P = \mu r^n \sin\alpha$, daher

$$N = \mu r^n \sin\alpha - \frac{v^2}{\varrho}. \tag{1}$$

Nehmen wir die Geschwindigkeit v des Punktes in der einem Wachstum von r entsprechenden Richtung, bezeichnen mit ds ein Element der Bahn, so ist

$$v\frac{dv}{ds} = -\mu r^n \cos\alpha, \tag{2}$$

und, weil hier

$$\frac{dr}{ds} = \cos\alpha,$$

$$v\frac{dv}{dr} = -\mu r^n.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt mit Rücksicht darauf, dass v_0, a zusammengehörige Werte von v, r sind,

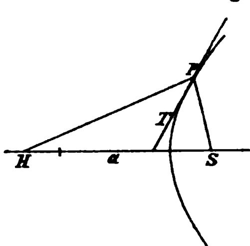
$$v^2 - v_0^2 = -\frac{2\mu}{n+1}(r^{n+1} - a^{n+1}). \tag{3}$$

Bezeichnet p die Länge des vom Pole auf die Bahntangente gefällten Perpendikels, so haben wir, weil $p = r\sin\alpha$, $\varrho = r\frac{dr}{dp} = \frac{r}{\sin\alpha}$, wodurch und mit (1), (2), (3) sich ergiebt

$$N = \mu\frac{n+3}{n+1}r^n \sin\alpha - \frac{v_0^2 \sin\alpha}{r} - \frac{2\mu \sin\alpha}{(n+1)r}a^{n+1}.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 86. Walton, p. 315.

4. Ein Punkt bewegt sich auf einer Hyperbel, er wird nach zwei mit den Brennpunkten der Bahn zusammenfallenden Centren beschleunigt und sind die Accelerationen umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes. Wie gross ist die Druckbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle, wenn angenommen wird, dass der Punkt auf der konkaven Seite der Curve sich bewegt?



Figur 79.

Es sei (Fig. 79) P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit t. S und H seien die Brennpunkte der Hyperbel. Lasse sein $SP = r$, $HP = r'$, $a =$ der transversalen Halbaxe, PT die Tangente in P, $\sphericalangle SPT = \psi = \sphericalangle HPT$, μ und μ' die absoluten Beschleunigungen nach S und H.

Indem wir die Beschleunigungen auf die Bahnnormale in P projizieren, erhalten wir durch Formel (16)

$$N = \left(\frac{\mu'}{r'^2} - \frac{\mu}{r^2}\right) \sin\psi + \frac{v^2}{\varrho}. \tag{1}$$

Für die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle haben wir

$$v^2 = 2\int\left(-\frac{\mu'}{r'^2}dr' - \frac{\mu}{r^2}dr\right) + C = 2\left(\frac{\mu'}{r'} + \frac{\mu}{r}\right) + C.$$

Sind nun die Werte von r, r', v zu einer gewissen Zeit r_0, r_0', v_0, dann ist

$$v_0{}^2 = 2\left(\frac{\mu'}{r_0'} + \frac{\mu'}{r_0}\right) + C,$$

mithin

$$v^2 = 2\mu'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'_0}\right) + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + v_0{}^2. \tag{2}$$

Jetzt ergiebt sich mit (1) und (2)

$$N\varrho = \left(\frac{\mu'}{r'^2} - \frac{\mu}{r^2}\right)\varrho \sin\psi + \frac{2\mu'}{r'} + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu'}{r_0'} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0{}^2,$$

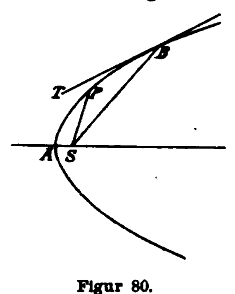
und weil $\varrho \sin\psi$ gleich der Krümmungssehne durch den Brennpunkt S. gleich $\frac{2rr'}{a}$ für die gegebene Bahn ist, folgt mit diesem Werte nach gehöriger Reduktion

$$N\varrho = \frac{\mu' r_0}{a r_0'} - \frac{\mu r_0'}{a r_0} + v_0{}^2. \tag{3}$$

Ist beim Beginn der Bewegung die Geschwindigkeit gleich Null und sind die Intensitäten der beiden Beschleunigungen einander gleich, dann haben wir $v_0 = 0, \frac{\mu}{r_0{}^2} = \frac{\mu'}{r'_0{}^2}$, demnach $N = 0$ während der ganzen Bewegung, und würde unter diesen Umständen der Punkt die Hyperbel frei beschreiben.

Walton, p. 317.

5. Ein Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit von einer gegebenen Stelle aus entlang der konvexen Seite einer Parabel geworfen und nach dem Brennpunkte derselben umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanz beschleunigt. Wie gross ist die Widerstandsbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle?



Figur 80.

Es sei (Fig. 80) S der Brennpunkt der Parabel, B der Wurfpunkt, P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit, $SP = r$, $SB = a$, $SA = m$, $v_0 =$ der Wurfgeschwindigkeit, $\mu =$ der absoluten Acceleration nach S, dann ist bei P

$$N = \sqrt{\frac{m}{r^3}}\left(\frac{\mu}{a} - \frac{v_0^2}{2}\right).$$

6. In dem einen Endpunkt des Diameters eines Halbkreises befindet sich das Centrum einer repulsiven, dem Abstande direkt proportionalen Beschleunigung. Wie gross ist die Widerstandsbeschleunigung, wenn der Punkt vom Centrum aus, ohne Anfangsgeschwindigkeit, entlang der konkaven Seite der Curve sich bewegt? In welcher Zeit wird der andere Endpunkt des Durchmessers erreicht?

Ist a der Radius des Kreises, r die Centraldistanz des Punktes, μ die absolute Beschleunigung, dann wird gefunden werden

$$N = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu r^2}{a}.$$

Die verlangte Zeit ist unendlich gross.

5 und 6, Walton, p. 321.

7. Ein Punkt bewegt sich in einer parabolischen Röhre infolge zweier Beschleunigungen; die eine derselben ist central, mit dem Centrum im Focus, und repulsiv, die andere parallel zur Axe; jede derselben ist direkt proportional dem Focalabstand des Punktes. Welches ist die Widerstandsbeschleunigung?

Es sei m die Focaldistanz des Scheitels, v_0 die Geschwindigkeit im Scheitel, r der Focalabstand der fraglichen Bahnstelle; μ, ν seien die absoluten Beschleunigungen. Damit ergiebt sich

$$N = \sqrt{\frac{m}{2 r^3}}\left\{(3\mu - \nu) r^2 - (\mu + \nu) m^2 + v_0^2\right\}.$$

Wenn $\nu = 3\mu$ und $v_0^2 = (\mu + \nu) m^2$ ist, so beschreibt, weil dann $N = 0$, der Punkt die Parabel frei.

Walton, p. 322.

8. Ein Punkt bewegt sich in einer engen Röhre von der Form einer Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ und wird nach dem Knoten umgekehrt proportional der siebenten Potenz des Abstandes beschleunigt. Wie gross ist die Druckbeschleunigung?

Die gesuchte Acceleration ist direkt proportional der Knotendistanz des Punktes.

9. Ein Punkt bewegt sich entlang der konvexen Seite einer Ellipse infolge zweier nach ihren Brennpunkten gerichteten und dem Quadrate des Abstandes verkehrt proportionalen Beschleunigungen, sowie einer dritten nach dem Mittelpunkte gerichteten und der Distanz direkt proportionalen Acceleration. Wie gross ist die Reaktionsbeschleunigung an einer beliebigen Bahnstelle?

Es seien r_1, r_2 die anfänglichen Focalabstände, μ_1, μ_2, μ_3 die absoluten Beschleunigungen. $2a$ bezeichne die grosse Axe der Ellipse, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, dann ist

$$N\varrho = \frac{\mu_1 r_2}{a r_1} + \frac{\mu_2 r_1}{a r_2} + \mu_3 r_1 r_2 - v_0^2.$$

Wenn v_1, v_2, v_3 die Geschwindigkeiten bedeuten, welche der Punkt anfangs besitzen sollte, damit er sich frei um die drei Centren, einzeln genommen, bewegen kann, so ist

$$v_1^2 = \frac{\mu r_2}{a r_1}, \quad v_2^2 = \frac{\mu_2 r_1}{a r_2}, \quad v_3^2 = \mu_3 r_1 r_2,$$

mithin wird er sich, wenn die Beschleunigungen vereinigt genommen werden, um die drei Centren frei drehen, sobald

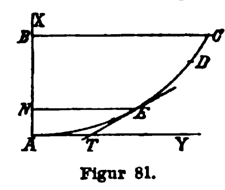
$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

8 u. 9, Walton, p. 323.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der vorzuschreibenden Bahn aus gegebenen Bedingungen und des Beschleunigungsgesetzes bei gegebener Bahn.

1. Zu erforschen die Gleichung der tautochronischen Curve, wenn die auf den Punkt wirkende veränderliche Beschleunigung eine zu einer festen Geraden parallele Richtung besitzt.



Figur 81.

Es sei (Fig. 81) AEC die Hälfte der verlangten Curve mit dem tiefsten Punkte A, die Tangente AY in A Ordinaten-, die zu ihr senkrechte Linie AX Abscissenaxe, die Beschleunigung φ parallel AX und abwärts gerichtet. Die Acceleration an einer beliebigen Bahnstelle E zerlegen wir parallel und senkrecht zu der Tangente ET daselbst und bezeichnen die erstere, die Bewegung hervorbringende Componente mit $\varphi(s)$, so ist

$$v\frac{dv}{ds} = -\varphi(s), \quad \text{oder} \quad v^2 = -2\int\varphi(s)\,ds + C.$$

Nun sei $2\int\varphi(s)\,ds = \psi(s)$, D der Anfangspunkt der Bewegung, für welchen $v = 0$, $s = s_0$, so dass $C = \psi(s_0)$, dann ist auch

$$v^2 = \psi(s_0) - \psi(s), \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\psi(s_0) - \psi(s)},$$

folglich $$t = \int_{s_0}^{0} \frac{-ds}{\sqrt{\psi(s_0) - \psi(s)}}.$$

Der Bedingung entsprechend muss die Zeit t von dem Bogen s_0 unab-

hängig sein. Die Entwickelung von $\frac{1}{\sqrt{\psi(s_0) - \psi(s)}}$ nach dem binomischen Satze giebt

$$t = \int_0^{s_0} \left\{ \frac{1}{[\psi(s_0)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\psi(s)}{2[\psi(s_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.4} \frac{[\psi(s)]^2}{[\psi(s_0)]^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right\} d s.$$

Nun muss $\int_0^s \frac{ds}{[\psi(s_0)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{s_0}{[\psi(s_0)]^{\frac{1}{2}}}$ für alle möglichen Werte von s unabhängig sein, daher muss sein $\frac{s}{[\psi(s)]^{\frac{1}{2}}} = Konst$, oder $Cs^2 = \psi(s)$, $Cs_0{}^2 = \psi(s_0)$. Werden diese Werte von $\psi(s)$ und $\psi(s_0)$ in die übrigen Glieder der obigen Reihe eingeführt, so zeigt sich nach der Integration, dass die Resultate unabhängig von s_0 sind. Wir haben daher nur der Bedingung zu genügen

$$v^2 = C(s_0{}^2 - s^2) = 2\int (X dx + Y dy),$$

oder, indem wir differentiieren,

$$X dx + Y dy = C s ds.$$

Dieses ist die Differentialgleichung der verlangten tautochronischen Curve, welche auch dann noch gilt, wenn die Richtung der Beschleunigung φ nicht parallel zu einer der Coordinatenaxen ist.

Wenn die Beschleunigung konstant, parallel zur Abscissenaxe und etwa gleich g ist, so haben wir $X = -g$, $Y = 0$, folglich

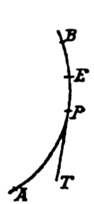
$$g dx = C s ds, \quad 2gx = Cs^2, \quad \text{d. i. auch} \quad s^2 = 2ax,$$

welche Eigenschaft der gemeinen Cycloide zukommt, es bezeichnet a den vierfachen Halbmesser ihres Erzeugungskreises.

Bei konstanter Beschleunigung g lässt sich die tautochronische Linie sehr leicht wie folgt bestimmen. Beachten wir, dass die Acceleration in der Richtung der Curve stets proportional dem Sinus des Winkels ist, welchen die Tangente in dem fraglichen Curvenpunkte mit dem Horizonte macht, ist A der in gleichen Zeiten zu erreichende tiefste Punkt, es mag die Bewegung in D, E oder irgend einer anderen Stelle beginnen, so muss die in E wirkende Beschleunigung dem noch zurückzulegenden Bogen EA direkt proportional sein. Ist nun ET die Bahntangente in E, dann ist $\sin \measuredangle ETY = \frac{dx}{ds}$, folglich muss für die Tautochrone $s = a\frac{dx}{ds}$, oder $s^2 = 2ax$ sein, welches eine Gleichung der gemeinen Cycloide ist.

2. Auf einen Punkt wirken in einer Ebene beliebige Beschleunigungen. Welches ist die Gleichung der Tautochrone?

Es sei (Fig. 82, S. 230) A irgend ein bestimmter Punkt, E ein beliebiger Punkt der zu suchenden Curve AEB, dann muss die Zeit der Bewegung von E bis A unabhängig von der Lage des Punktes E sein.



Figur 82.

Ferner sei P ein beliebiger Punkt in dem Bogen AE, $AP = s$, $AE = s_0$, $S =$ der Summe der Projektionen der Beschleunigungen auf die Bahntangente in P. Damit besteht für die Bewegung des Punktes die Gleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -S, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C - 2\int S\,ds.$$

Annehmend, dass der Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit besitze, ist $C = 2\int_s^{s_0} S\,ds$, womit

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\int_s^{s_0} S\,ds, \quad \text{oder} \quad dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ds}{\left(\int_s^{s_0} S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

und ist daher die Zeit der Bewegung von E bis A

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{s_0} \frac{ds}{\left(\int_s^{s_0} S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Zeit muss von s_0 unabhängig sein, folglich müssen wir haben

$$\int \frac{ds}{\left(\int_s^{s_0} S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}} = \psi\left(\frac{s}{s_0}\right),$$

wo $\psi\left(\frac{s}{s_0}\right)$ eine Funktion von $\frac{s}{s_0}$ bezeichnet, mithin auch

$$\frac{1}{\left(\int_s^{s_0} S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{s_0}\psi'\left(\frac{s}{s_0}\right), \qquad \int_s^{s_0} S\,ds = \frac{s_0^{\,2}}{\left\{\psi'\left(\frac{s}{s_0}\right)\right\}^2},$$

die letzte Relation nach s differentiiert, giebt

$$-S\,ds = d\,\frac{s_0^{\,2}}{\left\{\psi'\left(\frac{s}{s_0}\right)\right\}^2}.$$

Da nun die Zeit von der Anfangslage unabhängig sein muss, so ist die Bedingung zu erfüllen

$$\left\{\psi'\left(\frac{s}{s_0}\right)\right\}^2 = -\frac{s_0^{\,2}}{A s^2},$$

wobei A eine konstante Grösse ist, d. h. es muss sein, wenn k eine weitere Konstante bedeutet,

$$S = k s. \tag{2}$$

Folglich erhalten wir mit den Gleichungen (1) und (2)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k\left(s_0^{\,2} - s^2\right)$$

und daher, wenn τ die Zeit der Bewegung von E bis A bezeichnet,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{s_0}^{0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^{\,2} - s^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}, \qquad k = \frac{\pi^2}{4\tau^2},$$

so dass mit (2)

$$S = \frac{\pi^2}{4\tau^2} s,$$

welches eine Differentialgleichung der Tautochrone ist.

Das direkte Problem der Tautochronen für die Bewegung eines schweren Punktes wurde zuerst von Huyghens untersucht. In seinem Horologium Oscillatorium beweist er, dass die umgekehrte Cycloide mit vertikaler Axe tautochron ist. Das umgekehrte Problem wurde zuerst von Newton betrachtet. Principia, Lib. I. sect. 10. Siehe auch Euler, Comment. Petrop. 1729, und Mechan., Tom. II, p. 211.

Walton, p. 331.

3. Auf einen Punkt wirkt eine nach einem festen Centrum gerichtete und der Centraldistanz direkt proportionale Beschleunigung. Welches ist die Tautochrone?

Es bezeichne μ die absolute Beschleunigung, r den Fahrstrahl nach einem beliebigen Bahnpunkte, p das Perpendikel vom Centrum auf die Bahntangente in diesem Punkte, ω die Neigung der Tangente zum Radiusvektor.

Indem wir in der Formel des vorhergehenden Problemes $S = \mu r \cos \omega$ setzen, erhalten wir

$$\mu r \cos \omega = \frac{\pi^2 s}{4\tau^2}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$\mu \, d(r \cos \omega) = \frac{\pi^2}{4\tau^2} d s,$$

oder, weil $d s \cos \omega = d r$,

$$\mu r \cos \omega \, d(r \cos \omega) = \frac{\pi^2}{4\tau^2} r \, d r.$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$\mu r^2 \cos^2 \omega + C = \frac{\pi^2 r^2}{4\tau^2}, \quad \text{oder} \quad \mu (r^2 - p^2) + C = \frac{\pi^2 r^2}{4\tau^2}.$$

Nun sei a der Wert von r, wenn $s = 0$, demnach wenn $\omega = \frac{\pi}{2}$, dann ist $p = a$ und folglich $C = \frac{\pi^2 a^2}{4\tau^2}$. Damit erhalten wir

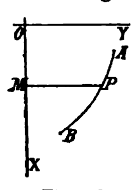
$$\mu p^2 = \left(\mu - \frac{\pi^2}{4\tau^2}\right) r^2 + \frac{\pi^2 a^2}{4\tau^2}$$

als Differentialgleichung der Curve.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 208. Walton, p. 333.

4. Auf einen Punkt wirken in einer Ebene beliebige, bestimmte Beschleunigungen und bewegt er sich auf einer Curve von einem gegebenen Punkte zu einem anderen. Die Gestalt der Curve soll so bestimmt werden,

dass die ganze Zeit der Bewegung zwischen diesen zwei Bahnpunkten die kleinstmögliche sein kann.



Figur 83.

Es sei (Fig. 83) P ein beliebiger Punkt der verlangten auf rechtwinkelige Coordinatenaxen bezogenen Curve, $OM=x$, $PM=y$. A und B seien die beiden gegebenen Bahnpunkte. Lasse sein Bogen $AP=s$, die Abscissen der Punkte A und B gleich a und b resp. Die Zeit folgt aus $\frac{ds}{dt}=v$, womit, wenn $\frac{dy}{dx}=p$ gesetzt wird,

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{v}dx,$$

Demnach ist die Zeit der Bewegung von A bis B

$$t=\int_a^b\frac{\sqrt{1+p^2}}{v}dx. \tag{1}$$

$\frac{\sqrt{1+p^2}}{v}=V$ setzend, haben wir, damit die Zeit ein Minimum sein kann, durch die Variationsrechnung, weil V nur p und v enthält, von welchen die letztere nur eine Funktion von x und y ist, wenn N, P die partiellen Differentialquotienten von V nach y, p bezeichnen, $\frac{dP}{dx}$ den totalen Differentialquotienten von P nach x darstellt,

$$N-\frac{dP}{dx}=0. \tag{2}$$

Nun ist, wenn $\frac{dv}{dy}$ den partiellen Differentialquotienten von v nach y bezeichnet,

$$N=\frac{1}{v^2}\sqrt{1+p^2}\frac{dv}{dy}. \tag{3}$$

Weil aber auch $v\,dv=X\,dx+Y\,dy$, also in (3) $\frac{dv}{dy}=\frac{Y}{v}$, so folgt

$$N=-\frac{Y}{v^3}\sqrt{1+p^2}=-\frac{Y}{v^3}\frac{ds}{dx},$$

und

$$P=\frac{p}{v\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}.$$

Substituieren wir diese Werte von N und P in (2), so wird

$$\frac{Y}{v^3}\frac{ds}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

$$\frac{Y}{v^3}\frac{ds}{dx}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{1}{v}\frac{d}{dx}\frac{dy}{ds}=0,$$

und, weil $\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v}\left(X+Y\frac{dy}{dx}\right)$,

$$\frac{Y}{v^3}\frac{ds}{dx} - \frac{1}{v^3}\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{1}{v}\frac{d}{dx}\frac{dy}{ds} = 0,$$

woraus nach einigen unverkennbaren Reduktionen sich ergiebt

$$v^2\frac{d}{dx}\frac{dy}{ds} = X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}. \tag{4}$$

Eliminieren wir mit Hilfe von (3) aus dieser Gleichung v, so erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die Gleichung der verlangten Curve ist. Die zwei durch ihre Integration eingeführten Konstanten sind aus den Bedingungen zu bestimmen, welche sich daran knüpfen, dass die Curve durch die zwei gegebenen Punkte A und B gehen muss.

Die Gleichung (4) ist äquivalent zu

$$\frac{v^2}{\varrho} = Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds},$$

wo ϱ den Krümmungshalbmesser der Bahn im Punkte P bezeichnet, welches Resultat zeigt, dass die Summe der Normalbeschleunigungen der auf den Punkt wirkenden Accelerationen gleich der Centrifugalbeschleunigung ist.

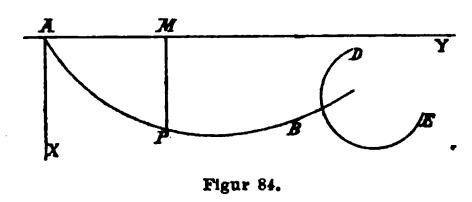
Die in Frage stehende Curve gehört zu der Klasse von krummen Linien, welche Brachistochronen genannt werden, sie sind durch die allgemeine Eigenschaft charakterisiert, dass ein Punkt infolge bestimmter Beschleunigungen sich entlang ihnen innerhalb gegebener Grenzen in der kleinstmöglichen Zeit bewegt.

Das Problem der Brachistochrone zwischen zwei gegebenen Punkten, wenn die Beschleunigung durch die Schwere erzeugt wird, wurde von Johann Bernoulli zu einem Wettstreite den Mathematikern seiner Zeit im Jahre 1696 vorgeschlagen. (Acta Erudit. Lips. 1696, Jun. p. 269). Sechs Monate Zeit erlaubte er für die Lösung. Leibnitz hatte sogleich Erfolg und teilte sein gutes Glück durch einen Brief Bernoulli mit. (Commerc. Epistol. Leibnitii et Bernoullii, Epist. 28.) Während der vorgeschriebenen Zeit erschien keine weitere Lösung. Dem Wunsche von Leibnitz, die Zeit des Wettstreites bis zu dem darauf folgenden Ostern zu verlängern, pflichtete Bernoulli bei und es wurden die von ihm selbst und Leibnitz erhaltenen Resultate bis zu diesem Zeitabschnitte verheimlicht. Demgemäss wurde zu Groningen im Januar 1697 ein Programm veröffentlicht, welches das Problem nochmals ankündigte und die Aufforderung wiederholte. Durch diesen Aufschub erhielten noch drei andere Mathematiker Lösungen, Newton (anonym, Philos. Trans. 1697, Num. 244, p. 389), Jakob Bernoulli (Acta Erudit. Lips. Mai, 1697, p. 212), L'Hôpital (Acta Erudit. Lips. ibid. p. 217). Die Lösung von Leibnitz wurde mitgeteilt in Acta Erudit. Lips. Mai 1697, p. 203. Die Resultate von Leibnitz, Newton und L'Hôpital wurden ohne Analyse gegeben. Johann Bernoulli lieferte zwei verschiedene Lösungen, eine direkte und eine indirekte; die letztere erschien in Acta Erudit. Lips. Mai, 1697, p. 207, die erstere kam im Jahre 1718 an die Öffentlichkeit bei einer Abhandlung über isoperimetrische Probleme in Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, p. 136; siehe auch seine Werke, Tom. II, p. 266. Eine fernere Lösung dieses Problemes gab nachmals Craig, (Phil. Trans. 1701, Vol. XXII.

p. 746), welcher nur Newtons Resultat gesehen hatte, ohne die Analyse zu beachten, die Johann und Jakob Bernoulli zur öffentlichen Kenntnis gebracht hatten.

Walton, p. 336.

5. Die Brachistochrone zu finden, wenn auf den Punkt die Fallbeschleunigung g wirkt.



Figur 84.

Es sei (Fig. 84) AB die verlangte Curve, A der Anfangspunkt der Bewegung, für welchen die Geschwindigkeit $v = 0$ sein mag, P ein beliebiger Bahnpunkt, AX, positiv vertikal abwärts, die Abscissenaxe, die Horizontale AY Ordinatenaxe des rechtwinkeligen Coordinatensystemes, $PM \perp AY$, $MP = x$, $AM = y$, t die Zeit der Bewegung von A bis P, Bogen $AP = s$.

Im vorliegenden Falle sind die Projektionen der Beschleunigung φ auf die Coordinatenaxen $X = g$, $Y = 0$, daher ist die Geschwindigkeit des Punktes in P bestimmt durch

$$v^2 = 2\int_0^x g\,dx = 2gx = ax, \quad \text{mit} \quad 2g = a.$$

Mithin ist $\frac{ds}{dt} = \sqrt{ax}$, oder $dt = \frac{ds}{\sqrt{ax}}$, folglich

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{ax}}. \tag{1}$$

Der Wert dieses zwischen den Grenzen von A bis B genommenen Integrales muss ein Minimum sein. Nach den Regeln der Variationsrechnung müssen wir demnach haben

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = 0, \quad \text{oder} \quad \int \delta \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \delta \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}} = 0,$$

d. h. $$\int \left\{ \frac{dy\,\delta dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx\,\delta dy}{ds\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{ds\,\delta x}{\sqrt{x^3}} \right\} = 0,$$

oder, wenn wir die beiden ersten Glieder teilweise integrieren,

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x - \int \left\{ \left(d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} \right) \delta y + \left(d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{x^3}} \right) \delta x \right\} = 0.$$

Die Variationsrechnung zeigt, dass der jetzt noch unter dem Integralzeichen stehende und keiner weiteren Integration empfängliche Teil für sich verschwinden muss, und dass dieses stattfinden muss während δy und δx ganz unbestimmt bleiben. Dieses giebt zwei Gleichungen, denen beiden Genüge geschieht, wenn wir der einen Genüge thun, nämlich

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0, \qquad \text{und} \qquad d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{x^3}} = 0.$$

Die Integration der ersten liefert

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = C', \quad \text{oder auch} \quad \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{x}{C}}.$$

Demnach ist $\quad dy^2 = \frac{x}{C}(dx^2 + dy^2), \quad dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{C-x}}.$

Mit $\sqrt{\frac{x}{C}} = \sin\vartheta$ wird $\sqrt{1 - \frac{x}{C}} = \cos\vartheta$, $dx = 2\,C \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta$, also

$$dy = 2\,C \sin^2\vartheta\, d\vartheta = C(1 - \cos 2\,\vartheta)\, d\vartheta.$$

Integrieren wir diese Gleichung und beachten dabei, dass der Anfangspunkt der Bewegung Coordinatenursprung ist, woselbst ϑ verschwindet, so wird

$$y = C\vartheta - \frac{1}{2} C \sin 2\,\vartheta = \frac{1}{2} C(2\,\vartheta - \sin 2\,\vartheta), \tag{2}$$

und weil $x = C \sin^2\vartheta$, so ist noch

$$x = \frac{1}{2} C(1 - \cos 2\,\vartheta). \tag{3}$$

Setzen wir in (2) und (3) $\frac{1}{2} C = a$, $2\,\vartheta = \omega$, so folgt

$$x = a\,(1 - \cos\omega), \qquad y = a\,(\omega - \sin\omega). \tag{4}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit denjenigen der gewöhnlichen Cycloide, welche sonach die Brachistochrone eines schweren Punktes ist.

Es ist nun nachzuweisen, dass auch der zweiten Bedingung Genüge geschehen ist, sie lautet

$$d\,\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{x^3}} = 0.$$

Weil $ds = dy\sqrt{\frac{C}{x}}$, $\quad dx = dy\sqrt{\frac{C-x}{x}}$, so ist

$$\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{C-x}{Cx}}, \quad d\,\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{1-\frac{x}{C}}} = -\frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{x^3}},$$

womit diese zweite Bedingung erfüllt ist.

Die Konstante C bestimmt sich durch die Bedingungen, welche sich an den Anfangspunkt und den Endpunkt der Bewegung knüpfen. Sind die Coordinaten dieser Punkte gegeben durch $x = 0$, $y = 0$ und $x = b$, $y = c$, dann muss die Gleichung bestehen

$$c = \frac{1}{2} C \left\{ arc\left(\cos = \frac{C - 2\,b}{C}\right) - \sqrt{\frac{4\,b}{C} - \frac{4\,b^2}{C^2}} \right\},$$

aus welcher C folgt. Verhält sich c zu b wie der halbe Umfang zum Durchmesser des Erzeugungskreises, dann ist b gleich dem Diameter des Wälzungskreises und der zweite Punkt der tiefste Punkt der Cycloide.

Sobald $c > \frac{1}{2} b \pi$ ist, liegt der Endpunkt B schon auf dem aufwärts gehenden Bogenteile der Cycloide und der schwere Punkt muss eine tiefere Stelle als B erreichen, um in der kürzesten Zeit nach B zu gelangen.

Hier, wo die beiden Endpunkte feste Punkte sind, bedurfte es gar keiner Berücksichtigung der bei der Integration vom Integralzeichen frei werdenden Glieder, denn da alsdann für den Anfangspunkt so wenig wie für den Endpunkt den Variationen δx, δy andere Werte als Null beigelegt werden dürfen, indem die festen Punkte keine Veränderung der Lage gestatten, so fallen in beiden Endpunkten diese Glieder von selbst weg. Ist dagegen einer dieser Punkte nur so gegeben, dass er zwar auf einer bestimmten Curve liegen, aber auf ihr der kürzesten Fallzeit entsprechend angenommen werden soll, dann kommen für den auf diese Weise gegebenen Punkt jene Glieder mit in Betrachtung.

Es sei der Punkt A ein fester Punkt, der in der kürzesten Zeit von A aus zu erreichende Punkt B befinde sich auf einem Kreise DE vom Halbmesser r. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieses Kreises seien ν, ξ, seine Mittelpunktscoordinaten f, h, so dass seine Gleichung $(\nu - f)^2 + (\xi - h)^2 = r^2$. In diesem Falle müssen für den Endpunkt B die von dem Integralzeichen befreiten Glieder $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x$ den Wert erhalten, der einem durch ν und ξ auf dem Kreise bestimmten Punkte gemäss ist. Denken wir uns den Endpunkt etwas verschoben, so dass $\delta y = \delta \xi$ irgend einen Wert erhält, dann muss $\delta x = \delta \nu$ zugleich $= -\frac{(\xi - h)\delta \xi}{\nu - f}$ werden, weil die Variation des Endpunktes ein Fortrücken auf dem Kreise ist, und es muss daher sein

$$\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}} - \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\frac{\xi - h}{\nu - f}\right)\delta \xi = 0,$$

welcher Wert auch der $\delta\xi$ gegeben wird. Da nun dx, dy, ds das werden, was sie auf der Cycloide da sind, wo $x = \nu$, $y = \xi$, so wird $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{C - x}}$ hier $= dx\sqrt{\frac{\nu}{C - \nu}}$ und daher

$$\sqrt{\frac{\nu}{C - \nu}} = \frac{\xi - h}{\nu - f} = \frac{\sqrt{r^2 - (\nu - f)^2}}{\nu - f}. \tag{5}$$

Ferner muss die Gleichung bestehen

$$\xi = \frac{1}{2} C \left\{ arc\left(\cos = \frac{C - 2\nu}{C}\right) - \sqrt{\frac{4\nu}{C} - \frac{4\nu^2}{C^2}} \right\},$$

oder, weil $\xi = h + \sqrt{r^2 - (\nu - f)^2}$ ist,

$$h+\sqrt{r^2-(\nu-f)^2}=\frac{1}{2}C\left\{arc\left(cos=\frac{C-2\nu}{C}\right)-\sqrt{\frac{4\nu}{C}-\frac{4\nu^2}{C^2}}\right\}. \quad (6)$$

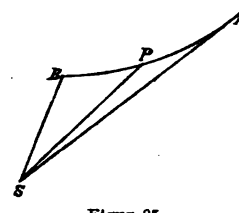
Mittelst der Gleichungen (5) und (6) lassen sich die Werte der Integrationskonstanten und der Abscisse des Punktes B bestimmen, so dass nun alle Grössen als bekannt anzusehen sind.

Die Gleichung $\frac{dy}{dx}=\frac{\xi-h}{\nu-f}=-\frac{d\nu}{d\xi}$ zeigt, dass die Linie des schnellsten Falles den Kreis, auf welchem sich der Punkt B befinden soll, rechtwinkelig schneidet.

Ganz ähnliche Bestimmungen ergeben sich für den Anfangspunkt A, wenn für dessen Lage nur eine Curve gegeben ist.

Brandes, Höhere Geometrie, II, p. 123.

6. Ein Punkt wird nach einem festen Centrum beschleunigt. Die Acceleration ist umgekehrt proportional dem Quadrate seiner Centraldistanz. Welches ist die Brachistochrone, wenn der Anfangs- und der Endpunkt der Bewegung gegeben sind?



Figur 85.

Es sei (Fig. 85) A die Anfangslage, B der Ort, welchen der Punkt von A aus in der kürzesten Zeit erreichen soll, P eine beliebige Stelle der Bahn, S das Beschleunigungscentrum, $SP=r$, $p=$ dem Perpendikel von S auf die Bahntangente in P, $\mu=$ der absoluten Beschleunigung, $v=$ der Geschwindigkeit, $\varrho=$ dem Krümmungshalbmesser bei P, $SA=a$, $\psi=$ dem Winkel zwischen SP und der Bahntangente in P.

Da nach dem Resultate des allgemeinen Problemes 4 die Centrifugalbeschleunigung gleich der Normalbeschleunigung sein muss, so besteht die Relation

$$\frac{v^2}{\varrho}=\frac{\mu}{r^2}\sin\psi. \quad (1)$$

Aber es ist
$$v^2=C-2\int\frac{\mu}{r^2}dr=C+2\frac{\mu}{r},$$

oder, weil $v=0$, wenn $r=a$, mithin $C=-\frac{2\mu}{a}$,

$$v^2=2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right). \quad (2)$$

Noch haben wir, berücksichtigend, dass die Curve nach S hin konvex ist,

$$\varrho=-r\frac{dr}{dp}. \quad (3)$$

Mit (1), (2), (3) ergiebt sich

$$\frac{2\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)}{r\frac{dr}{dp}}=\frac{\mu}{r^2}\frac{p}{r}, \quad \text{d. i.} \quad 2\frac{dp}{p}=\frac{a\,dr}{r(r-a)}.$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$2\,l(p)=l(C)+l\frac{r-a}{r}, \qquad l(p^2)=l\left(C\frac{r-a}{r}\right).$$

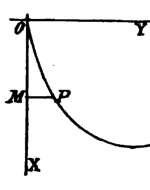
Aber C muss eine negative Grösse sein, weil $a>r$, wie aus (2) hervorgeht, so dass mit $C=-A$ die Differentialgleichung der Brachistochrone ist

$$p^2=A\frac{a-r}{r}.$$

Wenn wir durch Integration dieser Gleichung eine Relation zwischen r und ϑ erhalten, so haben wir eine weitere Konstante einzuführen. Die Werte dieser willkürlichen Konstanten sind mittelst der Bedingungen zu bestimmen, welche sich daran knüpfen, dass die Curve durch die beiden Punkte A und B gehen muss.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 191. Walton, p. 339.

7. Welche Curve muss ein schwerer Punkt durchfallen, damit er gleiche vertikale Wege in gleichen Zeiten beschreibt? Die Bahntangente im Anfangspunkte der Bewegung sei vertikal.



Figur 86.

Es sei (Fig. 86) O der Anfangspunkt der Bewegung, die die Bahn in O berührende Gerade OX Axe der x, die zu ihr rechtwinkelige Gerade OY Axe der y, $OM=x$, $MP=y$, c die konstante Geschwindigkeit des Punktes parallel zu OX. Damit ist

$$v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=C+2gx.$$

Aber es ist $\frac{dx}{dt}=c$, folglich

$$c^2+c^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=C+2gx.$$

Mit $x=0$ ist $\frac{dy}{dx}=0$, daher $C=c^2$, so dass

$$c^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2gx, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2gx}}{c},$$

$$y=\frac{2}{3c}\sqrt{2gx^3}.$$

Eine Konstante ist nicht hinzuzufügen, weil x und y gleichzeitig verschwinden.

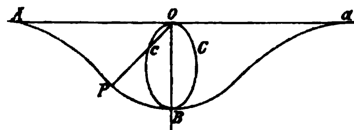
Diese Gleichung sagt, dass die semikubische Parabel der Bedingung

genügt, O ist ihre Spitze und OX ihre Axe, sie wird deshalb auch Isochrone genannt.

Dieses Problem wurde im Jahre 1687 von Leibnitz vorgeschlagen (Nouvelles de la République des Lettres, Septembre 1687), um die Schüler von Des Cartes herauszufordern, welche, aus übertriebener Anhänglichkeit an die Geometrie ihres Meisters, geneigt waren, die Methoden der Differentialrechnung zu verachten. Kein einziger Cartesianer teilte eine Lösung mit. Huyghens allein nahm die Herausforderung an, er gab eine Lösung in Les Nouvelles de la République des Lettres, Octobre 1687. Die Lösung von Leibnitz erschien zum ersten Male in Acta Erudit. Lips. 1689, p. 196 et sq. Beider Lösungen waren synthetisch. Eine analytische Lösung gab zuerst Jakob Bernoulli in Acta Erudit. Lips. 1690, p. 217.

Walton, p. 327.

8. Ein Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit aus einem Orte A entlang einer horizontalen Linie AO nach O hin geworfen. Auf welcher Curve muss der Punkt unter Zwang sich bewegen, damit er sich dem Orte O gleichförmig nähern kann, wenn ausser der Wurfgeschwindigkeit nur die Fallbeschleunigung wirkt und AO eine Tangente der verlangten Bahn ist?



Figur 87.

Es sei (Fig. 87) $OA=a$, $OP=r$, $\sphericalangle AOP=\vartheta$, wobei P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, $v_0 =$ der Wurfgeschwindigkeit in A.

Für die Bewegung des Punktes in irgend einem Momente seines Sinkens ist hier

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2gr\sin\vartheta,$$

oder

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left\{1 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2\right\} = v_0^2 + 2gr\sin\vartheta.$$

Die Aufgabe bedingt, dass $\frac{dr}{dt} = C =$ einer konstanten Grösse ist, folglich muss sein

$$C^2\left\{1 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2\right\} = v_0^2 + 2gr\sin\vartheta.$$

Beim Beginn der Bewegung ist $\vartheta=0$, $r\frac{d\vartheta}{dr}=0$, mithin $C^2=v_0^2$, so dass

$$v_0^2 r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = 2gr\sin\vartheta, \qquad \frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{v_0}{\sqrt{2g}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}.$$

Die Integration der letzten Gleichung giebt, beachtend, dass mit $\vartheta = 0$, $r = a$ ist.

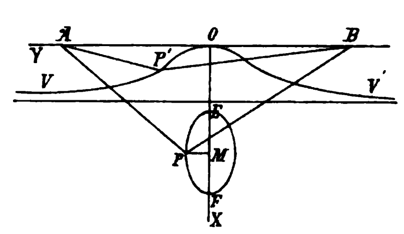
$$\sqrt{r} - \sqrt{a} = \frac{v_0}{2\sqrt{2g}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}.$$

womit eine Gleichung für die Konstruktion der Bahn gegeben ist. Der Punkt wird sich aus A entlang der Curve $ABCO$ nach dem Orte O mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen, dem Orte O sich nähernd, sodann wird er sich auf der Curve $OcBa$ mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit entfernen und, in a angekommen, ebenso entlang Oa fortschreiten.

Diese Curve ist von Leibnitz die paracentrische Isochrone genannt worden. Das Problem wurde den Mathematikern des Tages von ihm vorgeschlagen in Acta Erudit. Lips. 1689, p. 198. Erst nach mehreren Jahren erhielt Jakob Bernoulli eine Lösung dieser Aufgabe, welche erschien in Acta Erudit. Lips. 1694, p. 277. Kurz darauf wurden Lösungen von Leibnitz und Johann Bernoulli veröffentlicht (Acta Erudit. Lips. 1694, p. 371, 394). Dieses Problem wurde später verallgemeinert durch Varignon (Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1699, p. 9 et sq.).

Walton, p. 328.

9. A und B (Fig. 88) seien zwei feste Punkte in einer horizontalen Linie, EFP sei eine Curve in der vertikalen Ebene durch A und B. Die Curve EFP soll so bestimmt werden, dass die Summe der Zeiten, in welchen ein schwerer Punkt die geraden Linien AP, BP beschreibt, dieselbe sein kann, welcher Curvenpunkt P auch sein mag.



Figur 88.

Halbiere AB in O, lasse die vertikale Linie OX Axe der x, die horizontale Gerade OAY Axe der y sein. Ferner sei $AB=2a$, x die Abscisse, y die Ordinate des Punktes P.

Die Zeiten, in welchen der schwere Punkt die Geraden AP, BP durchfällt, sind

$$\sqrt{\frac{x^2+(a-y)^2}{\frac{1}{2}gx}}, \quad \sqrt{\frac{x^2+(a+y)^2}{\frac{1}{2}gx}},$$

folglich ist, wenn k die Summe dieser Zeiten bezeichnet,

$$\sqrt{\frac{1}{2}k^2gx}=\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(a+y)^2}. \tag{1}$$

Hieraus ergiebt sich mit $\frac{1}{2}k^2g=4c$ leicht

$$y^2=cx\frac{x^2-cx+a^2}{a^2-cx} \tag{2}$$

als Gleichung der verlangten Curve. Diese Curve besteht aus einem Zweige VOV', welcher eine zur Axe der y parallele Asymptote hat, und aus einem Ovale EFP. Das Oval ist derjenige Curventeil, welcher der gestellten Bedingung genügt. Der unendliche Zweig würde der Anforde-

rung entsprechen, dass die Zeiten herunter die Geraden AP', BP' eine konstante Differenz haben sollen, in welchem Falle wir anstatt (1) gehabt haben würden

$$\sqrt{\frac{1}{2}k^2 g} = \sqrt{x^2 + (a+y)^2} - \sqrt{x^2 - (a-y)^2},$$

woraus durch Entwickelung dieselbe Gleichung (2) erscheint. Die Curve hat ziemlich viel von der Form einer Conchoide, jedoch ist ihre Gleichung von derjenigen der Conchoide wesentlich verschieden.

Fuss, Mémoires de l'Acad. de St. Pétersbourg, 1819. Walton, p. 325.

10. Ein Punkt ist gezwungen, sich innerhalb einer engen Röhre von solcher Gestalt zu bewegen, dass seine Beschleunigung konstant und deren Richtung stets parallel zu einer festen, gegebenen geraden Linie ist. Die Bahngleichung des Punktes soll bestimmt werden.

Es sei die Abscissenaxe parallel zu der gegebenen geraden Linie, p die zu ihr parallele konstante Acceleration des Punktes, c seine Geschwindigkeit in der Röhre, welche unveränderlich sein wird. Damit ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = c^2. \tag{1}$$

Die Aufgabe giebt die Bedingung $\frac{d^2x}{dt^2} = p$, folglich ist, wenn wir die Ordinatenaxe so wählen, dass $\frac{dx}{dt} = 0$, wenn $x = 0$ ist,

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2p\frac{dx}{dt}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2px. \tag{2}$$

Durch Elimination von dt zwischen (1) und (2) folgt

$$2px\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = c^2,$$

oder, $\frac{c^2}{4p} = a$ nehmend und reduzierend,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

womit durch Integration, die Lage der Abscissenaxe ist so angenommen, dass x und y gleichzeitig verschwinden,

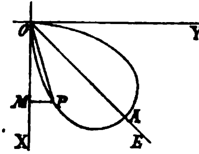
$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a\,arc\left(cos = \frac{a - x}{a}\right).$$

Dieses ist die Gleichung der gemeinen Cycloide, die Axe der Curve ist parallel zu der gegebenen Geraden.

Wir besitzen eine ausgezeichnete Untersuchung von Euler in Les Mémoires de l'Académie de St. Pétersb., Tom. X, p. 7 über die Beschaffenheit der Curve auf vorgeschriebener Bahn für einen schweren Punkt, wenn die Richtung gleichförmiger Ac-

celeration horizontal ist. Eine Notiz über dieses Problem kann eingesehen werden in dem Bulletin des Sciences de Bruxelles, Tom. IX.

Walton, p. 326.



Figur 89.

11. Wie ist die Curve OPA (Fig. 89) in einer vertikalen Ebene beschaffen, wenn ein schwerer Punkt einen beliebigen Bogen und die zugehörige Sehne in derselben Zeit durchfällt?

Die Coordinatenaxen seien die horizontale Gerade OY und die vertikale Gerade OX. Ferner sei P ein beliebiger Bahnpunkt, $PM \parallel OY$, $OP = r$, $\sphericalangle XOP = \vartheta$, Bogen $OP = s$, so dass $OM = r\cos\vartheta$ ist. Die Geschwindigkeit, welche der Punkt erlangt, wenn er den Bogen OP beschreibt, ist gleich derjenigen, welche er erhält, wenn er die Strecke OM frei durchfällt. Daher haben wir

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gr\cos\vartheta, \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{r\cos\vartheta}}.$$

Mithin ist die zum Durchfallen des Bogens OP nötige Zeit

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{r\cos\vartheta}}.$$

und die zum Beschreiben der zugehörigen Sehne erforderliche Zeit ist

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}\frac{r}{\cos\vartheta}}.$$

Der Bedingung der Aufgabe gemäss muss nun $t_1 = t_2$ sein, folglich

$$\sqrt{\frac{2}{g}\frac{r}{\cos\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{r\cos\vartheta}}, \quad \text{oder} \quad 2\sqrt{\frac{r}{\cos\vartheta}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{r\cos\vartheta}}.$$

Durch Differentiation der beiden Seiten dieser Gleichung und eine kleine Umformung des Resultates folgt

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos 2\vartheta}{\sin 2\vartheta}\, d\vartheta.$$

so dass, indem wir integrieren,

$$l(r^2) = l(a^2) + l(\sin 2\vartheta), \quad \text{oder} \quad r^2 = a^2 \sin 2\vartheta.$$

wo a eine Konstante bedeutet. Aus O ziehe die Halbierungslinie OE des Winkels XOY und setze $\sphericalangle POE = \varphi$, dann ist $\vartheta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ und

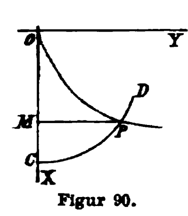
$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

welches die Gleichung der Lemniscate von Jakob Bernoulli mit dem Nabel in O und mit A als Scheitel der gleichseitigen Hyperbel ist. Dieses sehr schöne Problem haben wir Saladini zu verdanken.

Saladini, Memoire dell'Instituto Nazionale Italiano, Tom. I, parte 2.
Fuss, Mémoires de l'Acad. de St. Pétersb., 1819. Walton, p. 330.

12. Eine unendliche Zahl ähnlicher Curven in einer Ebene entspringt in einem gegebenen Punkte. Welches ist die zugehörige Synchrone?

Die synchronische Curve ist diejenige, welche die gegebene Curvenschar in einer solchen Weise schneidet, dass ein schwerer Punkt die von ihr aufgefangenen Bogen der Curvenschar in gleichen Zeiten beschreibt.



Figur 90.

Es sei (Fig. 90) O der gegebene Punkt, CPD die synchronische Curve, welche den Bogen OP der krummen Linie OP auffängt, die eine der ähnlichen Curven ist. Die Vertikale OX sei Abscissen-, die Horizontale OY Ordinatenaxe. Ferner sei $MP \perp OX$, $OM = x$, $MP = y$, Bogen $OP = s$, $t =$ der Zeit herab den Bogen OP, welche durch die Bedingung für jeden Punkt P der Curve CPD konstant sein muss. Damit ist

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \int_0^x \sqrt{\frac{1+p^2}{2gx}}\, dx, \quad \text{mit} \quad p = \frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Weil die in O entspringenden Curven ähnlich sind, so ist die Gleichung der Curve OP von der Form

$$F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad y = af\left(\frac{x}{a}\right), \tag{2}$$

wo F, f gewisse Funktionen der Klammergrösse bezeichnen, a der allgemeine Parameter der Klasse ähnlicher Curven für die besondere Curve OP ist. Folglich haben wir durch die Annahme

$$x = a\tau, \qquad y = af(\tau), \tag{3}$$

und vermöge (1)

$$t = \sqrt{a}\int_0^\tau \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2g\tau}}\, d\tau = \sqrt{a}\, \psi(\tau), \tag{4}$$

wo $p = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\tau} f(\tau)$ und $\psi(\tau)$ eine Funktion von τ ist.

Aus (3) und (4) ergiebt sich

$$x = \frac{t^2 \tau}{\{\psi(\tau)\}^2}, \qquad y = \frac{t^2 f(\tau)}{\{\psi(\tau)\}^2}. \tag{5}$$

Indem wir nun in jedem besonderen Falle τ aus diesen zwei Gleichungen eliminieren, erhalten wir eine Gleichung zwischen x und y, welche diejenige der synchronischen Curve ist.

Wenn die in (1) angegebene Integration ausgeführt werden kann, so ist es unnötig, zu dem Hilfssymbole τ Zuflucht zu nehmen. In diesem Falle haben wir nach geschehener Integration nur den Parameter a zu eliminieren, was mittelst (2) zu bewirken ist. Es geschieht indessen selten, dass wir die Integration ausführen können. Unter diesen Umständen werden es die Gleichungen (5) uns möglich machen, die synchronische Curve durch die Methode der Quadratur zu konstruieren, je ein paar Werte von x und y

zu ermitteln, und daher lässt sich ein Punkt der Curve dadurch annähernd für jeden numerischen Wert, welchen wir τ beilegen mögen, bestimmen.

Das Problem der synchronischen Curven wurde zuerst von Johann Bernoulli erörtert (Acta Erudit. Lips. Mai, 1697, p. 206.). Später untersuchten Saurin und Euler diesen Gegenstand. (Mechan., Tom. II, p. 47. Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., 1819 bis 1820, p. 20, 35.)

Walton, p. 334.

13. Eine Schar von Kreisen in der vertikalen Ebene XOY berührt die vertikale Gerade OX in dem Punkte O. Welches ist die synchronische Curve, wenn ein schwerer Punkt von O aus sich bewegt?

Die Gleichung eines Kreises vom Radius a ist

$$x^2 = 2ay - y^2, \quad \text{oder} \quad y = a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right).$$

Mit den Bezeichnungen unter 12 haben wir

$$f(\tau) = 1 - \sqrt{1 - \tau^2}, \qquad p = \frac{df(\tau)}{d\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

$$\psi(\tau) = \int_0^\tau \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2g\tau}}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \tau^3}},$$

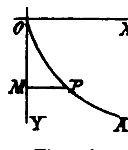
Mithin sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Synchrone

$$x = \frac{2gt^2\tau}{\left\{\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau^3}}\right\}^2}, \qquad y = \frac{2gt^2\left\{1 - \sqrt{1-\tau^2}\right\}}{\left\{\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau^3}}\right\}^2},$$

womit die verlangte Curve mittelst der mechanischen Quadratur bestimmt werden kann.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 52. Walton, p. 335.

14. Ein schwerer Punkt sinkt auf einer krummen Linie in einer vertikalen Ebene herab. Wie muss die Curve beschaffen sein, damit die Druckbeschleunigung an jeder Bahnstelle dieselbe sein kann?



Figur 91.

Es sei (Fig. 91) OA die verlangte Curve, die Horizontale OX Abscissen-, die Vertikale OY Ordinatenaxe, P ein beliebiger Bahnpunkt, $MP \perp OY$, $OM = y$, $MP = x$, Bogen $OP = s$, v_0 die Geschwindigkeit des Punktes in O, k die konstante Druckbeschleunigung, O die Anfangslage des Punktes.

Im vorliegenden Falle ist $X = 0$, $Y = g$, daher

$$k = g\frac{dx}{ds} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{1}$$

Weil aber $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2gy$, $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{dy}{ds}$, so ist auch

$$k = g\frac{dx}{ds} + (v_0{}^2 + 2gy)\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dy}{ds}},$$

$$\frac{k}{\sqrt{v_0{}^2 + 2gy}}\frac{dy}{ds} = \sqrt{v_0{}^2 + 2gy}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{g}{\sqrt{v_0{}^2 + 2gy}}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt mit C als willkürlicher Konstanten

$$\frac{k}{g}\sqrt{v_0{}^2 + 2gy} = \sqrt{v_0{}^2 + 2gy}\frac{dx}{ds} + C, \text{ oder } \frac{dx}{ds} = \frac{k}{g} - \frac{C}{\sqrt{v_0{}^2 + 2gy}}.$$

Bezeichnet α die Vertikalneigung der Curve im Punkte O, dann ist $\sin\alpha = \frac{k}{g} - \frac{C}{v_0}$, mithin ihre Differentialgleichung

$$\frac{dx}{ds} = \frac{k}{g} - \frac{v_0}{g}\frac{k - g\sin\alpha}{\sqrt{v_0{}^2 + 2gy}}. \tag{2}$$

Die Gleichung zwischen x und y kann durch eine zweite Integration erhalten werden, aber das Resultat ist infolge seiner Zusammengesetztheit von keinem grossen Werte.

Das Problem der Curve gleichen Widerstandes für einen schweren Punkt wurde von Johann Bernoulli zuerst vorgeschlagen (Acta Erudit. Suppl. Tom. II, sect. VI, p. 291) und von L'Hôpital gelöst (Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1700, p. 9). Verschiedene Aufgaben ähnlicher Art erörterte später Varignon (Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1710, p. 196).

Commerc. Epistolic. Leibnitii et Bernoullii, Epist. VII. Walton, p. 343.

Eine zweite Lösung mag noch folgen. Wir wählen die Lage des Coordinatenursprunges O ganz beliebig und setzen voraus, dass die Curve gegen die Abscissenaxe möglicher Weise konkav oder konvex gekrümmt sein kann. Die Gleichung, von welcher wir auszugehen haben, ist wie vorhin

$$k = g\frac{dx}{ds} + \frac{v^2}{\varrho}. \tag{1}$$

Nun ist $v^2 = v_0{}^2 + 2gy + C$, und wenn h die Ordinate der Anfangslage des schweren Punktes bezeichnet

$$v^2 = v_0{}^2 + 2g(y - h). \tag{2}$$

Mit diesem Werte von v und $\varrho = \frac{dy}{ds}:\frac{d^2x}{ds^2}$ geht die (1) über in

$$k = g\frac{dx}{ds} + \frac{v_0{}^2 + 2g(y - h)}{\frac{dy}{ds}}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{dy}{ds}\frac{1}{2\sqrt{y}}$, so kommt

$$\frac{k}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{ds} = \frac{g}{2\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{v_0^2 + 2g(y-h)}{2\sqrt{y}}\frac{d^2x}{ds^2},$$

welche Gleichung zu integrieren wäre.

Verlegen wir den Coordinatenursprung in den Anfangspunkt der Bewegung, nehmen die Geschwindigkeit daselbst gleich Null und setzen $k = k_1 g$, so wird einfacher

$$\frac{k_1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \sqrt{y}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{dx}{ds} = k_1 + \frac{C}{\sqrt{y}}, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{ds} = k_1 \pm \sqrt{\frac{a}{y}}, \text{ mit } C = \pm\sqrt{a}. \tag{3}$$

Damit ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \mp\sqrt{\frac{2y^3}{a}}.$$

Bezeichnet ϑ die Horizontalneigung der Bahn an einer beliebigen Stelle, dann folgt

$$cos\,\vartheta = k_1 + \frac{C}{\sqrt{y}} \quad \text{oder} \quad C = (cos\,\vartheta - k_1)\sqrt{y},$$

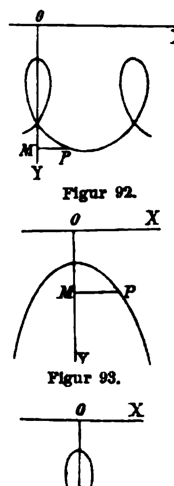
$$cos\,\vartheta = k_1 \pm\sqrt{\frac{a}{y}}. \tag{4}$$

Mittelst dieser Gleichung kann die Curve konstruiert werden. Eine Relation zwischen x und y ergiebt sich durch Integration der Gleichung (3).

Betrachten wir einige Spezialfälle. Mit $C = 0$, oder $a = 0$ ist $cos\,\vartheta = \frac{dx}{ds} = k_1$, welches die Gleichung einer geraden Linie ist. Wenn $k_1 > 1$, dann gilt das obere Zeichen in (4) nicht, es kann nicht gebraucht werden, und haben wir

$$cos\,\vartheta = k_1 - \sqrt{\frac{a}{y}}, \qquad \varrho = \sqrt{\frac{2y^3}{a}}.$$

Hier erreicht y seinen Maximalwert $\frac{a}{(k_1-1)^2}$, wenn $cos\,\vartheta = 1$ ist; der kleinste Wert von y ist $\frac{a}{(k_1+1)^2}$, er macht $cos\,\vartheta = 1$. Wächst y von dem letzteren bis zu dem ersteren Werte, dann nimmt $cos\,\vartheta$ seine sämtlichen Werte successive an. Diese Kurve ist demnach immer konkav gegen die Axe der x, wenn $cos\,\vartheta$ positiv ist, und konvex, wenn $cos\,\vartheta$ negativ ist, wegen $\varrho\,cos\,\vartheta$, welches die Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Ordinatenaxe $= \sqrt{\frac{2y^3}{a}}\,cos\,\vartheta$ ist, und hat dieser Ausdruck dasselbe Zeichen wie $cos\,\vartheta$. Die Gestalt dieser Curve deutet die Figur 92 (S. 247) an.



Figur 92.
Figur 93.
Figur 94.

Wenn k_1 positiv und kleiner als die Einheit ist, dann sind beide Zeichen in (4) zulässig. Das obere Zeichen hat nur Giltigkeit für jene Werte von y, welche $\cos\vartheta$ nicht grösser als die Einheit machen, also zwischen $\frac{a}{1-k_1}$ und ∞ liegen. Für diesen Curvenzweig ist $\varrho\cos\vartheta = -\sqrt{\frac{2y^3}{a}}$, es liegt folglich seine Konvexseite nach der Axe der x hin, ihn versinnlicht die Figur 93. Das untere Zeichen kann nur zwischen jenen Werten von von y angewendet werden, welche machen, dass der Wert von $\cos\vartheta$ zwischen k_1 und -1 fällt, sie sind $y=\infty$ und $y=\frac{a}{(1+k_1)^2}$. So lange als $\cos\vartheta$ positiv, ist die Curve (Fig. 94) konkav nach der Abscissenaxe hin und für die übrigen Werte ist sie konvex.

Earnshaw, Dynamics, p. 127.

15. Ein schwerer Punkt sinkt von O ausgehend ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer in einer Vertikalebene liegenden Curve OA (Fig. 91, S. 244). Die Widerstandsbeschleunigung an jeder Bahnstelle ist direkt proportional dem Abstande des Punktes von der horizontalen Geraden OX. Welches ist die Gleichung dieser Curve?

Wir nehmen die Linie OX als Abscissen-, die vertikale Gerade OY als Ordinatenaxe, k gleich der Druckbeschleunigung, wenn y gleich der Einheit ist, dann ist

$$ky^2 = g\frac{dx}{ds} + \frac{2gy}{\varrho},$$

oder, weil $\varrho = -\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$,

$$ky^2 = \frac{g}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} - \frac{2gy\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$ky^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{dx} = \frac{gy^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} - \frac{2gy^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, da x und y gleichzeitig verschwinden,

$$\frac{2}{5} k y^{\frac{5}{2}} = \frac{2 g \sqrt{y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

und wird mit $\frac{5g}{k} = a^2$

$$y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a^2, \quad \text{oder} \quad \sqrt{a^4 - y^4}\, dx = y^2\, dy,$$

welches die Gleichung der elastischen Linie von Jakob Bernoulli ist. (Acta Erudit. Lips. 1694, p. 272; 1695, p. 538). Varignon (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1710, p. 151). Walton, p. 344.

16. Auf einen Punkt wirkt eine zu der festen Geraden OY (Fig. 91. S. 244) parallele Beschleunigung und bewegt er sich auf der mit OY in einer Ebene liegenden, gegebenen Curve OPA. Wie muss die Acceleration beschaffen sein, wenn die Druckbeschleunigung während der ganzen Bewegung von konstanter Grösse sein soll?

Es sei k die konstante Druckbeschleunigung, O die Anfangslage des Punktes, v_0 seine Geschwindigkeit daselbst, die Horizontale OX Abscissen-, die Vertikale OY Ordinatenaxe, Y die zur Axe der y parallele Beschleunigung an einer beliebigen Stelle der Bahn. Die Druckbeschleunigung ist hier

$$k = Y \frac{dx}{ds} + \frac{1}{\varrho}\left\{v_0^2 + 2\int_0^y Y\, dy\right\},$$

so dass mit $\varrho = \frac{dy}{ds} : \frac{d^2 x}{ds^2}$

$$k \frac{dy}{ds} = v_0^2 \frac{d^2 x}{ds^2} + Y \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} + 2 \frac{d^2 x}{ds^2} \int_0^y Y\, dy.$$

Die Multiplikation mit $2 \frac{dx}{dy} ds$ und die Integration giebt

$$k \int \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} ds = \frac{1}{2} v_0^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \int_0^y Y\, dy.$$

$$\int_0^y Y\, dy = -\frac{1}{2} v_0^2 + \frac{k}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \int \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} ds,$$

oder, $\frac{dx}{dy} = p$ setzend,

$$\int_0^y Y\, dy = -\frac{1}{2} v_0^2 + k\left(\frac{1}{p^2} + 1\right)\left\{\int \frac{p\, dy}{\sqrt{1 + p^2}} + C\right\}. \tag{1}$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach y giebt die verlangte Beschleunigung

$$Y = \frac{k}{p}\sqrt{1 + p^2} - \frac{2k}{p^3} \frac{dp}{dy}\left\{\int \frac{p\, dy}{\sqrt{1 + p^2}} + C\right\}. \tag{2}$$

Mit $y = 0$ folgt aus (1)

$$2k\left(\frac{1}{p^2}+1\right)\left\{\int\frac{p\,dy}{\sqrt{1+p^2}}+C\right\}=v_0{}^2,$$

welche Bedingung den Wert der willkürlichen Konstanten bestimmen wird.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 101. Walton, p. 345.

17. Ein Punkt bewegt sich auf dem Bogen OA einer Parabel mit der Axe OX (Fig. 91, S. 244) infolge einer Beschleunigung, deren Richtung parallel zu der auf OX senkrechten Geraden OY ist. Die Beschleunigung soll so bestimmt werden, dass die Druckbeschleunigung während der ganzen Bewegung des Punktes konstant ist.

Es seien die aufeinander senkrechten, in der Bahnebene gelegenen Geraden OX, OY die Coordinatenaxen, k bezeichne die konstante Druckbeschleunigung, die Gleichung der Parabel sei $y^2 = ax$.

Indem wir hier die Formel (2) der Lösung des vorhergehenden Problemes anwenden und beachten, dass $p = \frac{2y}{a}$ ist, erhalten wir für die verlangte Beschleunigung

$$\begin{aligned}Y &= \frac{ka}{2y}\sqrt{1+4\left(\frac{y}{a}\right)^2}-\frac{ka^2}{2y^3}\left\{\int\frac{2y\,dy}{\sqrt{a^2+4y^2}}+C\right\},\\ &= \frac{k}{2y}\sqrt{a^2+4y^2}-\frac{ka^2}{2y^3}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4y^2}+C\right\},\\ &= -\frac{ka^2}{2y^3}C-\frac{k}{4y^3}(a^2-2y^2)\sqrt{a^2+4y^2}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Ferner ist, vermöge Formel (1) unter 16

$$\int_0^y Y\,dy = -\frac{1}{2}v_0{}^2+k\left(\frac{a^2}{4y^2}+1\right)\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4y^2}+C\right\},$$

$$4y^2\int_0^y Y\,dy = -2v_0{}^2y^2+k(a^2+4y^2)\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4y^2}+C\right\},$$

folglich erhalten wir, $y = 0$ setzend,

$$C = -\frac{1}{2}a,$$

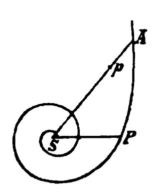
und daher durch (1)

$$Y = \frac{ka^3}{4y^3}-\frac{k}{4y^3}(a^2-2y^2)\sqrt{a^2+4y^2}.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 103. Walton, p. 347.

18. Auf einer Geraden sinkt ein schwerer Punkt. Wie muss die Neigung der Bahn beschaffen sein, damit die Horizontalprojektion des in einer gegebenen Zeit von dem Punkte zurückgelegten Weges ein Maximum wird?

Der verlangte Neigungswinkel ist gleich 45°.



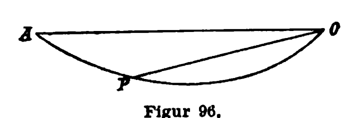
Figur 95.

19. Ein Punkt, dessen Anfangslage A (Fig. 95) ist, bewegt sich in einer unendlich dünnen Röhre APS in einer Ebene nach dem Centrum S einer, einer beliebigen Funktion des Centralabstandes direkt proportionalen Beschleunigung. Die Gestalt der Röhre soll so bestimmt werden, dass die Zeit durch einen beliebigen Bogen AP n-mal so gross als durch einen Teil Ap des Primradiusvektor SA, wobei $Sp = SP$ ist.

Es sei $SP = r$, $SA = a$, $\measuredangle ASP = \vartheta$, dann wird die Gleichung der Curve sein

$$r = a e^{-\frac{\vartheta}{\sqrt{n^2-1}}}.$$

20. Ein Punkt wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit aus einem Orte A entlang einer gegebenen Curve APO (Fig. 96) geworfen, welche er gezwungen ist zu beschreiben. Auf den Punkt wirkt eine stets nach O gerichtete und seinem Abstande von O direkt proportionale Beschleunigung. Die Gestalt der Bahn soll so bestimmt werden, dass die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektor OP konstant sein kann.



Figur 96.

Es sei $OA = a$, $OP = r$, $\measuredangle AOP = \vartheta$, $\mu^2 =$ der absoluten Beschleunigung, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit von OP, v_0 die Wurfgeschwindigkeit, dann ist die Gleichung der verlangten Bahn

$$\sqrt{\frac{\mu^2+\omega^2}{\omega^2}}\,\vartheta = arc\left(cos = \sqrt{\frac{\mu^2+\omega^2}{\mu^2a^2+v_0^2}}\,r\right) - arc\left(cos = \sqrt{\frac{\mu^2+\omega^2}{\mu^2a^2+v_0^2}}\,a\right).$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 138.

21. Auf einen Punkt wirkt eine nach einem festen Centrum gerichtete, dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionale Beschleunigung. Welches ist die Tautochrone?

Wenn τ die Bewegungszeit bedeutet und die Bezeichnungen unter (8) beibehalten werden, dann ist die Differentialgleichung der Tautochrone

$$p^2 = r^2 - \frac{\pi^2}{2\mu a\tau^2}(r-a)r^5.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p 209.

22. Die Tautochrone zu finden, wenn die Centralbeschleunigung φ konstant ist.

$$p^2 = \left(1 + \frac{\pi^2 a}{2\varphi\tau^2}\right)r^2 - \frac{\pi^2}{2\varphi\tau^2}r^3.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 210.

23. Eine unendliche Zahl gerader Linien in einer Ebene entspringt in einem Punkte. Welches ist die synchronische Curve für einen schweren Punkt?

Der gegebene Punkt werde als Coordinatenursprung, die Axe der x horizontal, diejenige der y vertikal und positiv abwärts genommen, dann ist die Gleichung der verlangten Curve, welche in diesem Falle ein Kreis ist, mit t als gemeinsamer Fallzeit

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}g t^2 y.$$

Euler, Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., 1819, p. 22.

24. In einer vertikalen Ebene liegen unendlich viele Cycloiden, ihre Basen beginnen alle in dem Coordinatenursprunge und fallen mit der horizontalen Abscissenaxe zusammen. Welches ist die synchronische Curve eines schweren Punktes, wenn die Bewegung vom Coordinatenursprunge aus beginnt.

Bezeichnet t die konstante Fallzeit, dann ist, wenn die Ordinatenaxe vertikal abwärts genommen wird, die synchronische Curve gegeben durch die Relationen

$$x = a\, arc\left(vers = \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}, \qquad y = a\, vers\left(k\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

aus ihnen folgt durch Elimination von a eine Gleichung zwischen x und y. Die Curve schneidet alle Cycloiden rechtwinkelig.

Johann Bernoulli, Acta Erudit. Lips. 1697, Mai, p. 206.

25. Ein Punkt wird nach einem festen Centrum proportional der Distanz beschleunigt und bewegt sich auf einer Curve von einer gegebenen Stelle zu einer anderen. Die Beschaffenheit der Curve zu finden, wenn sie seine Brachistochrone ist.

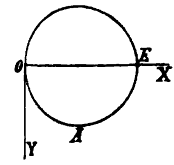
Es sei (Fig. 85, S. 237) A der Anfangspunkt der Bewegung, B der Ort, in welchem der Punkt in der kürzesten Zeit ankommt, P ein beliebiger Bahnpunkt, $SP = r$, $p =$ dem Perpendikel vom Beschleunigungscentrum auf die Bahntangente in p, $SA = a$, dann ist mit A als einer Konstanten die verlangte Gleichung zwischen p und r

$$p^2 = A(r^2 - a^2)$$

und sonach die Curve eine Hypocycloide.

Leiten wir aus dieser Gleichung durch Integration eine Relation zwischen r und einer Winkelcoordinate ϑ ab, so haben wir noch eine weitere Konstante zu A hinzuzufügen. Beide Konstanten sind mittelst der Bedingungen zu bestimmen, welche sich daran knüpfen, dass die Curve durch die gegebenen Punkte A und B gehen muss.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 191.
18—25. Walton, p. 340—343.



Figur 97.

26. Ein schwerer Punkt sinkt ohne Anfangsgeschwindigkeit aus einem Orte A (Fig. 97) auf einer in vertikaler Ebene gelegenen Curve OA herab. Die Druckbeschleunigung ist direkt proportional dem Abstande des Punktes von der horizontalen Geraden OX. Welches ist die Gleichung der Linie OA?

Nimm die Geraden OX, $OY \perp OX$ als Coordinatenaxen, $k =$ der Druckbeschleunigung, wenn $y =$ der Einheit ist, dann ist mit $\frac{g}{k} = a$ die Gleichung der Curve

$$y^2 = 6ax - x^2,$$

welche sonach ein Kreis vom Diameter $OE = 6a$ ist.

Varignon, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1710, p. 151.

27. Welches ist unter denselben Verhältnissen wie vorhin die Curve, wenn die Druckbeschleunigung direkt proportional der Quadratwurzel der Distanz ist?

$$x = 2a\, arc\left(cos = \frac{2a - y}{2a}\right) - \sqrt{4ay - y^2}.$$

Die Curve ist eine gemeine Cycloide mit einem Erzeugungskreise vom Durchmesser $4a$.

Varignon, ibid. p. 152.

28. **Ein schwerer Punkt sinkt ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer in einer Vertikalebene gelegenen Curve. Welches ist die Gleichung der Curve, wenn der durch die Centrifugalbeschleunigung erzeugte Widerstand an jeder Bahnstelle direkt proportional einer beliebigen positiven Potenz der Entfernung des Punktes von der durch die Anfangslage laufenden horizontalen Linie ist, die Bahntangente in dem Anfangspunkte der Bewegung mit dieser horizontalen Linie zusammenfällt?**

Es bezeichne k den durch die Centrifugalbeschleunigung hervorgerufenen Widerstand, wenn $y =$ der Einheit ist, die Axe der y vertikal vorausgesetzt (Fig. 91, S. 244), dann ist mit $\frac{g}{k} = a$ die Differentialgleichung der Bahn

$$\sqrt{4n^2a^2 - y^{2n}}\,dx = y^n\,dy.$$

Varignon, Ib. p. 156.

29. Die Curve zu finden, wenn der durch die Fallbeschleunigung erzeugte Teil der Reaktionsbeschleunigung der n^{ten} Potenz der Fallhöhe des Punktes direkt proportional ist, n positiv und die Bahntangente im Anfangspunkte der Bewegung horizontal vorausgesetzt wird.

Mit denselben Bezeichnungen wie vorhin, ausgenommen, dass k jetzt die durch g allein hervorgerufene Druckbeschleunigung, wenn $y = 1$, bedeutet, ist die Differentialgleichung der Curve

$$\sqrt{a^2 - y^{2n}}\,dx = y^n\,dy.$$

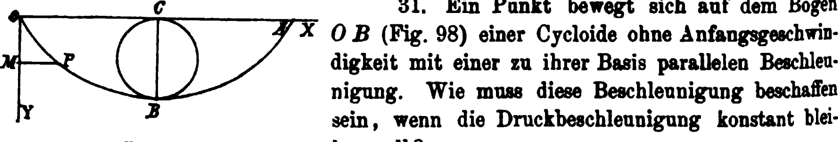
Varignon, Ib. p. 160.

30. **Ein schwerer Punkt sinkt aus der Ruhe auf einer in einer vertikalen Ebene liegenden Curve herab. Welches ist die Gleichung der Bahn, wenn die durch die Centrifugalbeschleunigung und die Fallbeschleunigung erzeugten Teile der Druckbeschleunigung in einem konstanten Verhältnisse stehen, die Bahntangente für die Anfangslage des Punktes horizontal ist?**

O sei der Anfangspunkt der Bewegung (Fig. 91, S. 244), die Abscissenaxe OX horizontal, die Ordinatenaxe OY vertikal, $\frac{m}{n}$ das konstante Verhältnis, dann ist die Differentialgleichung der Bahn

$$\left(a^{\frac{m}{n}} - y^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = y^{\frac{m}{2n}}\,dy.$$

Varignon, Ib. p. 161.



Figur 98.

31. **Ein Punkt bewegt sich auf dem Bogen OB (Fig. 98) einer Cycloide ohne Anfangsgeschwindigkeit mit einer zu ihrer Basis parallelen Beschleunigung. Wie muss diese Beschleunigung beschaffen sein, wenn die Druckbeschleunigung konstant bleiben soll?**

Bezeichnet k die konstante Druckbeschleunigung, a den Radius des Erzeugungskreises, Y die verlangte Beschleunigung, ist $MP \perp OY$, $OM = y$, $MP = x$, dann ergiebt sich

$$Y = \frac{k}{3}\sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 104.

32. Ein Punkt wird von einer Stelle aus, welche den Weg zwischen zwei Beschleunigungscentren halbiert, entlang einer Curve geworfen. Die Intensitäten der beiden Beschleunigungen sind gleich, jede ist verkehrt proportional dem Abstande des Punktes von ihrem Centrum. Welche Gestalt muss die Curve besitzen, damit der Punkt sich gleichförmig bewegen kann?

Ist a die Anfangsdistanz des Punktes von einem jeden Centrum, sind r_1, r_2 die Entfernungen eines beliebigen Bahnpunktes von den zwei Centren, dann ist

$$r_1 \cdot r_2 = a^2.$$

26—32. Walton, p. 347–349.

Dritter Abschnitt.

Hodographe.

1. Ein schwerer Punkt fällt aus der Ruhe in einer unendlich dünnen, cycloidischen Röhre. Die Axe der Cycloide ist vertikal und ihr Scheitel der höchste Punkt. Welches ist die Gleichung des Hodographen?

Es sei die Axe der Cycloide Axe der y, ihre Scheiteltangente Axe der x, h der Vertikalabstand der Anfangslage des Punktes vom Scheitel, v seine Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle, ψ die Vertikalneigung der Curve daselbst, a der Radius des die Curve erzeugenden Kreises, ϑ der excentrische Winkel.

Damit ist die Geschwindigkeit des Punktes gegeben durch

$$v^2 = 2g(y - h),$$

und die Gleichungen der Bahn sind

$$x = a(\vartheta + \sin\vartheta), \qquad y = a(1 - \cos\vartheta).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$tg\,\psi = \frac{dx}{dy} = \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad \sin\vartheta \sin\psi = \cos\psi + \cos\vartheta\cos\psi,$$

$\cos(\vartheta + \psi) = \cos(\pi - \psi)$, d. i. $\vartheta = \pi - 2\psi$. Mithin ist

$v^2 = 2ag(1 - \cos\vartheta) - 2gh$, oder $v^2 = 2ag(1 + \cos 2\psi) - 2gh$,
womit die Gleichung des Hodographen gefunden ist.

Bewegt sich der schwere Punkt vom Scheitel der Cycloide aus, dann ist $h = 0$, mithin $v = 2\sqrt{ag}\cos\psi$, so dass in diesem Falle der Hodograph ein Kreis ist.

2. Ein Punkt bewegt sich auf einer Curve in einer vertikalen Ebene. Die Curve ist so beschaffen, dass die Druckbeschleunigung konstant ist. Welches ist die Gestalt des Hodographen?

Der Hodograph ist ein Kegelschnitt mit horizontaler Direktrix.

3. Eine gerade Linie bewegt sich mit ihren Endpunkten auf zwei in einer Ebene zu einander senkrechten Geraden, sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit drehend. Welches sind die Hodographe der Bahnen ihrer Punkte?

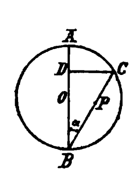
Die verlangten Hodographe sind von einer Hypocycloide eingehüllte Ellipsen.

Walton, p. 374—375.

Zweite Abteilung.

Bewegung im widerstehenden Mittel.

1. Ein schwerer Punkt sinkt auf einer nach dem tiefsten Punkte B eines vertikalen Kreises, dessen vertikaler Durchmesser $AB = 2a$ ist, führenden Sehne CB in einem Medium von gleicher Dichtigkeit, welches eine der Geschwindigkeit direkt proportionale Widerstandsbeschleunigung hervorbringt. Die Bewegung des Punktes soll untersucht werden.



Figur 99.

Es sei (Fig. 99) P die Lage des Punktes zu der Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung in C an, $CP = s$, $\sphericalangle ABC = \alpha$, g' die relative Fallbeschleunigung, k die Beschleunigung des Mittels für die Geschwindigkeitseinheit.

Die Bewegungsgleichung ist im vorliegenden Falle

$$\frac{dv}{dt} = g' \cos\alpha - k\frac{ds}{dt}, \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{g'\cos\alpha - kv} = dt, \tag{1}$$

so dass

$$\int_0^v \frac{dv}{g'\cos\alpha - kv} = \int_0^t dt, \qquad \frac{1}{k}\, l\, \frac{g'\cos\alpha - kv}{g'\cos\alpha} = -t,$$

$$\frac{g'\cos\alpha - kv}{g'\cos\alpha} = e^{-kt},$$

womit

$$v = \frac{g'\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \tag{2}$$

also die Geschwindigkeit als eine Funktion der Zeit bestimmt ist.

Ferner ist, weil $ds = v\,dt$,

$$s = \frac{g'\cos\alpha}{k}\int_0^t \left(1 - e^{-kt}\right) dt, \text{ d. i. } s = \frac{g'\cos\alpha}{k^2}\left(kt + e^{-kt} - 1\right). \tag{3}$$

Mit $CD \perp AB$ ist $BD . AB = \overline{BC}^2$, oder $s\cos\alpha . 2a = s^2$, $s = 2a\cos\alpha$, demnach auch

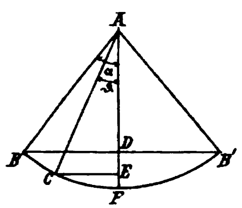
$$2a\cos\alpha = \frac{g'\cos\alpha}{k^2}\left(kt + e^{-kt} - 1\right), \text{ oder } 2ak^2 = g'\left(k.t + e^{-kt} - 1\right). \tag{4}$$

Die Gleichung (3) giebt die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit. Lösen wir die Relation (4) für t auf, dann folgt die Fallzeit für die ganze Sehne CB. In dieser Formel kommt die Vertikalneigung α der Sehne nicht vor, es ist mithin die ganze Fallzeit für alle von B ausgehende

Sehnen konstant, sie ist gleich derjenigen, in welcher der Punkt den vertikalen Diameter AB frei beschreibt.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 244. Walton, p. 365.

2. Ein schwerer Punkt schwingt in einem homogenen Medium auf einem vertikalen Kreisbogen BB' (Fig. 100) mit dem tiefsten Punkte F. Die Verzögerung durch das Mittel ist direkt proportional der Geschwindigkeit. Die Bewegung soll untersucht werden.



Figur 100.

Bei der Bewegung des Pendels in der Luft ist die Beschleunigung durch den Luftwiderstand für sehr langsame Schwingungen sehr nahe der ersten, für rasche Oszillationen nahe der zweiten Potenz der Geschwindigkeit direkt proportional.

Es bezeichne $BB' = 2 . BF$ den ganzen Schwingungsbogen, $a = AB = AF$ seinen Radius, α den Winkel FAB, ϑ den Winkel FAC, um welchen der Fahrstrahl des Punktes nach der Zeit t von der Vertikalen abweicht, g die Fallbeschleunigung, k die Retardation des Mittels für die Geschwindigkeitseinheit.

Die Beschleunigung des Punktes in der Richtung der Bahntangente in C ist $g \sin\vartheta$, welcher die Beschleunigung durch das Mittel $kv = k\frac{ds}{dt}$ entgegenwirkt, so dass wir für die Bewegung des Punktes die Gleichung haben

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin\vartheta - k\frac{ds}{dt}. \tag{1}$$

Nun ist aber $s = a(\alpha - \vartheta)$, also $ds = -a\,d\vartheta$, $d^2 s = -a\,d\vartheta^2$, $\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{2.3} + \frac{\vartheta^5}{2.3.4.5} - \cdots$, womit, wenn wir die Glieder von ϑ^3 an in der letzten Relation vernachlässigen, einen sehr kleinen Schwingungswinkel voraussetzend, die Gleichung zwischen t und ϑ entsteht

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + k\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{a}\vartheta = 0. \tag{2}$$

Behufs der Integration dieser Gleichung setzen wir, mit c und β konstante Grössen bezeichnend,

$$\vartheta = c\,e^{\beta t}, \tag{3}$$

dann ist
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \beta c\,e^{\beta t}, \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \beta^2 c\,e^{\beta t},$$

und daher
$$\beta^2 + \beta k + \frac{g}{a} = 0. \tag{4}$$

Die Auflösung dieser bezüglich β quadratischen Gleichung giebt

$$\beta = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}}. \tag{5}$$

Da die Grösse k sehr klein ist, so fällt der Wert der Wurzelgrösse imaginär aus. Indem wir zur Abkürzung

$$\frac{k}{2} = m, \quad \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{g}{a}} = n\sqrt{-1} = i\,n \tag{6}$$

setzen, geht die (5) über in

$$\beta = -m \pm i\,n.$$

Die Einführung eines jeden dieser Werte von β in die (3) giebt zwei verschiedene Werte ϑ' und ϑ'' für ϑ, sie sind

$$\vartheta' = c' e^{(-m+in)t}, \qquad \vartheta'' = c'' e^{(-m-in)t}.$$

Jeder dieser Werte ϑ', ϑ'' ist ein Integral der Gleichung (2), denn die Differentiation derselben führt wieder auf (2). Aber auch die Summe $(\vartheta' + \vartheta'')$ leistet dieser Gleichung Genüge, so dass wir der Allgemeinheit wegen setzen können

$$\vartheta = e^{-mt}\{c' e^{int} + c'' e^{-int}\}. \tag{7}$$

Dieser Wert von ϑ ist das allgemeine Integral, die Werte von ϑ' und ϑ'' sind die partikuliären Integrale von (2). Nun ist

$$e^{int} = \cos n\,t + i \sin n\,t, \qquad e^{-int} = \cos n\,t - i \sin n\,t,$$

mithin auch

$$\vartheta = e^{-mt}\{(c' + c'')\cos n\,t + i(c' - c'')\sin n\,t\},$$

oder, wenn wir $c' + c'' = C_1$, $i(c' - c'') = C_2$ setzen,

$$\vartheta = e^{-mt}\{C_1 \cos n\,t + C_2 \sin n\,t\}. \tag{8}$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -m\,e^{-mt}\{C_1 \cos n\,t + C_2 \sin n\,t\} + n\,e^{-mt}\{-C_1 \sin nt + C_2 \cos nt\}. \tag{9}$$

Beim Beginn der Bewegung ist $t = 0$, $\vartheta = \alpha$, die Geschwindigkeit $a\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, womit die Gleichungen (8) und (9) die Relationen

$$\alpha = C_1, \qquad -m\,C_1 + n\,C_2 = 0$$

für die Bestimmung der Konstanten geben, welche demnach sind $C_1 = \alpha$, $C_2 = \frac{m}{n}\alpha$. Die Einführung dieser Werte in (8) und (9) giebt

$$\vartheta = \alpha e^{-mt}\{\cos n\,t + \frac{m}{n}\sin n\,t\}, \tag{10}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\alpha}{n} e^{-mt}\{m^2 + n^2\}\sin n\,t, \tag{11}$$

oder, weil vermöge (6) $m^2 + n^2 = \frac{g}{a}$ ist,

$$a\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\alpha g}{n} e^{-mt} \sin nt. \tag{12}$$

Die Gleichung (10) stellt den Wert von ϑ, die Relation (12) die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit dar.

Um nun die Zeit einer einfachen Schwingung zu bestimmen, beachten wir, dass am Ende einer jeden Schwingung, also wenn der Punkt in B oder B' ist, die Geschwindigkeit $a\frac{d\vartheta}{dt}$ den Wert Null annimmt. Für diese Momente ist mithin durch (12)

$$0 = -\frac{\alpha g}{n} e^{-mt} \sin nt,$$

welche Gleichung erfüllt wird mit $\sin nt = 0$, d, h. wenn nt ein Vielfaches von π ist. Demnach muss für die Bewegung des Punktes von B bis B', oder für eine einfache Schwingung sein

$$nt = \pi, \quad \text{oder} \quad t = \frac{\pi}{n}. \tag{13}$$

Für eine doppelte Schwingung, d. h. wenn der Punkt wieder in seine Anfangslage zurückkehrt, ist $nt = 2\pi$, oder $t = \frac{2\pi}{n}$, und so fort. Daraus geht hervor, dass die Zeit für jede einfache Schwingung konstant ist. Bezeichnen wir mit T die Zeit einer einfachen Schwingung, so folgt aus (13) und (6)

$$T = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{ak^2}{4g}}} \sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{4g - ak^2}}. \tag{14}$$

Bewegt sich der Punkt im leeren Raume, dann ist $k = 0$, und wird $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Die Schwingungszeit im widerstehenden Mittel ist grösser als im leeren Raume, beide Zeiten stehen in dem Verhältnisse $\sqrt{1 - \frac{ak^2}{4g}} : 1$.

Wir wollen jetzt die während der einzelnen aufeinander folgenden Schwingungen durchlaufenen Schwingungsbogen mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta_\nu$ bezeichnen und ihre Grössen ermitteln.

Mit (10) ist die Ablenkung des Fahrstrahles von der vertikalen Richtung

wenn $t = 0, \quad \vartheta = +\alpha,$

„ $t = \frac{\pi}{n}, \ \vartheta = -\alpha e^{-\frac{m}{n}\pi},$ wenn $t = \frac{3\pi}{n}, \ \vartheta = -\alpha e^{-3\frac{m}{n}\pi},$

„ $t = \frac{2\pi}{n}, \ \vartheta = +\alpha e^{-2\frac{m}{n}\pi},$ „ $t = \frac{\nu\pi}{n}, \ \vartheta = \pm\alpha e^{-\nu\frac{m}{n}\pi}.$

Die zu beiden Seiten links und rechts vom tiefsten Punkte liegenden Schwingungsbogen sind demnach

$$\begin{array}{llll} \text{für die erste Schwingung} & +\alpha & \text{und} & -\alpha e^{-\frac{m}{n}\pi}, \\ \text{„ „ zweite „} & -\alpha e^{-\frac{m}{n}\pi} & \text{„} & +\alpha e^{-2\frac{m}{n}\pi}, \\ \text{„ „ dritte „} & +\alpha e^{-2\frac{m}{n}\pi} & \text{„} & -\alpha e^{-3\frac{m}{n}\pi}, \end{array}$$

und so fort. Addieren wir nun die Bogen rechts mit entgegengesetzten Zeichen zu denen links, so erhalten wir die ganzen Schwingungsbogen, welche sind

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= +\alpha(1+e^{-\frac{m}{n}\pi}) &&= \vartheta_1 \\ \vartheta_2 &= -\alpha(1+e^{-\frac{m}{n}\pi})e^{-\frac{m}{n}\pi} &&= -\vartheta_1 e^{-\frac{m}{n}\pi} \\ \vartheta_3 &= +\alpha(1+e^{-\frac{m}{n}\pi})e^{-2\frac{m}{n}\pi} &&= +\vartheta_1 e^{-2\frac{m}{n}\pi} \\ &\vdots && \vdots \\ \vartheta_{\nu-1} &= \pm\alpha(1+e^{-\frac{m}{n}\pi})e^{-\nu\frac{m}{n}\pi} &&= \pm\vartheta_1 e^{-\nu\frac{m}{n}\pi}. \end{aligned}$$

Die aufeinander folgenden Schwingungsbogen bilden mithin eine geometrische Progression mit dem Exponenten $-e^{-\frac{m}{n}\pi}$. Diese Bogen nehmen beständig ab bis die Geschwindigkeit gleich Null und damit die Bewegung erschöpft ist.

Nach (12) ist die Geschwindigkeit an einer beliebigen Bahnstelle

$$v = -\frac{\alpha g}{n}e^{-mt}\sin nt.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$\frac{dv}{dt} = \alpha g e^{-mt}\left\{\frac{m}{n}\sin nt - \cos nt\right\}.$$

Setzen wir hier $\frac{dv}{dt} = 0$, dann wird

$$tg\, nt = \frac{n}{m} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{4g - ak^2}{a}},$$

aus welcher Relation die Zeit t folgt, für welche die Geschwindigkeit v ein Maximum ist. Bei der Bewegung des Punktes im leeren Raume ist $k = 0$, also $tg\, nt = \infty$, $nt = \frac{\pi}{2}$, d. h. das Maximum der Geschwindigkeit tritt, wie bekannt, in der Mitte der Schwingungszeit und der Bahn ein. Für ein Fluidum ist $k > 0$, also $\frac{4g}{ak^2} - 1 < \infty$, $tg\, nt$ endlich und $nt < \frac{\pi}{2}$.

Der Punkt besitzt mithin, in einem Medium schwingend, die grösste Geschwindigkeit vor Ablauf der ersten Hälfte einer jeden Schwingungszeit. Das Geschwindigkeitsmaximum v_m tritt ein, wenn die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{d t^2} = 0$, also wenn nach (1)

$$g \sin \vartheta - k v = 0, \quad \text{in welchem Falle} \quad \vartheta = \frac{k}{g} v_m.$$

Die Ablenkung des Radiusvektor von der Vertikalen ist bei dem Geschwindigkeitsmaximum der Konstanten k direkt proportional.

Mit $\vartheta = 0$ in (10) ergiebt sich die Fallzeit für den Weg bis zur tiefsten Bahnstelle, wofür

$$\frac{m}{n} \sin n t + \cos n t = 0, \quad \text{oder} \quad tg\, n t = -\frac{n}{m} = -\sqrt{\frac{4 g}{a k^2} - 1}$$

ist. Der Wert der Wurzelgrösse ist sehr gross, er wird mit $k = 0$, gleich ∞, so dass der Winkel $n t$ von $\frac{\pi}{2}$ nur sehr wenig abweicht, jedoch grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, wegen des negativen Zeichens der Wurzelgrösse. Der Punkt braucht daher zum Niedergange mehr Zeit als zum Aufgange.

Autenheimer, Elementarbuch der Differentialrechnung etc., p. 384.

3. Ein schwerer Punkt bewegt sich auf einem vertikalen Kreisbogen in einem gleichförmigen Fluidum. Die Retardation durch das Fluidum ist direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Wie ist die Bewegung des Punktes beschaffen?

Bezeichnet a den Halbmesser des Kreises, dann ist die Beschleunigung herunter den Bogen $g \sin \frac{s}{a}$, welcher die Beschleunigung $k v^2$ des Mittels entgegenwirkt, so dass die Bewegungsgleichung des Punktes

$$v \frac{d v}{d s} = -g \sin \frac{s}{a} + k v^2, \quad \text{oder} \quad v \frac{d v}{d s} - k v^2 = -g \sin \frac{s}{a}, \tag{1}$$

welche Gleichung sowohl für den fallenden als auch für den steigenden Teil des Bogens gilt. Ihre Multiplikation mit $2 e^{-2ks}$ giebt, wenn ausserdem $d s$ aus dem Nenner entfernt wird,

$$2 v d v \,.\, e^{-2ks} - 2 k v^2 e^{-2ks} d s = -2 g \sin \frac{s}{a} e^{-2ks} d s,$$

so dass durch Integration

$$v^2 e^{-2ks} = -2 g \int \sin \frac{s}{a} e^{-2ks} d s.$$

Nun ist $\int \sin\frac{s}{a}\, e^{-2ks}\, ds = \dfrac{e^{-2ks}\left(-2k\sin\frac{s}{a} - \frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}\right)}{4k^2 + \frac{1}{a^2}} + C',$

$$= -\frac{a e^{-2ks}\left(\cos\frac{s}{a} + 2ak\sin\frac{s}{a}\right)}{4a^2k^2+1} + C',$$

folglich $v^2 = \dfrac{2ag\left(\cos\frac{s}{a} + 2ak\sin\frac{s}{a}\right)}{4a^2k^2+1} + C'' e^{2ks}$

oder $v^2(1+4a^2k^2) = 2ag\left(\cos\frac{s}{a} + 2ak\sin\frac{s}{a}\right) + Ce^{2ks}.$

Beim Beginn der Bewegung sei $v = 0$, $s = s_0$, dann ist

$$C = -2ag\left(\cos\frac{s_0}{a} + 2ak\sin\frac{s_0}{a}\right)e^{-2ks_0},$$

und mithin

$$v^2(1+4a^2k^2) = 2ag\left(\cos\frac{s}{a} + 2ak\sin\frac{s}{a}\right)$$
$$-2ag\left(\cos\frac{s_0}{a} + 2ak\sin\frac{s_0}{a}\right)e^{2k(s-s_0)}. \qquad (2)$$

Wenn der Wert von s_0 so beschaffen ist, dass

$$\cos\frac{s_0}{a} + 2ak\sin\frac{s_0}{a} = 0, \quad \text{oder} \quad -tg\frac{s_0}{a} = tg\left(\frac{s_0}{a} - \frac{\pi}{2}\right) = 2ak,$$

erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v^2 = 2ag\sin\frac{s_0}{a}\left(\frac{s_0}{a} - \frac{s}{a}\right)$$

Figur 101.

Ist nun (Fig. 101) der Winkel $CAB = \frac{s_0}{a}$, und beginnt der Punkt im Vacuum von C aus vermöge der Beschleunigung $g\sin\frac{s_0}{a}$ zu sinken, dann ist an einer beliebigen Bahnstelle P seine Geschwindigkeit gegeben durch

$$v^2 = 2g\sin\frac{s_0}{a}\, a\sin\measuredangle PAC = 2ag\sin\frac{s_0}{a}\left(\frac{s_0}{a} - \frac{s}{a}\right)$$

= dem Quadrate seiner Geschwindigkeit im widerstehenden Mittel.

Folglich wird unter diesen Verhältnissen die Bewegung des Punktes im Vacuum dieselbe wie in dem fraglichen Fluidum sein.

4. Ein schwerer Punkt schwingt in einem gleichförmigen Fluidum, dessen Widerstandsbeschleunigung direkt proportional der Geschwindigkeit

ist, auf dem Bogen einer Cycloide mit vertikaler Axe und nach unten gelegenem Scheitel. Die Bewegung des Punktes soll untersucht werden.

Es bezeichne g die Fallbeschleunigung im Fluidum, k die Retardation durch das Fluidum für die Geschwindigkeitseinheit, l die Länge des Bogens der halben Cycloide, dann ist die Beschleunigung in der Richtung der Bahn

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -\frac{s}{l} g + k v.$$

Für den fallenden Punkt ist $v = -\frac{d s}{d t}$, folglich

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + k \frac{d s}{d t} + \frac{g}{l} s = 0. \tag{1}$$

Steigt der Punkt auf der anderen Hälfte der Cycloide, nachdem er die tiefste Stelle der Bahn passiert hat, ist s' der steigende Bogen, dann haben wir für diesen Teil der Bewegung

$$\frac{d^2 s'}{d t^2} = \frac{s'}{l} g - k v.$$

Weil aber hier $v = \frac{d s'}{d t}$, und $s' = -s$, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + k \frac{d s}{d t} + \frac{g}{l} s = 0,$$

welche mit (1) identisch ist, so dass die (1) sowohl für das Sinken als auch für das Steigen des Punktes richtig ist.

Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher $k^2 - 4\frac{g}{l} < 0$, es giebt ihre Integration, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{g}{l} - k^2} = b$ gesetzt wird,

$$s = e^{-\frac{1}{2}kt} \{ C_1 \sin b t + C_2 \cos b t \}, \tag{2}$$

so dass
$$\frac{d s}{d t} = b e^{-\frac{1}{2}kt} \{ C_1 \cos b t - C_2 \sin b t \}$$
$$- \frac{1}{2} k e^{-\frac{1}{2}kt} \{ C_1 \sin b t + C_2 \cos b t \}. \tag{3}$$

Ist s_0 die Länge des Bogens von der Anfangslage des Punktes bis zur tiefsten Bahnstelle, zur Zeit $t = 0$, $s = s_0$, $\frac{d s}{d t} = 0$, dann sind mit (2) und (3) die willkürlichen Konstanten $C_1 = \frac{1}{2} k \frac{s_0}{b}$, $C_2 = s_0$, und wir erhalten

$$s = \frac{s_0}{2 b} (k \sin b t + 2 b \cos b t) e^{-\frac{1}{2}kt}. \tag{4}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\left(b + \frac{k^2}{4b}\right) s_0\, e^{-\frac{1}{2}kt} \sin bt = \frac{g s_0}{b l} e^{-\frac{1}{2}kt} \sin bt. \tag{5}$$

Da nun beim Beginn und am Ende einer jeden einfachen Schwingung $v = \frac{ds}{dt} = 0$ ist, so muss, wenn dafür die Gleichung (5) erfüllt sein soll, $\sin bt = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots$ sein. Mithin ist die Zeit einer einfachen Oszillation

$$T = \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4}}}. \tag{6}$$

Die Zeit eines Hin- und Herganges, d. i. diejenige, innerhalb welcher der Punkt wieder in seine augenblickliche Ruhelage auf der Seite der Anfangslage zurückkehrt, ist

$$T' = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4}}}, \text{ u. s. f.} \tag{6'}$$

Die Gleichungen (6) zeigen, dass die Schwingungszeiten von der Grösse des Bogens s_0 unabhängig sind, die Cycloide ist mithin auch die Tautochrone eines schweren Punktes in einem Fluidum, dessen Widerstandsbeschleunigung der Geschwindigkeit direkt proportional ist.

Die Gleichung (5) lässt erkennen, dass die Geschwindigkeit des Punktes zu einem Maximum wird, wenn $e^{-kt} \sin bt$ seinen grössten Wert annimmt, für welchen die Bedingung besteht

$$0 = e^{-kt}\left(b \cos kt - \frac{1}{2} k \sin bt\right),$$

d. h. wenn $tg\, bt = \frac{2b}{k}$, oder $\sin bt = b\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\cos bt = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist. (7)

Damit ist die Zeit (t'), nach welcher das Geschwindigkeitsmaximum eintritt,

$$t' = \frac{1}{b} arc\left(tg = \frac{2b}{k}\right), \tag{7'}$$

und die Lage des Punktes zu dieser Zeit mit (4) gegeben durch

$$s = s_0 k \sqrt{\frac{l}{g}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{k}{b} arc\left(tg = \frac{2b}{k}\right)}. \tag{8}$$

Passiert der schwere Punkt den Scheitel der Bahn, dann ist, weil $s = 0$,

$$tg\, bt = -\frac{2b}{k}, \quad \text{oder} \quad tg(\pi - bt) = \frac{2b}{k}. \tag{9}$$

Bezeichnet nun t'' die Zeit für das Wandern des Punktes durch den Scheitel, so folgt aus (7) und (9)

$$\pi - bt'' = bt', \quad t' + t'' = \frac{\pi}{b} = T, \quad \text{d. i.} \quad t' = T - t''.$$

Aber $T - t''$ ist die Steigzeit des Punktes, dieselbe ist mithin gleich demjenigen Teile der Fallzeit, welcher zur Erreichung des Geschwindigkeitsmaximums erforderlich ist.

Bedeutet v_m das Geschwindigkeitsmaximum, v' die Geschwindigkeit an der tiefsten Bahnstelle, dann ist

$$v_m = \frac{g s_0}{b l} e^{-\frac{1}{2} k t'} \sin b t', \qquad v' = \frac{g s_0}{b l} e^{-\frac{1}{2} k t''} \sin b t',$$

weil $\sin b t'' = \sin b t'$ ist, mithin

$$\frac{v'}{v_m} = \frac{e^{\frac{1}{2} k t'}}{e^{\frac{1}{2} k t''}} = e^{-\frac{1}{2} k (t'' - t')}.$$

Indem wir π für $b t$ in (4) schreiben, erhalten wir für die Länge s' des Bogens, auf welchem der Punkt steigt,

$$s' = s_0 e^{-\frac{k \pi}{2 b}},$$

und es ist folglich

$$\frac{s_0}{s'} = \frac{\text{einem fallenden Bogen}}{\text{den nächsten steigenden Bogen}} = e^{\frac{k \pi}{2 b}} = \text{einer konstanten Grösse.}$$

Mithin stehen die aufeinander folgenden Bogenlängen in geometrischer Progression. Bezeichnet nun S die Länge des von der Anfangslage bis zu dem Momente, wo die Bewegung gänzlich aufhört, durchlaufenen Weges, so ist

$$S = s_0 + 2 s_0 e^{-\frac{k \pi}{2 b}} + 2 s_0 e^{-\frac{2 k \pi}{2 b}} + \cdots$$

oder

$$S = \frac{e^{\frac{k \pi}{2 b}} + 1}{e^{\frac{k \pi}{2 b}} - 1}.$$

Earnshaw, Dynamics.

5. Ein schwerer Punkt schwingt auf dem Bogen einer in einer Vertikalebene gelegenen Cycloide mit horizontaler und nach oben gelegener Basis. Die Oszillationen finden in einem Medium statt, welches eine dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportionale Verzögerung hervorbringt. Die Bewegung des Punktes soll untersucht werden.

Indem wir die bei der Lösung des vorhergehenden Problemes verwendeten Bezeichnungen beibehalten, ist für die Bewegung des Punktes

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -\frac{s}{l} g + k v^2, \quad \text{oder} \quad v \frac{d v}{d s} - k v^2 = -\frac{g}{l} s. \tag{1}$$

Die Multiplikation der letzten Gleichung mit $2 e^{-2 k s}$ giebt

$$2 e^{-2 k s} v \, d v - 2 e^{-2 k s} k v^2 \, d s = -2 \frac{g}{l} e^{-2 k s} s \, d s,$$

$$\frac{d}{d\,v\,d\,s}\left(v^2 e^{-2ks}\right) = -2\frac{g}{l}e^{-2ks}s\,ds,$$

so dass durch Integration

$$v^2 e^{-2ks} = -\frac{2g}{l}\int e^{-2ks}s\,ds + C',$$

und weil $\int e^{-2ks}s\,ds = -\frac{1}{2k}e^{-2ks}s + \frac{1}{2k}\int e^{-2ks}ds$

$$= -\frac{1}{2k}e^{-2ks}s - \frac{1}{4k^2}e^{-2ks} + C'' = -\frac{2ks+1}{4k^2}e^{-2ks} + C'',$$

erhalten wir $\quad v^2 e^{-2ks} = \frac{(2ks+1)}{2k^2 l}g e^{-2ks} + C.$

Für die Anfangslage des Punktes ist $s = s_0$, $v = 0$, mithin

$$C = -\frac{2ks_0+1}{2k^2 l}g e^{-2ks_0},$$

und demnach

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2ks+1}{2k^2 l}g - \frac{2ks_0+1}{2k^2 l}g e^{-2k(s_0-s)}. \tag{2}$$

Wenn wir mit dieser Gleichung die Zeit ermitteln wollen, so ergiebt sich für dieselbe kein geschlossener Ausdruck, indem die Integration einen solchen nicht liefert. Wir erhalten indessen ein genügend genaues Resultat, wenn wir, einen sehr geringen Widerstand voraussetzend, die Exponentialgrösse $e^{-2k(s_0-s)}$ in eine Reihe entwickeln und deren Glieder bis zur dritten Potenz von k einschliesslich berücksichtigen. Dadurch kommen wir mittelst gewöhnlicher Rechnungsoperationen zu der Gleichung

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{-\frac{ds}{dt}}{\sqrt{s_0^2 - s^2}}\left\{1 + \frac{k}{3}\left(\frac{s_0 - s}{s_0 + s}\right)(2s_0 + s)\right\},$$

deren Integration giebt

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = arc\left(cos = \frac{s}{s_0}\right) - \frac{k}{3}\left\{\sqrt{s_0^2 - s^2} - s_0\,arc\left(cos = \frac{s}{s_0}\right)\right.$$
$$\left. - 2s_0\,arc\left(cos = \sqrt{\frac{s_0 - s}{2s_0}}\right) - 2s_0\sqrt{\frac{s_0 - s}{s_0 + s}}\right\},$$

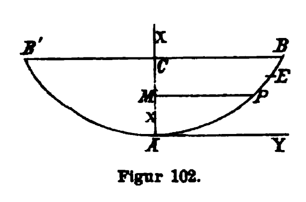
wobei die Integrationskonstante verschwindet, weil $t = 0$, wenn $s = s_0$ ist. Bezeichnet t_1 die ganze Fallzeit des Punktes, dann ist, weil für den tiefsten Bahnpunkt $s = 0$,

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{ks_0}{3}\left(1 + \frac{7}{6}\pi\right)\right\}.$$

Mithin ist der Mehraufwand an Zeit für das Sinken des Punktes im Fluidum verglichen mit der Fallzeit im Vacuum gleich $\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{ks_0}{3}\left(1 + \frac{7}{6}\pi\right)$.

Earnshaw, Dynamics.

6. Ein schwerer Punkt fällt aus der Ruhe von der Stelle E aus auf dem Bogen EA (Fig. 102) einer Cycloide BAB' in einer vertikalen Ebene. Die Axe CA der Bahn ist vertikal, der Curvenscheitel ihr tiefster Punkt. Die Bewegung erfolgt in einem homogenen Fluidum, welches eine Retardation gleich der Summe zweier Grössen hervorbringt. die eine ist konstant, die andere direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Punkt in der tiefsten Bahnstelle A an und wo auf dem Bogen EA ist seine Geschwindigkeit ein Maximum?



Figur 102.

Es sei $MP \perp AC$, $AM = x$, Bogen $AP = s$, Bogen $AE = s_0$, $v =$ der Geschwindigkeit in P, h, k je eine konstante Grösse.

Damit ist die Gleichung für die Bewegung des Punktes entlang der Curve

$$v\frac{dv}{ds} = -g\frac{dx}{ds} + h + \frac{v^2}{k},$$

folglich
$$d(v^2) - \frac{2\,ds}{k}v^2 = -2g\,dx + 2h\,ds,$$

oder, wenn $\frac{1}{4}a$ den Halbmesser des Erzeugungskreises der Cycloide bedeutet, womit $dx = \frac{s}{a}ds$ ist,

$$d(v^2) - \frac{2\,ds}{k}v^2 = -\frac{2g}{a}s\,ds + 2h\,ds.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $e^{-\frac{2s}{k}}$ und integrieren, so ergiebt sich

$$v^2 e^{-\frac{2s}{k}} = C + \frac{1}{a}\left(gks + \frac{1}{2}gk^2 - ahk\right)e^{-\frac{2s}{k}}.$$

Nun ist anfangs $v = 0$, $s = s_0$, mithin

$$0 = C + \frac{1}{a}\left(gks_0 + \frac{1}{2}gk^2 - ahk\right)e^{-\frac{2s_0}{k}},$$

so dass

$$v^2 = \frac{k}{a}\left(gs + \frac{1}{2}gk - ah\right) - \frac{k}{a}\left(gs_0 + \frac{1}{2}gk - ah\right)e^{\frac{2}{k}(s - s_0)}.$$

Für die Geschwindigkeit v_1, mit welcher der Punkt im Scheitel der Curve ankommt, erhalten wir hieraus, weil für diese Stelle $s = 0$,

$$v_1{}^2 = \frac{k}{a}\left(\frac{1}{2}gk - ah\right) - \frac{k}{a}\left(gs_0 + \frac{1}{2}gk - ah\right)e^{-2\frac{s_0}{k}}.$$

Für das Maximum von v muss die Bedingung erfüllt sein

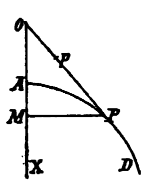
$$0 = \frac{g\,k}{a} - \frac{2}{a}\left(g\,s_0 + \frac{1}{2}g\,k - a\,h\right)e^{\frac{2}{k}(s-s_0)},$$

woraus für den Ort der Maximalgeschwindigkeit sich ergiebt

$$s = s_0 - \frac{k}{2}\,l\,\frac{g s_0 + \frac{1}{2}g\,k - a\,h}{\frac{1}{2}g\,k}.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 292. Walton, p. 366.

7. Von einem gegebenen Punkte O aus, in einer vertikalen Ebene, ist eine unendliche Zahl gerader Linien in dieser Ebene gezogen. Diese Geraden werden von einer ebenen Curve APD (Fig. 103) geschnitten. Wie muss diese Curve beschaffen sein, damit ein von O aus ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer beliebigen Geraden OP fallender schwerer Punkt stets mit derselben Geschwindigkeit in P auf der Curve APD ankommt? Die Bewegung findet in einem homogenen, eine einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit direkt proportionale Retardation erzeugenden Fluidum statt.



Figur 103.

Es sei c die Geschwindigkeit in P, v diejenige an einer beliebigen Stelle von OP, $OP = r$, $Op = z$, $\sphericalangle POX = \vartheta$, OX vertikal, $MP \perp OX$, $OM = x$, $-k$ die Retardation für die Geschwindigkeitseinheit, m der Intex für ihre Potenz.

Die Gleichung für die Bewegung des Punktes auf der Linie OP ist

$$v\frac{dv}{dz}g\cos\vartheta - k\,v^m, \quad \text{oder} \quad dz = \frac{v\,dv}{g\cos\vartheta - k\,v^m},$$

so dass

$$r = \int_0^c \frac{v\,dv}{g\cos\vartheta - k\,v^m} = \int_0^c \frac{c\,dc}{g\cos\vartheta - k\,c^m}.$$

Daraus folgt mit $x = r\cos\vartheta$

$$x = \int_0^c \frac{c\,dc}{gk - kc^m\sec\vartheta} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{g - k\,c^m\sec\vartheta} - \frac{1}{2}m\,k\sec\vartheta\int_0^c \frac{c^{m+1}\,dc}{(g - k\,c^m\sec\vartheta)^2}.$$

Nun ist c konstant, x und ϑ sind veränderlich, deshalb wird

$$dx = k\,d(\sec\vartheta)\int_0^c \frac{c^{m+1}\,dc}{(g - k\,c^m\sec\vartheta)^2},$$

wodurch
$$2\,x = \frac{c^2}{g - k\,c^m\sec\vartheta} - \frac{m\sec\vartheta\,dx}{d(\sec\vartheta)},$$

oder, $\frac{r}{x}$ für $\sec\vartheta$ setzend,

$$m\frac{r}{x}dx + 2xd\left(\frac{r}{x}\right) = \frac{c^2 d\left(\frac{r}{x}\right)}{g - k\frac{r}{x}c^m},$$

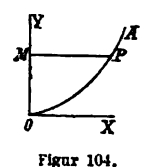
und mithin ist

$$(m-2)r\,dx + 2x\,dr = c^2\frac{x\,dr - r\,dx}{gx - kc^m r}$$

die Differentialgleichung der Curve in x und r.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 246. Walton, p. 368.

8. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einem homogenen Fluidum. Die Beschleunigung durch das Mittel ist direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Welches ist die Tautochrone?



Figur 104.

Es sei (Fig. 104) O der Ort, nach welchem der Punkt stets in derselben Zeit herabsinkt, AO die Tautochrone, die horizontale Gerade OX Abscissen-, die vertikale Gerade OY Ordinatenaxe, $OM = y$, $MP = x$, Bogen $OP = s$, v die Geschwindigkeit des Punktes in P, k die Beschleunigung durch das Fluidum für die Geschwindigkeitseinheit.

Die Gleichung für die Bewegung entlang der Curve ist

$$v\,dv = -g\,dy + kv^2\,ds,$$

woraus durch Multiplikation mit $2e^{-2ks}$ und nachherige Integration folgt

$$v^2 e^{-2ks} = C - 2g\int e^{-2ks}dy.$$

Der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in O ankommt, entspreche eine Fallhöhe h im Vacuum, dann ist

$$2gh = C - 2g\int e^{-2ks}dy,$$

folglich

$$v^2 e^{-2ks} = 2g\left\{h - \int_0^y e^{-2ks}dy\right\}, \tag{1}$$

und daher, zu einer beliebigen Zeit ist $v = -\frac{ds}{dt}$,

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{e^{-ks}ds}{\sqrt{h-u}}, \text{ mit } u = \int_0^y e^{-2ks}dy. \tag{2}$$

Nun ist s eine Funktion von y und daher auch von u, so dass wir $e^{-ks}ds = \psi(u)\,du$ setzen können, womit sich ergiebt

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}, \qquad t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}.$$

Aber es ist $t = 0$, wenn $v = 0$, und auch wenn $u = h$, für den Bahnpunkt O $y = 0$ und auch $u = 0$, daher ist die ganze Fallzeit des Punktes, welche t_1 sein möge,

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}, \tag{3}$$

ein Resultat, das infolge der Bedingung des Tautochronismus von der Grösse h unabhängig sein muss. Demnach darf das Integral $\int \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}$ von keiner Dimension in u und h zusammen sein, folglich darf das Differential $\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}$ die Grössen u, h, du nicht enthalten. Weil offenbar $\psi(u)$ h nicht enthält, so müssen wir haben $\psi(u) = \frac{\alpha}{\sqrt{u}}$, mit α eine gewisse Konstante bezeichnend. Mit diesem Werte von $\psi(u)$ wird

$$e^{-ks}\,ds = \alpha \frac{du}{\sqrt{u}},$$

und giebt die Integration dieser Gleichung

$$C - \frac{1}{k} e^{-ks} = 2\alpha\sqrt{u}.$$

Die Gleichung (2) zeigt, dass wenn $s = 0$, und daher $y = 0$, $u = 0$ ist. folglich muss $C = \frac{1}{k}$ sein. Mithin haben wir

$$\frac{1}{k}(1 - e^{-ks}) = 2\alpha\sqrt{u}, \qquad \frac{1}{k^2}(1 - e^{-ks})^2 = 4\alpha^2 u.$$

$$\frac{1}{k}(1 - e^{-ks})\,e^{-ks} = 2\alpha^2 \frac{du}{ds} = 2\alpha^2 e^{-2ks} \frac{dy}{ds}, \text{ durch (2)},$$

und sonach ist die Gleichung der Tautochrone

$$2\alpha^2 k \frac{dy}{ds} = e^{ks} - 1. \tag{4}$$

Bezeichnet τ die ganze Fallzeit, so ist, weil $\psi(u) = \frac{\alpha}{\sqrt{u}}$, mit (3)

$$\tau = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2g}}, \qquad \alpha^2 = \frac{2g\tau^2}{\pi^2},$$

und folglich ist die Gleichung der Tautochrone für die Zeit τ

$$4gk\tau^2 \frac{dy}{ds} = \pi^2(e^{ks} - 1). \tag{5}$$

Euler, Comment. Petrop. 1729; Mechan., Tom. II, p. 392. Johann Bernoulli. Mém. de l'Acad. des Sciences des Paris 1730; Opera, Tom. III, p. 173. Siehe auch The Cambridge Mathematical Journal, Vol. II, p. 153, daselbst hat Mr. Robert Leslie Ellis die Lösung dieser Aufgabe auf die Tautochrone im Vacuum zurückgeführt.

Walton, p. 369.

9. Ein schwerer Punkt fällt auf dem Bogen einer Cycloide mit vertikaler Axe und nach oben gelegenem Scheitel in einem eine Verzögerung $\frac{v^2}{2s_0}$ hervorbringenden Medium, wo s_0 die Länge des zu durchfallenden Cycloidenbogens vom Scheitel bis zur

Anfangslage des Punktes bedeutet. Wie gross ist die Fallzeit T nach der Spitze, wenn l die Länge des Bogens der halben Cycloide bezeichnet?

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g s_0}(l - s_0)}.$$

10. Ein schwerer Punkt durchfällt die Seiten eines regulären Polygonzuges in einer vertikalen Ebene, seine Bewegung erfolgt in einem homogenen Fluidum, welches ihn direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit verzögert. Wie gross ist die Geschwindigkeit des Punktes, wenn er in dem Endpunkte einer beliebigen Polygonseite ankommt und die von ihm zuerst durchfallene Seite vertikal ist?

Es sei $(\pi - \alpha)$ der konstante Polygonwinkel, l die Länge einer Polygonseite, kv^2 die Beschleunigung durch das Fluidum, v_x die Geschwindigkeit im Endpunkte der x^{ten} Seite, dann ist mit $M = \frac{e^{2kl} - \cos\alpha}{\cos\alpha}$, $N = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} e^{2kl}$,

$$v_x = (\cos\alpha)^x e^{-klx} \left\{ A^2 + \frac{g(e^{2kl} - 1)}{k(\cos\alpha)^2} \frac{M\cos x\alpha + N\sin x\alpha}{M^2 + N^2} \frac{e^{2klx}}{(\cos\alpha)^{2x}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

A bezeichnet eine willkürliche Konstante, welche leicht bestimmt werden kann, wenn der Wert von v_x für einen beliebigen Wert von x bekannt ist.

Bordoni, Memoire della Societa Italiana, 1816, p. 173.

11. In einem gegebenen Punkte O einer vertikalen Ebene entspringt ein in dieser Ebene gelegener Strahlenbüschel. Wie muss die ebene Curve APD (Fig. 103, S. 266) beschaffen sein, damit ein von O aus mit der Geschwindigkeit Null auf irgend einem Strahle OP fallender schwerer Punkt stets mit derselben Geschwindigkeit auf der Curve ankommt, wenn die Widerstandsbeschleunigung des Mittels, in welchem die Bewegung erfolgt, dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportional ist?

Es sei die Vertikalkonstante $OA = a$, $OP = r$, $OM = x$, $k =$ der Widerstandsbeschleunigung für die Geschwindigkeitseinheit, dann ist die Gleichung der verlangten Curve

$$x = r \frac{e^{2kr}}{e^{2ka}} \frac{e^{2ka} - 1}{e^{2kr} - 1}.$$

Euler, Mechan., Tom. II, p. 251.

12. In einer vertikalen Ebene ist von einem gegebenen Punkte O aus ein Strahlenbüschel gezogen. In dieser Ebene befindet sich eine Curve OPA (Fig. 105), welche in derselben Zeit erreicht wird, wenn ein schwerer Punkt von O aus ohne Anfangsgeschwindigkeit auf irgend einem Strahle fällt. Die Verzögerung durch das Mittel ist direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Welches ist die Gleichung der Curve?

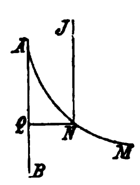
Es sei die Vertikale $OA = a$, $OP = r$, $\sphericalangle AOP = \vartheta$, dann ist die Polargleichung der synchronischen Curve

$$\sqrt{\cos\vartheta}\, \frac{l\{e^{kr} + \sqrt{e^{2kr} - 1}\}}{l\{e^{ka} + \sqrt{e^{2ka} - 1}\}}.$$

Figur 105.

Euler, Mechan., Tom. II, p. 256.

13. Ein schwerer Punkt steigt auf einer in einer vertikalen Ebene gelegenen Curve MNA (Fig. 106) in einem Fluidum, welches eine der Geschwindigkeit direkt



Figur 106.

proportionale Verzögerung hervorbringt. Wie muss die Curve beschaffen sein, damit die Geschwindigkeit des Punktes an einer beliebigen Bahnstelle N dieselbe sein kann wie diejenige, welche der Punkt beim freien Durchfallen des vertikalen Weges JN ohne Anfangsgeschwindigkeit, in demselben Medium, erlangen würde, wenn die Fallhöhe JN gleich dem von A ausgemessenen Bogen AN der Curve gedacht wird?

Ziehe durch A eine vertikale Linie AB, mache $NQ \perp AB$, setze $AQ = x$, Bogen $AN = s$, $k =$ der bekannten Konstanten, dann ist die Differentialgleichung der Curve

$$k(x+s) = 1 - e^{-2ks}.$$

Diese Aufgabe wurde Clairaut auf seiner Reise nach Lappland von Klingstierna, Professor der Mathematik in Upsala, zur Lösung vorgeschlagen, welchen Ort ersterer auf seinem Wege besuchte. Klingstierna's Konstruktion veröffentlichte Clairaut mit seiner Lösung in Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1740, p. 254.

9—13. Walton, p. 372—374.

Fünftes Kapitel.

Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche.

Die Gleichungen für die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche lassen sich in derselben Weise aufstellen, wie diejenigen eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn, es ergeben sich dann ganz gleichlautende Formeln und sind die unten gewählten Bezeichnungen dieselben wie dort. Eine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes findet der Leser in dem Werke: „Theorie der Bewegung und der Kräfte", von Schell, I. Band, S. 413—441, worauf verwiesen werden muss. (Im zweiten Bande wird die Bewegung einer Kugel auf vorgeschriebener Fläche behandelt werden.)

1. Ein schwerer Punkt bewegt sich auf der Fläche einer halbkugelförmigen Schale mit vertikaler geometrischer Axe OZ. Wie ist die Bewegung dieses Punktes beschaffen?

Im vorliegenden Falle haben wir $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, und die Gleichung der Fläche ist, wenn a der Kugelradius, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, so dass $p = -\frac{x}{a}$, $q = -\frac{y}{a}$, $\cos\alpha = \frac{x}{a}$, $\cos\beta = \frac{y}{a}$, $\cos\gamma = \frac{z}{a}$. Damit sind die Gleichungen für die Bewegung des Punktes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{a}, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{a}, \quad (2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g - N\frac{z}{a}. \quad (3)$$

Sind z_0 und v_0 gleichzeitige Werte von z und v, dann haben wir für die Geschwindigkeit des Punktes an einer beliebigen Stelle der Fläche

$$v^2 = \int g\,dz + C, \quad \text{d. i.} \quad v^2 = v_0{}^2 + 2g(z - z_0). \tag{4}$$

Um die Widerstandsbeschleunigung der Fläche zu erhalten, verfahren wir wie folgt.

Wir multiplizieren die Gleichungen (1), (2), (3) der Reihe nach mit x, y, z und addieren die Resultate, was giebt

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = gz - Na.$$

Durch zweimalige Differentiation der Gleichung der Kugelfläche erhalten wir

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -v^2$$
$$= -v_0{}^2 - 2g(z - z_0).$$

Mithin ist offenbar

$$gz - Na = -v_0{}^2 - 2g(z - z_0),$$

woraus folgt

$$N = \frac{v_0{}^2 + (3z - 2z_0)g}{a}. \tag{5}$$

Ferner haben wir die Zeit der Bewegung zu bestimmen. Multiplizieren wir (2) mit x, (1) mit y und subtrahieren die resultierenden Gleichungen, so wird

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

und durch Integration

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

was zeigt, dass hier das Prinzip der Flächen gilt. Auch ist infolge der Gleichung der Fläche

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt}.$$

Die Quadratur der beiden letzten Gleichungen und die Addition der hieraus folgenden Resultate giebt

$$(x^2 + y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} = c^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

so dass
$$a^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (a^2 - z^2)\{v_0{}^2 + 2g(z - z_0)\} - c^2,$$

Daraus erhalten wir für die Zeit

$$t = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)\{v_0{}^2 + 2g(z - z_0)\} - c^2}}, \tag{6}$$

welche sich nun bestimmen lässt, wenn die Integration ausgeführt werden kann.

Die Lage der zur Zeit t durch den schweren Punkt gehenden Meridianebene kann mittelst der Relation

$$c = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = (a^2 - z^2)\frac{d\vartheta}{dt}$$

gefunden werden, woraus folgt

$$\vartheta = \int\frac{c}{a^2 - z^2}\,dt = \int\frac{c\dfrac{dt}{dz}}{a^2 - z^2}\,dz, \tag{7}$$

oder mit (6)

$$\vartheta = \int\frac{a\varrho\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)\{v_0{}^2 + 2g(z - z_0)\} - c^2}}. \tag{8}$$

Für die Vertikalgeschwindigkeit des Punktes besteht die Gleichung

$$a^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (a^2 - z^2)(2gz + C) - c^2,$$

und ist C mittelst der an die Anfangslage des Punktes sich knüpfenden Bedingungen zu bestimmen. Diese Geschwindigkeit ist für den höchsten Punkt der Fläche, welcher erreicht werden kann, und für die tiefste Stelle, bis zu welcher der schwere Punkt sinken kann, gleich Null, wodurch wir dafür die Gleichung anschreiben können

$$0 = (a^2 - z^2)(2gz + C) - c^2, \quad \text{oder} \quad z^3 + \frac{C}{2g}z^2 - a^2z + c^2 - \frac{Ca^2}{2g} = 0.$$

Weil C negativ ist, wie aus (4) hervorgeht, so sind zwei Wurzeln dieser kubischen Gleichung positiv und die dritte ist negativ. Alle diese Wurzelwerte sind mögliche Grössen, weil die Bewegung in einer Schale stattfindet, woselbst notwendiger Weise eine grösste und eine kleinste Höhe vorhanden sein muss, welchen Höhen zwei mögliche Wurzeln dieser Gleichung entsprechen. Es sei deshalb α die grösste, β die kleinste und γ die negative Wurzel, dann ist

$$a^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma),$$

oder, wenn wir $\alpha - z = z'$ setzen, wobei z' die Höhe des schweren Punktes über seiner tiefsten Lage ist,

$$a^2\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 = 2gz'(\alpha - \beta - z')(\alpha + \gamma - z'),$$

folglich

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = \int\frac{-dz'}{\sqrt{(\alpha - \beta)z' - z'^2}\sqrt{\alpha + \gamma - z'}}.$$

Nun ist nach der Gleichung für die Zeit der Bewegung eines schweren Punktes auf einem vertikalen Kreisbogen (Aufgabe 15, S. 289), wenn t' die Zeit des Sinkens aus einer Höhe $\alpha - \beta$ bis zu einer Höhe z' auf einem Kreisbogen vom Diameter $(\alpha + \gamma)$ bezeichnet,

$$\sqrt{\frac{4g}{\alpha + \gamma}}\,t' = \int\frac{-dz}{\sqrt{(\alpha - \beta)z' - z'^2}\sqrt{\alpha + \gamma - z'}},$$

also $\quad t\sqrt{\alpha+\gamma} = t'\sqrt{2a}, \quad$ oder $\quad t = t'\sqrt{\frac{2a}{\alpha+\gamma}}.$

Die Zeit T einer Schwingung vom Momente des Verlassens der höchsten Lage bis zur Rückkehr in dieselbe ist daher

$$T = \pi\sqrt{\frac{a^2}{(\alpha+\gamma)g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Die willkürlichen Konstanten C und c lassen sich bequem durch α und β, die grösste und kleinste Tiefe, welche der Punkt im Verlaufe seiner Bewegung erreicht, ausdrücken. Weil für alle Werte von z

$$(a^2 - z^2)(2gz + C) - c^2 = 2g(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma),$$

so ist $\quad$ mit $z = \alpha \quad (a^2 - \alpha^2)(2g\alpha + C) = c^2,$

$\quad$ „ $z = \beta \quad (a^2 - \beta^2)(2g\beta + C) = c^2.$

$\quad$ „ $z = 0 \quad C^2 a^2 - c^2 = 2g\alpha\beta\gamma.$

Durch diese Gleichungen ergiebt sich

$$C = -2g\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - a^2}{\alpha+\beta}, \quad c^2 = 2g\frac{(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}{\alpha+\beta},$$

$$\gamma = \frac{a^2 + \alpha\beta}{\alpha+\beta}, \quad \alpha + \gamma = \frac{a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}{\alpha+\beta}.$$

Dadurch ist auch die Zeit einer Schwingung

$$T = \pi\sqrt{\frac{a^2(\alpha+\beta)}{g(a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2)}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Der Punkt besitzt gleichzeitig eine vertikale und eine horizontale Bewegung. Seine Vertikalbewegung steht, wie eben gezeigt wurde, in bestimmter Beziehung zu derjenigen eines gewissen ebenen Pendels. Nun ist noch die Horizontalbewegung etwas näher zu beleuchten. Die Gleichung $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$ informiert uns, dass von dem Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschrieben werden. Projizieren wir die Bahn des schweren Punktes auf die durch den Mittelpunkt der Kugelschale gehende horizontale Ebene, welche die XY-Ebene ist, bezeichnen die nach dem Mittelpunkte gerichtete Projektionsbeschleunigung mit φ', die Projektionsgeschwindigkeit des Punktes mit v', dann ist

$$v'^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{z^2(2gz + C) + c^2}{a^2},$$

$$\varphi' = -v'\frac{dv'}{dr} = -v'\frac{dv'}{dz}\frac{dz}{dr} = -\frac{3gz^2 + Cz}{a^2}\left(-\frac{r}{z}\right), \text{ mit } z^2 = a^2 - r^2$$

$$\varphi' = \frac{3gr\sqrt{a^2 - r^2} + Cr}{a^2}.$$

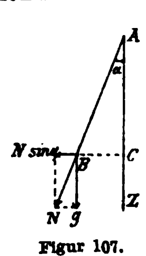
Es ist nicht möglich, die Gleichung dieser Projektionsbahn in geschlossener Form darzustellen. Nehmen wir an, dass r ausserordentlich klein gegen den Halbmesser der Schale, dann lässt sich annähernd schreiben

$$\varphi' = \frac{3ga + C}{a^2} r.$$

In diesem Falle ist mithin die Beschleunigung φ' näherungsweise direkt proportional dem Abstande der Projektion des Punktes von dem Mittelpunkte der Schale, und es ist ihre Bahn sehr nahe eine Ellipse. Das erste und wichtigste Glied, welches in dem Ausdrucke für φ' vernachlässigt wurde, ist $-\frac{3gr^3}{2a^3}$, welches, weil es negativ ist, die Acceleration nach der Schalenaxe hin vermindert. Sehen wir φ' als eine nach einem festen Centrum gerichtete Beschleunigung an, dann vergrössert das Glied $-\frac{3gr^3}{2a^3}$ die Bahn, verlängert die periodische Umlaufszeit und macht die Absiden fortschreitend.

Earnshaw, Dynamics.

2. Ein schwerer Punkt ist mittelst einer geraden Linie an einen festen Punkt gefesselt und beschreibt diese Gerade bei der Bewegung des schweren Punktes eine konische Fläche. Die Bewegung dieses sogenannten konischen Pendels soll untersucht werden.



Figur 107.

Es sei (Fig. 107) die Länge der Geraden $AB = a$, A der feste, B der bewegliche Punkt, AZ die vertikale Axe des Coordinatensystemes, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $N =$ der Spannungsbeschleunigung der Linie AB.

An dem Pendelpunkte B wirkt die Fallbeschleunigung g vertikal abwärts, die Spannungsbeschleunigung N in der Richtung AB. Durch Zerlegung von N parallel und senkrecht zum Horizonte erhalten wir als Componenten $-N\sin\alpha$ und $N\cos\alpha$, so dass

$$0 = g - N\cos\alpha, \quad \text{oder} \quad N = g\sec\alpha \tag{1}$$

ist. Die Componente $N\sin\alpha$ hält den Punkt in B in einem Kreise zurück, sein Mittelpunkt ist mit $BC \perp AZ$ der Punkt C. Wenn nun der Punkt B sich in einem Kreise um ein Centrum in dessen Mittelpunkte bewegen soll, dann muss die Centrifugalbeschleunigung stets gleich der Centripedalbeschleunigung sein, d. h. es muss sein

$$\frac{v^2}{BC} = \frac{v^2}{a\sin\alpha} = N\sin\alpha = g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{d. i.} \quad v = \sqrt{\frac{ag}{\cos\alpha}}\sin\alpha.$$

Mit dieser konstanten Geschwindigkeit bewegt sich der Punkt im Kreise und ist, wenn T die Zeit eines Umlaufes bedeutet,

$$T = \frac{2\pi a \sin\alpha}{v} = 2\sqrt{\frac{a \cos\alpha}{g}}.$$

Weil dieses Resultat nur von $a \cos\alpha$, der Höhe des von der Pendellinie beschriebenen Kegels abhängig ist, so folgt, dass die Schwingungszeit für alle konischen Pendel gleicher Höhe konstant ist.

Verwenden wir zur Lösung die Resultate des vorhergehenden Problemes, dann haben wir, weil $z = a \cos\alpha$, $r = a \sin\alpha$ ist, die Wurzeln α und β einander gleich, gleich $a \cos\alpha$ zu nehmen. Damit erhalten wir für die Integrationskonstanten

$$C = -a g \frac{3\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}, \qquad c^2 = a^3 g \frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha}.$$

Mit diesen Werten ergiebt sich für die Geschwindigkeit des Pendelpunktes in seiner Bahn und die Beschleunigung φ'

$$v^2 = a g \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \varphi' = g \operatorname{tg}\alpha.$$

Ferner ist

$$\frac{g \operatorname{tg}\alpha}{N} = \sin\alpha, \text{ also } N = \frac{g}{\cos\alpha}, \quad \text{und} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a\cos\alpha}{g}}.$$

Ist der Winkel, welchen der Faden des sphärischen Pendels mit der Vertikalen durch den Aufhängepunkt einschliesst, sehr klein, dann können wir die allgemeinen Bewegungsgleichungen integrierbar machen und gelangen zu sehr nahe richtigen Resultaten. Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die von der Flächennormalen und den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, dann sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - N\cos\alpha_1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - N\cos\beta_1, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - N\cos\gamma_1.$$

Im vorliegenden Falle ist $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$. Der Pendelfaden weicht nur sehr wenig von der Vertikalen durch den Aufhängepunkt ab, es ist $z = a\cos\alpha = a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \cdots\right) = a$ annähernd. Damit dieses überhaupt möglich, muss v_0, daher auch die ihm entsprechende Fallhöhe h klein sein, so dass auch z_0 nur sehr wenig von z abweicht, wodurch es möglich ist, $N = g$, die Spannungsbeschleunigung gleich der Fallbeschleunigung zu setzen. Ferner ist $\cos\alpha_1 = \frac{x}{a}$, $\cos\beta_1 = \frac{y}{a}$, $\cos\gamma_1 = \frac{z}{a}$. Unter diesen Verhältnissen sind nun die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x, \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{a}y, \quad (2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g\left(1 - \frac{z}{a}\right). \quad (3)$$

Mit $g\left(1 - \frac{z}{a}\right) = \frac{g}{a}u$, wird $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{d^2u}{dt^2}$, und die (3) nimmt die Form an

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{g}{a} u. \qquad (3')$$

Vollziehen wir die Integration der Gleichungen (1), (2), (3′) und differentiieren die Resultate nach t, so ergiebt sich

$$x = A' \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + B' \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t. \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}}(A' \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t - B' \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t) = v_x$$

$$y = A'' \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + B'' \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t. \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}}(A'' \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t - B'' \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t) = v_y$$

$$u = A''' \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + B''' \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t. \quad \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}}(A''' \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t - B''' \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t).$$

Nun sei zur Zeit $t = 0$, $x = \alpha$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = \beta$, $z = \gamma$, $\frac{dz}{dt} = 0$, so dass $u = a - \gamma$, $\frac{du}{dt} = 0$, dann erhalten wir für die sechs Integrationskonstanten die Werte

$$A' = \alpha, \; B' = 0, \; A'' = 0, \; B'' = \beta\sqrt{\frac{a}{g}}, \; A''' = a - \gamma, \; B''' = 0,$$

und es sind die Coordinaten der Bahn des Pendelpunktes

$$x = \alpha \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t, \quad y = \beta\sqrt{\frac{a}{g}} \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t, \quad z = a - (a - \gamma)\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t, \; (4)$$

sowie seine Projektionsgeschwindigkeiten

$$v_x = \alpha\sqrt{\frac{g}{a}} \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t, \; v_y = \beta \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t, \; v_z = (a - \gamma)\sqrt{\frac{g}{a}} \sin\sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

Aus den zwei ersten Gleichungen unter (4) folgt, indem wir dieselben quadrieren und die Resultate addieren,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2 \frac{a}{g}} = 1.$$

Die Projektion der Bahn des Pendelpunktes auf eine horizontale Ebene ist mithin eine Ellipse. Die Halbaxen dieser Curve sind α und $\beta\sqrt{\frac{a}{g}}$, ihr Mittelpunkt fällt mit der Axe der z zusammen. Damit der schwere Punkt wieder in seine Anfangslage zurückkehre, muss mit Rücksicht auf die Gleichung für x die Bedingung erfüllt werden $0 = \alpha \cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$, d. h. es muss $\sqrt{\frac{g}{a}}T = 2\pi$ sein, so dass die Umlaufszeit $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ist. Diese Oszillationsdauer ist mithin gleich der entsprechenden eines einfachen Pendels von de Länge a bei sehr kleinem Ausschlagwinkel.

Sechstes Kapitel.

Relative Bewegung eines Punktes.

Erster Abschnitt.

Freie Bewegung.

1. In einer geraden Linie OA (Fig. 108) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit das Centrum C einer Beschleunigung, nach ihm wird ein Punkt P direkt proportional der Distanz acceleriert. Die Bewegung des Punktes soll untersucht werden.

O P C A

Figur 108.

O sei ein fester Punkt in der Geraden OA. Zur Zeit $t = 0$ sei $OC = a_1$, $OP = a_2$, v_0 die Geschwindigkeit des Punktes P. Die konstante Geschwindigkeit des Centrums C in der Richtung OA sei c, μ die absolute Beschleunigung, x der Abstand des Punktes P von O zur Zeit t. Zur Zeit t ist $(a_1 + ct - x)$ die wechselseitige Entfernung der Punkte C und P, daher für die absolute Bewegung des Punktes P

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu (a_1 + ct - x), \text{ oder } \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu z, \text{ mit } x - (a_1 + ct) = z. \quad (1)$$

Die Integration giebt

$z = A \sin \sqrt{\mu}\, t + B \cos \sqrt{\mu}\, t$, d. i. $x = a_1 + ct + A \sin \sqrt{\mu}\, t + B \cos \sqrt{\mu}\, t$,

Mittelst der Bedingungen für die Anfangslage des Punktes P erhalten wir

$A = \frac{v_0 - c}{\sqrt{\mu}}$, $B = a_2 - a_1$, so dass

$$x = a_1 + ct + \frac{v_0 - c}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}\, t + (a_2 - a_1) \cos \sqrt{\mu}\, t.$$

$$v = c + (v_0 - c) \cos \sqrt{\mu}\, t - (a_2 - a_1) \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t.$$

Um die relative Bewegung des Punktes P gegen das Centrum C zu bestimmen, haben wir beiden Punkten die entgegengesetzte Geschwindigkeit des Punktes C beizulegen, damit C als fest erscheint, dann ist der relative Weg x_r und die relative Geschwindigkeit v_r des Punktes P offenbar

$$x_r = \frac{v_0 - c}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}\, t + (a_2 - a_1) \cos \sqrt{\mu}\, t - a_2.$$

$$v_r = (v_0 - c) \cos \sqrt{\mu}\, t - (a_2 - a_1) \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t.$$

Riccati, Bonon. Institut. Tom. VI, p. 138, 1783.

2. Die Verhältnisse seien dieselben wie bei der vorhergehenden Aufgabe, ausgenommen, dass die Beschleunigung jetzt repulsiv wirkt. Welches

ist die Lage und die Geschwindigkeit des Punktes P zu einer beliebigen Zeit t?

Die Gleichung für die Bewegung des Punktes P ist hier

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu(a_1 + ct - x), \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mu z, \text{ mit } x - (a_1 + ct) = z.$$

Die Integration giebt

$$z = A e^{\sqrt{\mu}t} + B e^{-\sqrt{\mu}t}, \quad \text{d. i. } x = a_1 + ct + A e^{\sqrt{\mu}t} + B e^{-\sqrt{\mu}t}.$$

Aus den Bedingungen für die Anfangslage des Punktes P folgt

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left\{(a_2 - a_1)\sqrt{\mu} + v_0 - c\right\}, \; B = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left\{(a_2 - a_1)\sqrt{\mu} - v_0 + c\right\},$$

so dass

$$x = a_1 + ct + \left\{(a_2 - a_1)\sqrt{\mu} + v_0 - c\right\}\frac{e^{\sqrt{\mu}t}}{2\sqrt{\mu}} + \left\{(a_2 - a_1)\sqrt{\mu} - v_0 + c\right\}\frac{e^{-\sqrt{\mu}t}}{2\sqrt{\mu}},$$

$$v = c + \frac{1}{2}\left\{(a_2 - a_1)\sqrt{\mu} + v_0 - c\right\}e^{\sqrt{\mu}t} - \frac{1}{2}\left\{(a_2 - a_1)\sqrt{\mu} - v_0 + c\right\}e^{-\sqrt{\mu}t}.$$

Riccati, Ibid. p. 151.

3. Ein Beschleunigungscentrum C bewegt sich in einer Geraden OA mit gleichförmiger Acceleration p und ein Punkt P wird in dieser Linie nach dem Centrum proportional der Entfernung beschleunigt. Wie ist die Bewegung des Punktes P beschaffen?

Zur Zeit $t = 0$ sei, mit dem festen Punkte O der Linie OA, $OC = a_1$, $OP = a_2$, c die Geschwindigkeit von C, v_0 diejenige von P, zur Zeit $t = t$ sei x der Abstand des Punktes P von O. Die wechselseitige Entfernung der Punkte C und P zur Zeit t ist $(a_1 + ct + \frac{1}{2}pt^2 - x)$, daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(a_1 + ct + \frac{1}{2}pt^2 - x), \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu z,$$

mit $(a_1 + ct + \frac{1}{2}pt^2 - x) = -z + \frac{p}{\mu}$.

Die Integration giebt

$$z = A \sin\sqrt{\mu}\,t + B \cos\sqrt{\mu}\,t,$$

d. i. $$x = a_1 + ct + \frac{1}{2}pt^2 - \frac{p}{\mu} + A \sin\sqrt{\mu}\,t + B \cos\sqrt{\mu}\,t.$$

Mit Berücksichtigung der Anfangswerte erhalten wir für die Integrationskonstanten $A = (v_0 - c) : \sqrt{\mu}$, $B = a_2 - a_1 + p : \mu$, so dass die absolute Bewegung des Punktes P gegeben ist durch

$$x = a_1 - \frac{p}{\mu} + ct + \frac{1}{2}pt^2 + \frac{v_0 - c}{\sqrt{\mu}} \sin\sqrt{\mu}\,t + \left(a_2 - a_1 + \frac{p}{\mu}\right)\cos\sqrt{\mu}\,t,$$

$$v = c + pt + (v_0 - c)\cos\sqrt{\mu}\,t - \left(a_2 - a_1 + \frac{p}{\mu}\right)\sin\sqrt{\mu}\,t.$$

Ferner ist für die relative Bewegung des Punktes P gegen C

$$x_r = -\frac{p}{\mu} + \frac{v_0 - c}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}\,t + \left(a_2 - a_1 + \frac{p}{\mu}\right)\cos\sqrt{\mu}\,t - a_2,$$

$$v_r = (v_0 - c)\cos\sqrt{\mu}\,t - \left(a_2 - a_1 + \frac{p}{\mu}\right)\sin\sqrt{\mu}\,t.$$

Riccati, Ibid. p. 168.

4. **Die Verhältnisse seien dieselben wie vorhin, aber die Centralbeschleunigung sei jetzt repulsiv. Wie ist die absolute Bewegung des Punktes P beschaffen?**

$$x = a_1 + \frac{p}{\mu} + ct + \frac{1}{2}pt^2 + \left\{\left(a_2 - a_1 - \frac{p}{\mu}\right)\sqrt{\mu} + (v_0 - c)\right\}\frac{e^{\sqrt{\mu}\,t}}{2\sqrt{\mu}}$$

$$+ \left\{\left(a_2 - a_1 - \frac{p}{\mu}\right)\sqrt{\mu} - (v_0 - c)\right\}\frac{e^{-\sqrt{\mu}\,t}}{2\sqrt{\mu}},$$

$$v = c + pt + \frac{1}{2}\left\{\left(a_2 - a_1 - \frac{p}{\mu}\right)\sqrt{\mu} + (v_0 - c)\right\}e^{\sqrt{\mu}\,t}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\left(a_2 - a_1 - \frac{p}{\mu}\right)\sqrt{\mu} - (v_0 - c)\right\}e^{-\sqrt{\mu}\,t}.$$

Riccati, Ibid. p. 182. 1—4. Walton, p. 231—232.

5. Ein Beschleunigungscentrum C transliert entlang der Geraden OA (Fig. 108, S. 277) mit gleichförmiger Geschwindigkeit c, ein Punkt P in ihr bewegt sich in der Richtung AO mit einer dem Centralabstand direkt proportionalen Acceleration. Zur Zeit $t = 0$ ist, wenn O einen festen Punkt der Linie AO bezeichnet, $OC = a_1$, $OP = a_2$, v_0 die Geschwindigkeit von P. Zur Zeit t sei $OP = x$. Die Bewegung erfolgt in einem Fluidum, dessen Widerstandsbeschleunigung der Geschwindigkeit des Punktes P direkt proportional ist, und es sei k die Widerstandsbeschleunigung für die Geschwindigkeitseinheit, μ die absolute Beschleunigung. Wie ist die Bewegung des Punktes P beschaffen?

Der wechselseitige Abstand der Punkte P und C zur Zeit t ist $(a_1 + ct - x)$, daher für die Bewegung des Punktes P, so lange als er in der Richtung OA stetig fortschreitet,

$$\frac{dv}{dt} = -\mu(a_1 + ct - x) - kv, \tag{1}$$

wo v die Geschwindigkeit von P in der Richtung OA zur Zeit t bezeichnet. Transliert dagegen P in der Richtung AO und wird v auch in dieser Richtung gewählt, dann ist

$$\frac{dv}{dt} = \mu(a_1 + ct - x) - kv,$$

welche Gleichung aus der ersteren mit $-v$ für $+v$ hervorgeht, so dass die (1) unter allen Umständen verwendbar ist, wenn wir annehmen, dass v das Richtungszeichen der Geschwindigkeit enthält. Weil nun $v = \frac{dx}{dt}$, so folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = \mu(x - a_1 - ct), \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + k\frac{dz}{dt} = \mu z,$$

mit $\left(x - a_1 - \frac{kc}{\mu} - ct\right) = z.$ (2)

Mit $z = Ae^{mt}$ haben wir $m^2 + km = \mu$, $m = -\frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\mu + k^2}$, und wenn wir noch schreiben $\gamma_1 = -\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\mu + k^2}$, $\gamma_2 = -\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\mu + k^2}$, auch beachten, dass $4\mu + k^2 > 0$ ist, erhalten wir als vollständiges Integral der (2)

$$z = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}.$$

Mithin ergiebt sich für die Lage und die Geschwindigkeit des Punktes P zu einer beliebigen Zeit t

$$x = a_1 + \frac{kc}{\mu} + ct + C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}, \tag{3}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = c + C_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 t}. \tag{4}$$

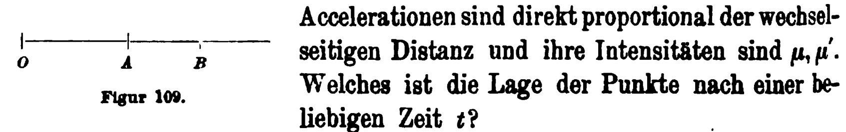
Zur Zeit $t = 0$ ist $x = a_2$, $v = v_0$, wodurch mit (3) und (4)

$$C_1 = \frac{v_0 - c - \left(a_2 - a_1 - \frac{kc}{\mu}\right)\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad C_2 = \frac{c - v_0 + \left(a_2 - a_1 - \frac{kc}{\mu}\right)\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Der sich für die geradlinige Bewegung eines Punktes im widerstehenden Mittel bei centraler Beschleunigung weiter interessierende Leser wird verwiesen auf Riccati, De motu rectilineo corporis attracti aut repulsi a centro mobili Disquisitio quarta. Comment. Bonon. Tom. VI, p. 212. 1783.

Walton, p. 243.

6. Zwei in gerader Linie fortschreitende Punkte A und B (Fig. 109) beschleunigen sich gegenseitig. Beide Punkte sind anfangs in Ruhe. Die Accelerationen sind direkt proportional der wechselseitigen Distanz und ihre Intensitäten sind μ, μ'. Welches ist die Lage der Punkte nach einer beliebigen Zeit t?



Figur 109.

Es sei O ein fester Punkt in der Linie der Bewegung, $OA = x$,

$OB = x'$ zu einer beliebigen Zeit t, dann ist für die Translation der Punkte A und B

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu(x' - x), \quad (1) \qquad \frac{d^2 x'}{dt^2} = -\mu'(x' - x). \quad (2)$$

Multiplizieren wir (1) mit μ', (2) mit μ und addieren die Resultate, so kommt

$$\mu' \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0.$$

Wenn nun zur Zeit $t = 0$, $x = a$, $x' = a'$, dann wird durch Integration, weil mit $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = 0$,

$$\mu' \frac{dx}{dt} + \mu \frac{dx'}{dt} = 0, \quad \mu' x + \mu x' = \mu' a + \mu a'. \tag{3}$$

Ferner ergiebt sich durch Subtraktion der (1) von der (2)

$$\frac{d^2}{dt^2}(x' - x) + (\mu + \mu')(x' - x) = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist mit C und ε als Integrationskonstanten

$$x' - x = C \cos\left\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t + \varepsilon\right\},$$

weil aber mit $t = 0$, $x = a$, $x' = a'$, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = 0$, so ist $a' - a = C \cos \varepsilon$, $0 = C \sin \varepsilon$, mithin

$$x' - x = (a' - a) \cos\left\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\right\}. \tag{4}$$

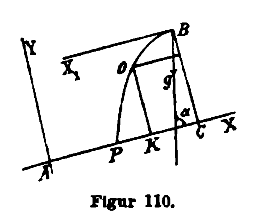
Jetzt erhalten wir leicht mit (3) und (4)

$$x = \frac{\mu' a + \mu a'}{\mu + \mu'} - \frac{\mu(a' - a)}{\mu + \mu'} \cos\left\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\right\}.$$

$$x' = \frac{\mu' a + \mu a'}{\mu + \mu'} + \frac{\mu(a' - a)}{\mu + \mu'} \cos\left\{\sqrt{\mu + \mu'}\, t\right\}.$$

Walton, p. 223.

7. In einer vertikalen Ebene bewegt sich von A aus (Fig. 110) ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit c geradlinig in der Richtung AX, welche eine Vertikalneigung α besitzt. Zu gleicher Zeit sinkt in dieser Ebene ein schwerer Punkt von B aus frei herab. Es soll die gegenseitige Bewegung der Punkte A und B ermittelt und bestimmt werden, wo der fallende Punkt die Gerade AX trifft, wenn diese in horizontaler Richtung eine konstante Geschwindigkeit besitzt.



Figur 110.

Wir wählen in der Ebene der Bewegung das Coordinatensystem so, dass A Ursprung, AX Abscissenaxe, die zu ihr senkrechte Linie AY Ordinatenaxe, machen $BC \perp AX$, setzen $AC = a$, $BC = b$. Indem wir

den Punkten B und A die Geschwindigkeiten c in den Richtungen $BX_1 \parallel XA$ und XA erteilt denken, gelangt A zur Ruhe und der Punkt B bewegt sich mittelst der Geschwindigkeit $-c$ und der Acceleration in einer parabolischen Curve BOP, welche seine relative Bahn ist. Die Projektionen der Beschleunigung g auf die Coordinatenaxen sind $-g \cos\alpha$, $-g \sin\alpha$, so dass, wenn die Coordinaten eines beliebigen Punktes O der relativen Bahn $AK = x$, $OK = y$ sind, für die relative Bewegung von B die Gleichungen bestehen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g \cos\alpha, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \sin\alpha,$$

ihre Integration giebt, weil mit $t = 0$, $x = a$, $y = b$, $\frac{dx}{dt} = -c$, $\frac{dy}{dt} = 0$,

$$v_x = -c - g \cos\alpha \,.\, t, \qquad v_y = -g \sin\alpha \,.\, t, \tag{1}$$

$$x = a - ct - \frac{1}{2} g \cos\alpha \,.\, t^2, \quad y = b - \frac{1}{2} g \sin\alpha \,.\, t^2. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) geben die relativen Geschwindigkeiten des Punktes B parallel zu den Coordinatenaxen, die Gleichungen (2) die Coordinaten seiner relativen Bahn; indem wir zwischen den (2) die Zeit eliminieren, gelangen wir zu der Gleichung der relativen Bahn

$$x = a - (b - y) \cot g\,\alpha - c \sqrt{\frac{2(b-y)}{g \sin\alpha}}. \tag{3}$$

Mit $y = 0$ ergiebt sich hieraus die Abscisse des Punktes P, in welchem die bewegliche Gerade AX von dem Punkte B getroffen wird, sie ist

$$x = a - b \cot g\,\alpha - c \sqrt{\frac{2b}{g \sin\alpha}}.$$

Aus (2) folgen für die Zeit die Relationen

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{g \cos\alpha} + \left(\frac{c}{g \cos\alpha}\right)^2} - \frac{c}{g \cos\alpha} = \sqrt{\frac{2(b-y)}{g \sin\alpha}}.$$

Bewegt sich der Punkt B in der Geraden AX, dann kann er entweder in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung wie der Punkt A translieren. Im ersten Falle ist $b = 0$, $\alpha = 0$, daher

$$t = \frac{1}{g}\left\{\sqrt{2(a-x)g + c^2} - c\right\},$$

so dass mit $x = 0$ die Zeit t_1, nach welcher die beiden Punkte zusammentreffen,

$$t_1 = \frac{1}{g}\left\{\sqrt{2ag + c^2} - c\right\}.$$

Wenn der Punkt B in der Linie AX dem Punkte A vorauseilt, dann ist $b = 0$, $\alpha = 180^0$, mithin die wechselseitige Entfernung der beiden Punkte zur Zeit t und die Zeit, nach welcher dieser Abstand die Strecke x beträgt

$$x = a - ct + \frac{1}{2} g t^2, \qquad t = \frac{1}{g}\left\{c \pm \sqrt{c^2 - 2(a-x)g}\right\}.$$

Die relative Geschwindigkeit des Punktes B gegen A ist $v_r = -c + gt = \frac{dx_r}{dt}$.

Damit x zu einem Maximum werde, muss $\frac{dx}{dt} = 0$ werden, die Zeit, wenn dieses eintritt, ist $t = \frac{c}{g}$, daher der Minimalabstand beider Punkte $x = a - \frac{c^2}{g}$. Für jeden anderen Wert von x giebt es zwei Werte für die Zeit, der eine ist grösser, der andere kleiner als $\frac{c}{g}$.

8. Das Centrum einer Beschleunigung transliert in einer Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer gegebenen Geraden. In dieser Ebene wird nach ihm ein Punkt proportional der Centraldistanz beschleunigt. Wie ist die Bewegung dieses Punktes beschaffen?

Die Anfangslage des Centrums nehmen wir als Ursprung des mit der Bewegungsebene zusammenfallenden Coordinatensystemes und geben dessen zu einander rechtwinkeligen Axen eine beliebige Lage. Zu einer beliebigen Zeit t, dieselbe vom Beginne der Bewegung an gerechnet, seien x', y' die Coordinaten des Centrums, x, y diejenigen des accelerierten Punktes P. α, β seien die Projektionen der Geschwindigkeit des Centrums auf die Coordinatenaxen, μ^2 bezeichne die absolute Beschleunigung. Damit sind die Bewegungsgleichungen des Punktes P

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu^2 (x' - x), \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu^2 (y' - y),$$

oder, weil $x' = \alpha t$, $y' = \beta t$,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu^2 (\alpha t - x), \quad (1) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu^2 (\beta t - y). \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - \alpha t) + \mu^2 (x - \alpha t) = 0,$$

so dass

$$x = A \cos \mu t + B \sin \mu t + \alpha t, \quad (3) \qquad \frac{dx}{dt} = -\mu (A \sin \mu t - B \cos \mu t) + \alpha. \quad (4)$$

Sind nun a und m die Anfangswerte von x und $\frac{dx}{dt}$, dann sind mit (3) und (4) die Werte der Integrationskonstanten $A = a$, $B = \frac{m - \alpha}{\mu}$, folglich ergiebt sich für die Bewegung des Punktes P parallel zur Abscissenaxe

$$x = a\cos\mu t + \frac{m-\alpha}{\mu}\sin\mu t + \alpha t, \quad (5) \qquad v_x = \alpha - a\mu\sin\mu t + (m-\alpha)\cos\mu t. \quad (6)$$

Genau auf demselben Wege erhalten wir mit (2), wenn l und n die Anfangswerte von y und $\frac{dy}{dt}$ bezeichnen, für die Bewegung des Punktes P parallel zur Ordinatenaxe

$$y = b\cos\mu t + \frac{n-\beta}{\mu}\sin\mu t + \beta t, \quad (7) \qquad v_y = \beta - b\mu\sin\mu t + (n-\beta)\cos\mu t. \quad (8)$$

Durch die Gleichungen (5) und (7) ist die absolute Bahn des Punktes P bestimmt, die Gleichungen (6) und (8) geben die Projektionen seiner Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen.

Um die relative Bewegung des Punktes P gegen C zu bestimmen, denken wir uns beiden Punkten noch die Geschwindigkeit $-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ erteilt, wodurch das Centrum C als fest erscheint, verwenden dieselben Coordinatenaxen, bezeichnen die Coordinaten des Punktes P mit ξ, η, dann ist, weil jetzt $x' = y' = 0$,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\mu^2\xi, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\mu^2\eta. \quad (9)$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich mit gehöriger Berücksichtigung der Anfangswerte

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\cos\mu t + \frac{m-\alpha}{\mu}\sin\mu t \\ \eta &= b\cos\mu t + \frac{n-\beta}{\mu}\sin\mu t \end{aligned}\right\} (10) \qquad \left.\begin{aligned} v_\xi &= (m-\alpha)\cos\mu t - a\mu\sin\mu t \\ v_\eta &= (n-\beta)\cos\mu t - b\mu\sin\mu t \end{aligned}\right\} (11)$$

und es ist die Gleichung der relativen Bahn des Punktes P, wenn wir aus (10) t eliminieren, dabei $m - \alpha = \alpha_1$, $n - \beta = \beta_1$ setzend,

$$(\beta_1\xi - \alpha_1\eta)^2 - \mu(b\xi - a\eta)^2 = (a\beta_1 - b\alpha_1)^2, \quad (12)$$

welche sonach eine Ellipse mit dem Mittelpunkte im Centrum ist, was sich aus dem Beschleunigungsgesetz sofort hätte folgern lassen.

Walton, p. 252.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Figur 111.

Ein Punkt P bewege sich in der Ebene XOY (Fig. 111), es sei die Gerade OX Axe der x, die zu ihr senkrechte Linie OY Axe der y, P die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit t, $PM \perp OX$, $OM = x$, $MP = y$. X, Y seien die Projektionen der Beschleunigung φ des Punktes P auf die Coordinatenaxen, X', Y' die Componenten der Widerstandsbeschleunigung durch die vorgeschriebene Bahn parallel

zu den Coordinatenaxen. Die Verhältnisse der Bewegung des Punktes hängen dann von den Differentialgleichungen ab

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X + X', \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = Y + Y'.$$

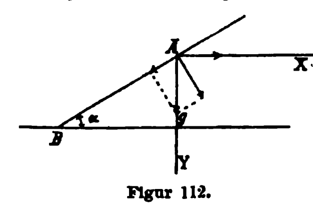
Die vollständige Lösung des Problemes der Bewegung eines Punktes besteht in der Bestimmung von x und y als Funktion der Zeit t. Die angeschriebenen Gleichungen enthalten ausser x und y noch die beiden unbekannten Grössen X' und Y', so dass die allgemeine Bedingung für die Bewegung uns nur zwei Gleichungen mit vier unbekannten Grössen giebt. Daher müssen in jedem besonderen Falle noch zwei weitere Gleichungen gegeben sein oder abgeleitet werden können, welche nur x, y, X', Y' enthalten.

Es sei r der Abstand OP des Punktes P zu einer beliebigen Zeit t vom Coordinatenursprunge, $\measuredangle POX = \vartheta$, dann können wir für den Fall, in welchem der Punkt P sich stets rechtwinkelig zu OP zu bewegen hat, wenn φ die Summe der Componenten der Beschleunigungen des Punktes entlang OP bezeichnet, aus obigen Gleichungen die Formel ableiten

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \varphi,$$

welche durch Ampère bekannt wurde. Annales de Gergonne, Tom. XX, p. 37 et sq.

1. Ein schwerer Punkt sinkt auf einer geneigten Ebene AB (Fig. 112) entlang einer Linie grössten Falles. Die geneigte Ebene besitzt eine Translationsbewegung parallel zu ihrer Basis, jede Linie grössten Falles bleibt dabei in einer vertikalen Ebene. Welches ist die absolute und die relative Bewegung des Punktes, wenn die Translationsbewegung a) gleichförmig, b) gleichförmig beschleunigt ist?



Figur 112.

a) Die Bewegung der geneigten Ebene ist gleichförmig. Es sei (Fig. 112) AB die Bahn des Punktes auf der Ebene, A seine Anfangslage und Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes, die horizontale Gerade AX Abscissen-, die vertikale Gerade AY Ordinatenaxe, α die Horizontalneigung der Ebene AB, c die konstante Horizontalgeschwindigkeit von AB in der Richtung AX.

Die Componenten der Beschleunigung g parallel und senkrecht zu AB sind $g \sin\alpha$ und $g \cos\alpha$, erstere erzeugt die Bewegung parallel zu AB, letztere die Widerstandsbeschleunigung senkrecht zu AB, die Projektionen der Beschleunigung $g \sin\alpha$ auf die Coordinatenaxen sind $-\frac{1}{2} g \sin 2\alpha$ und $g \sin^2\alpha$, daher bestehen für die absolute Bewegung des Punktes P die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{1}{2} g \sin 2\alpha, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = g \sin^2\alpha, \quad v_x = c, \; v_y = 0, \text{ wenn } t = 0.$$

Hiemit erhalten wir

$$v_x = c - \frac{1}{2} g \sin 2\alpha . t, \qquad v_y = g \sin^2 \alpha . t,$$

$$x = ct - \frac{1}{4} g \sin 2\alpha . t^2, \qquad y = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha . t^2,$$

und die Gleichung der absoluten Bahn des Punktes P ist

$$x^2 + 2 \cot g\, \alpha . xy + \cot g^2 \alpha . y^2 - \frac{2c^2}{\sin^2 \alpha} y = 0, \tag{1}$$

so dass er eine Parabel beschreibt.

Für die relative Bewegung des Punktes haben wir, wenn wir uns denken, dass sämtliche Punkte des Systemes noch die Geschwindigkeit $-c$ besitzen, wodurch die geneigte Ebene AB ruhend erscheint

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{2} g \sin 2\alpha, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = g \sin^2 \alpha, \quad v_x = -c, \quad v_y = 0, \text{ wenn } t = 0.$$

Damit ergiebt sich

$$v_x = -(c + \frac{1}{2} g \sin 2\alpha . t), \quad v_y = g \sin^2 \alpha . t,$$

$$x = -(ct + \frac{1}{4} g \sin 2\alpha . t^2), \quad y = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha . t^2,$$

$$x^2 + 2 \cot g\, \alpha . xy + \cot g^2 \alpha . y^2 - \frac{2c^2}{\sin^2 \alpha} y = 0. \tag{2}$$

Die relative Bahn des Punktes ist mithin auch eine Parabel. Die Gleichungen (1) und (2) sind identisch, die durch sie gegebene Parabel zerfällt durch den Anfangspunkt der Bewegung in zwei Teile, der eine giebt die absolute, der andere die relative Bahn des Punktes. Ist die Geschwindigkeit c von entgegengesetzter Richtung, dann geht die absolute Bahn in die relative über, und umgekehrt.

b) Die Bewegung der geneigten Ebene ist eine gleichförmig beschleunigte. Bezeichnet p die konstante Beschleunigung der Ebene AB in horizontaler Richtung, dann ist für die absolute Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{2} g \sin 2\alpha + p, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = g \sin^2 \alpha, \quad v_x = v_y = 0, \text{ wenn } t = 0.$$

Daraus folgt

$$v_x = (p - \frac{1}{2} g \sin 2\alpha) t, \qquad v_y = g \sin^2 \alpha . t,$$

$$x = \frac{1}{2} (p - \frac{1}{2} g \sin 2\alpha) t^2, \quad y = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha . t^2,$$

$$y = \frac{2 g \sin^2 \alpha}{2p - g \sin 2\alpha} x.$$

Die absolute Bahn ist mithin in diesem Falle eine gerade Linie.

Für die relative Bewegung bestehen die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{1}{2} g \sin 2\alpha + p\right), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g \sin^2\alpha, \quad v_x = v_y = 0, \text{ wenn } t = 0,$$

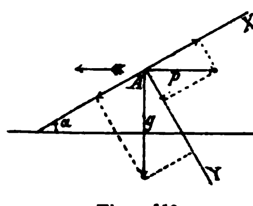
womit sich ergiebt

$$v_x = -(p + \frac{1}{2} g \sin 2\alpha) t, \qquad v_y = g \sin^2\alpha . t,$$

$$x = -\frac{1}{2}(p + \frac{1}{2} g \sin 2\alpha) t^2, \quad y = \frac{1}{2} g \sin^2\alpha . t^2,$$

$$y = -\frac{2 g \sin^2\alpha}{2p + g \sin 2\alpha} x,$$

so dass auch die relative Bahn eine gerade Linie ist.



Figur 113.

Es bewege sich jetzt die geneigte Ebene in entgegengesetzter Richtung mit der Beschleunigung p. A sei wieder Anfangspunkt der Bewegung und Coordinatenursprung (Fig. 113), aber die Falllinie AX Abscissen-, die zu ihr senkrechte Gerade AY Ordinatenaxe, dann sind die Gleichungen für die relative Bewegung des Punktes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p \cos\alpha - g \sin\alpha, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = p \sin\alpha, \quad v_x = v_y = 0, \text{ wenn } t = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$v_x = (p \cos\alpha - g \sin\alpha) t, \qquad v_y = p \sin\alpha . t,$$

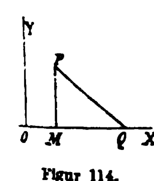
$$x = \frac{1}{2}(p \cos\alpha - g \sin\alpha) t^2, \quad y = \frac{1}{2} p \sin\alpha . t^2,$$

$$y = \frac{p \sin\alpha}{p \cos\alpha - g \sin\alpha} x.$$

Damit der Punkt eine horizontale Gerade beschreibt, muss die Bedingung erfüllt sein $p \cos\alpha - g \sin\alpha = 0$, für welchen Fall mithin die Gleichungen bestehen müssen

$$p = g \operatorname{tg}\alpha, \qquad v = g \operatorname{tg}\alpha . t, \qquad s = \frac{1}{2} g \operatorname{tg}\alpha . t^2.$$

2. Eine starre gerade Linie liegt auf einer glatten horizontalen Ebene. Ein Endpunkt dieser Linie ist genötigt, sich auf einer festen Geraden in dieser Ebene gleichförmig zu bewegen. Welches ist die Bewegung des anderen Endpunktes der Linie?



Figur 114.

Es sei OX (Fig. 114) die feste gerade Linie, OY eine in der Ebene zu OX rechtwinkelige Gerade, P die Lage des freien Endpunktes der starren Geraden PQ zu einer beliebigen Zeit t, $PM \perp OX$, $OM = x$, $MP = y$, $OQ = x'$, $PQ = a$, $\sphericalangle PQO = \vartheta$, p die Beschleunigung der Geraden PQ in ihrer Richtung.

Die Componenten der Spannungsbeschleunigung sind $X' = p\cos\vartheta$, $Y' = -p\sin\vartheta$, daher die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p\cos\vartheta, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -p\sin\vartheta.$$

Die Elimination von p aus diesen Relationen giebt

$$\sin\vartheta\frac{d^2x}{dt^2} + \cos\vartheta\frac{d^2y}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

Ferner ist, wenn c die gleichförmige Geschwindigkeit des Punktes Q und b dessen Anfangsabstand von O bezeichnet,

$$x' = x + a\cos\vartheta = ct + b, \tag{2}$$

so dass mit (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta = 0;\ \text{auch}\ \frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta,\ \text{weil}\ y = a\sin\vartheta. \tag{3}$$

Nun folgt aus (1), (2), (3)

$$\cos\vartheta\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta - \sin\vartheta\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt mit ω als Integrationskonstanten

$$\cos\vartheta\frac{d}{dt}\sin\vartheta - \sin\vartheta\frac{d}{dt}\cos\vartheta = \omega, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega.$$

Die Gerade PQ dreht sich daher mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.

Bezeichnet α den Anfangswert von ϑ, so folgt durch nochmalige Integration

$$\vartheta = \alpha + \omega t, \tag{4}$$

und es sind mit (2), (3), (4) die Coordinaten des Punktes P als Funktionen der Zeit

$$x = ct + b - a\cos(\alpha + \omega t), \qquad y = a\sin(\alpha + \omega t), \tag{5}$$

so dass mit (5), indem wir t eliminieren, die Bahngleichung des Punktes P

$$x = \frac{c}{\omega}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{a}\right) - \sqrt{a^2 - y^2} + b - \frac{c\alpha}{\omega}.$$

Die Gleichungen (2) und (4) versehen uns indessen mit der bequemeren Vorstellung von der Bewegung des Punktes P. Hiernach ist die Bewegung von P vollkommen veranschaulicht, wenn wir uns denken, dass er sich auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser a mit der konstanten Geschwindigkeit $a\omega$ bewegt, während dessen Mittelpunkt entlang OX mit einer konstanten Geschwindigkeit c fortschreitet. Die Bahn von P ist daher eine Trochoide.

Mittelst der Relation (5) ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2\sin(\alpha + \omega t),$$

folglich mit (4) und den ursprünglichen Bewegungsgleichungen

$$-a\,\omega^2 \sin(\alpha+\omega t) = -p \sin(\alpha+\omega t), \qquad p = a\,\omega^2,$$

so dass die Spannungsbeschleunigung der Geraden PQ während der ganzen Bewegung konstant ist.

Die vorliegende Aufgabe giebt ein Beispiel für die Klasse von Curven, welche Traktorien genannt werden. Diese Curven werden erzeugt durch den einen Endpunkt einer Geraden von bestimmter Länge, wenn der andere Endpunkt sich entlang einer gegebenen Curve mit gegebener Geschwindigkeit bewegt; die feste Curve wird die Direktrix genannt.

Diese Aufgabe bildete den Gegenstand einer Streitfrage zwischen Fontaine und Clairaut. Die durch Fontaine gegebene Lösung hing von der Annahme ab, dass die sich bewegende Gerade eine Tangente der Bahn des Punktes P sein würde, eine Voraussetzung, deren Irrtümlichkeit Clairaut erläuterte. Fontaine's Annahme würde zulässig sein für die Bewegung eines schweren Punktes auf einer vollkommen rauhen Ebene, wo seine Bewegung zerstört werden würde in dem Momente der Erzeugung.

Clairaut, Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1736, p. 4.
Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 1784. Walton, p. 351 et sq.

3. Eine geradlinige Röhre mit sehr kleinem kreisförmigem Querschnitte dreht sich um einen festen Punkt in ihrer Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einer horizontalen Ebene. In dieser Röhre befindet sich ein freier Punkt, dessen Bewegung bestimmt werden soll.

Es bezeichne r den Abstand des Punktes von der Drehaxe, ϑ den Winkel, durch welchen sich die Röhre nach der Zeit t, gerechnet vom Beginn der Bewegung an, gedreht hat. Zur Zeit $t=0$ sei $r=a$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ die Geschwindigkeit des Punktes in der Röhre. N bezeichne die Druckbeschleunigung zur Zeit t.

Für die absolute Bewegung des Punktes besteht die Gleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2 r, \qquad \text{wodurch} \qquad r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}. \qquad (1)$$

Mit (1) und den Werten von r, v zur Zeit $t=0$ ergiebt sich

$$A = (a\omega + v_0):2\omega, \qquad B = (a\omega - v_0):2\omega, \qquad \text{folglich ist}$$

$$2r\omega = (a\omega + v_0)e^{\omega t} + (a\omega - v_0)e^{-\omega t},$$

$$v = \frac{1}{2}\left\{(a\omega + v_0)e^{\omega t} - (a\omega - v_0)e^{-\omega t}\right\},$$

und mit $\omega t = \vartheta$ ist die Gleichung der absoluten Bahn des Punktes

$$2r\omega = (a\omega + v_0)e^{\vartheta} + (a\omega - v_0)e^{-\vartheta}.$$

Ferner haben wir für die Bewegung des Punktes in der Röhre

$$\frac{dv}{dt} = \omega^2 r, \quad \text{so dass} \quad \int_{v_0}^{v} v\,dv = \omega^2 \int_a^r r\,dr, \quad v^2 = v_0{}^2 + \omega^2(r^2 - a^2),$$

womit seine Geschwindigkeit in der Röhre bestimmt ist.

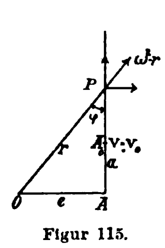
Die Druckbeschleunigung wird durch die den Punkt von seiner ge-

radlinigen Bahn ablenkende und senkrecht auf der Richtung der Geschwindigkeit v stehende Acceleration hervorgerufen. Von einer gewissen Stelle der Röhre an gerechnet legt der Punkt in einem Zeitelemente den Weg $v\,d\,t$ in der Richtung der Röhrenaxe zurück, während er zugleich den unendlich kleinen Bogen durchläuft, dessen Centriwinkel $\omega\,d\,t$, dessen Radius $v\,d\,t$, dessen Länge mithin $v\,\omega\,d\,t^2$ ist. Bezeichnet p die konstante Beschleunigung, mit welcher dieser Weg zurückgelegt werden kann, so ist $v\,\omega\,d\,t^2 = \frac{1}{2} p\,d\,t^2$, daher die Ablenkungsbeschleunigung $p = 2\,v\,\omega$ Weil ausser dieser Beschleunigung keine andere senkrecht zur Röhrenaxe wirkt, ist

$$N = p = 2\,v\,\omega = 2\,\omega \sqrt{v_0{}^2 + \omega^2 (r^2 - a^2)}.$$

Johann Bernoulli, Opera, Tom. IV, p. 248. Clairaut, Mém. Acad. Paris. 1742, p. 10. Walton, p. 353.

4. Eine geradlinige Röhre mit sehr kleinem Querschnitte, in welcher sich ein loser Punkt befindet, wird in einer horizontalen Ebene mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um einen Punkt O, dessen Abstand von der Röhrenaxe gleich e ist, gedreht. Wie ist die Bewegung des Punktes und die Druckbeschleunigung beschaffen?



Figur 115.

Es sei (Fig. 115) P die Lage des Punktes in der Röhre $A\,B$ zur Zeit t, $A\,P = x$, $O\,P = r$, A_0 sein Ort zur Zeit $t = 0$, für welche $v = v_0$, $A\,A_0 = a$, $\measuredangle\,A\,P\,O = \varphi$. Die Componenten der Beschleunigung $\omega^2 r$ zur Zeit t parallel und senkrecht zur Röhrenaxe sind $\omega^2 r \cos\varphi$, $\omega^2 r \sin\varphi$, von welchen die erstere die Bewegung des Punktes in der Röhre mit verursacht. Für die Geschwindigkeit des Punktes in der Röhre haben wir daher, beachtend, dass $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ ist,

$$\frac{d\,v}{d\,t} = \omega^2 r \cos\varphi = \omega^2 x, \qquad \text{oder} \qquad v \frac{d\,v}{d\,x} = \omega^2 x, \qquad \text{weil} \qquad \frac{d\,x}{d\,t} = v,$$

mithin
$$\int_{v_0}^{v} v\,d\,v = \omega^2 \int_a^x x\,d\,x, \qquad v^2 = v_0{}^2 + \omega^2 (x^2 - a^2).$$

Ferner haben wir zur Bestimmung des Weges des Punktes in der Röhre

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = \omega^2 x, \qquad \text{womit} \qquad x = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t},$$

oder, wenn die willkürlichen Konstanten mittelst der Bedingungen für die Anfangslage des Punktes bestimmt werden,

$$2\,\omega\,x = (a\,\omega + v_0)\,e^{\omega t} + (a\,\omega - v_0)\,e^{-\omega t}.$$

Da nun stets $r^2 = e^2 + x^2$ ist, so ergiebt sich für den Abstand des Punktes zur Zeit t von O

$$r^2 = \frac{t}{4\omega^2}\left\{(a\omega + v_0)e^{\omega t} + (a\omega - v_0)e^{-\omega t}\right\}^2 + e^2,$$

und die Polargleichung der vom Punkte P beschriebenen Bahn ist mit $\omega t = \vartheta$

$$4\omega^2 r = \left\{(a\omega + v_0)e^{\vartheta} + (a\omega - v_0)e^{-\vartheta}\right\}^2 + 4\omega^2 e^2.$$

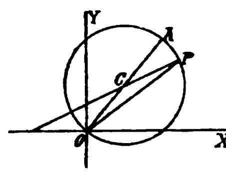
Die Grösse der Druckbeschleunigung bestimmt sich durch die Relation

$$N = 2v\omega + \omega^2 r \sin\varphi,$$

so dass mit dem Werte von v und $\sin\varphi = \frac{e}{r}$

$$N = \omega\left\{2\sqrt{v_0^2 + \omega^2(x^2 - a^2)} + \omega e\right\}.$$

5. Ein loser Punkt befindet sich in einer kreisförmigen Röhre von sehr kleinem Querschnitte, welche sich in einer horizontalen Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um einen festen Punkt ihres Umfanges dreht. Die Bewegung des Punktes ist zu untersuchen.



Figur 116.

Es sei (Fig. 116) O der Punkt, um welchen sich die Röhre OP dreht, C der Kreismittelpunkt, P die Lage des Punktes zur Zeit t, N die Druckbeschleunigung der Röhre, welche in der Richtung PC wirken wird. Die zu einander rechtwinkeligen Geraden OX, OY seien die Coordinatenaxen, x, y die Coordinaten des Punktes P. Wir setzen $\sphericalangle POX = \vartheta$, $\sphericalangle OPC = \varphi = \sphericalangle COP$, $OP = r$, $OC = a$.

Weil hier $X = 0$, $Y = 0$, so haben wir für die Bewegung des Punktes P die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\cos(\vartheta - \varphi), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -N\sin(\vartheta - \varphi).$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $\sin(\vartheta - \varphi)$, die zweite mit $\cos(\vartheta - \varphi)$ und subtrahieren die Resultate, so gelangen wir zu

$$\sin(\vartheta - \varphi)\frac{d^2x}{dt^2} - \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

wodurch, weil $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$,

$$\sin(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}(r\cos\vartheta) - \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}(r\sin\vartheta) = 0.$$

Nun ist $r = 2a\cos\varphi$, mithin auch

$$\sin(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}(\cos\vartheta\cos\varphi) - \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}(\sin\vartheta\cos\varphi) = 0.$$

$$\sin(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}\left\{\cos(\vartheta + \varphi) + \cos(\vartheta - \varphi)\right\}$$

$$- \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}\left\{\sin(\vartheta + \varphi) + \sin(\vartheta - \varphi)\right\} = 0.$$

Da ω die Winkelgeschwindigkeit des Diameters OCA des Kreises, so ist klar, wenn anfangs $\sphericalangle AOX = 0$, dass

$$\sphericalangle AOX = \vartheta + \varphi = \omega t. \tag{1}$$

Mithin erhalten wir, ωt für $(\vartheta + \varphi)$ schreibend,

$$\sin(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}\cos(\vartheta - \varphi) - \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}\sin(\vartheta - \varphi)$$

$$+ \sin(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t - \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d^2}{dt^2}\sin\omega t = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\sin(\vartheta - \varphi)\frac{d}{dt}\cos(\vartheta - \varphi) - \cos(\vartheta - \varphi)\frac{d}{dt}\sin(\vartheta - \varphi)\right\}$$

$$- \omega^2 \sin(\vartheta - \varphi)\cos\omega t + \omega^2\cos(\vartheta - \varphi)\sin\omega t = 0,$$

$$-\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta - \varphi) - \omega^2 \sin(\vartheta - \varphi - \omega t) = 0,$$

oder, weil $\vartheta = \omega t - \varphi$ ist,

$$2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin 2\varphi = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $2\frac{d\varphi}{dt}$ und integrieren, so folgt

$$2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \omega^2\cos 2\varphi = C. \tag{2}$$

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass anfangs der Punkt P mit dem Punkte A zusammenfällt und seine Geschwindigkeit in dieser Lage gleich Null ist. Wenn $t = 0$, ist $\varphi = 0$, und weil durch (1) $\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \omega$, ist anfangs $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, folglich mit (2) $C = \omega^2$, daher

$$2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \omega^2\cos 2\varphi = \omega^2, \quad 2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2(1 + \cos 2\varphi) = 2\omega^2\cos^2\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\cos\varphi, \qquad \omega\, dt = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 - \sin^2\varphi}.$$

Die Integration der letzten Gleichung giebt, bei welcher keine Konstante hinzuzufügen ist, weil φ und t gleichzeitig verschwinden,

$$l\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} = 2\omega t.$$

Durch diese Gleichung erhalten wir, wenn $\sphericalangle AOX = \psi$ gesetzt wird,

$$\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} = e^{2\omega t}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}}.$$

Mit $t = \infty$ wird $\sin\varphi = 1$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, welches der Grenzwert von φ ist. Daraus geht hervor, dass der Punkt erst nach einer unendlich grossen Zeit im Rotationsmittelpunkte O ankommen wird.

Ferner können wir, weil $r = 2\,a\cos\varphi$ ist, leicht bekommen

$$r = \frac{4\,a}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}} = \frac{4\,a}{e^{\psi} + e^{-\psi}},$$

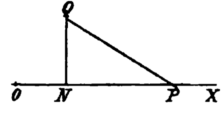
womit der Abstand des Punktes P von O zu einer beliebigen Zeit während der Bewegung bestimmt ist. Die letzte Gleichung ist die Polargleichung der Bahn des Punktes P.

Schliesslich ergiebt sich noch mittelst obiger Gleichungen für die einer beliebigen Lage des Punktes entsprechende Druckbeschleunigung

$$N = 2\,\omega^2\,a\cos\varphi\,(3\cos\varphi - 2).$$

Walton, p. 354.

6. Zwei Punkte P und Q (Fig. 117) sind durch eine unveränderliche Gerade PQ miteinander verbunden. P kann sich entlang einer horizontalen Geraden OX und Q in der durch OX gehenden horizontalen Ebene bewegen. Die anfänglichen Bewegungszustände beider Punkte sind gegeben und es soll ihre Bewegung erforscht werden.



Figur 117.

Lasse sein N die Spannungsbeschleunigung der Geraden PQ, ϑ die Neigung von PQ gegen OX zu einer beliebigen Zeit t, $QN \perp OX$, $ON = x'$, $QN = y'$, $OP = x$, wobei O ein fester Punkt in der Linie OX ist, $\omega =$ der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit von Q um P, $v_0 =$ der Anfangsgeschwindigkeit von P, $\alpha =$ dem Anfangswerte von ϑ, $a =$ der Länge der Geraden PQ.

Ausser der Spannungsbeschleunigung sind keine weiteren Accelerationen vorhanden, so dass für die Bewegung von P

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -N\cos\vartheta, \tag{1}$$

und für diejenige des Punktes Q

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = N\cos\vartheta, \quad (2) \qquad \frac{d^2 y'}{dt^2} = -N\sin\vartheta. \quad (3)$$

Die Addition der Gleichungen (1) und (2) giebt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0. \tag{4}$$

Multiplizieren wir (1) mit $\sin\vartheta$, (3) mit $\cos\vartheta$ und subtrahieren das letztere Resultat von dem ersteren, so folgt

$$\sin\vartheta\,\frac{d^2 x}{dt^2} - \cos\vartheta\,\frac{d^2 y'}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

Ferner bestehen die geometrischen Beziehungen

$$x' = x - a\cos\vartheta, \quad (6) \qquad y' = a\sin\vartheta. \quad (7)$$

Mit (4) und (6), sowie mit (5) und (7) ergiebt sich

$$2\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta = 0,\quad \sin\vartheta\frac{d^2x}{dt^2} - a\cos\vartheta\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta = 0,$$

und indem wir $\frac{d^2x}{dt^2}$ zwischen den beiden letzten Gleichungen eliminieren, folgt

$$2\cos\vartheta\frac{d^2}{dt^2}\sin\vartheta - \sin\vartheta\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta = 0.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $2\frac{d\vartheta}{dt}$ und nachherige Integration wird

$$2\left(\frac{d}{dt}\sin\vartheta\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\cos\vartheta\right)^2 = C.$$

Beim Beginn der Bewegung ist $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, mithin $C = (1 + \cos^2\alpha)\omega^2$, folglich

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2\frac{1 + \cos^2\alpha}{1 + \cos^2\vartheta}. \tag{8}$$

Weiter giebt die Integration von (4)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = C,$$

so dass vermöge (6)

$$2\frac{dx}{dt} + a\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = C.$$

Aber anfangs ist $\frac{dx}{dt} = v_0$, $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, mithin $C = 2v_0 + a\omega\sin\alpha$, weshalb

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{a\omega\sin\alpha}{2} - \frac{a\sin\vartheta}{2}\frac{d\vartheta}{dt} = v_x,$$

und indem wir den Wert von $\frac{d\vartheta}{dt}$ aus (8) entnehmen

$$v_x = v_0 + \frac{a\omega\sin\alpha}{2} - \frac{a\omega\sin\vartheta}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos^2\alpha}{1 + \cos^2\vartheta}}. \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) und (9) geben uns die Winkelgeschwindigkeit von Q um P und die Geschwindigkeit von P entlang OX als Funktionen der Neigung der Linie PQ gegen OX. Scheiden wir aus den Gleichungen (8) und (9) dt aus, so erhalten wir die Differentialgleichung der Bahn von Q in x und ϑ.

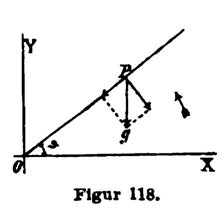
Mit (8) ergiebt sich noch

$$t = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \cos^2\alpha}}\int_\alpha^\vartheta \sqrt{1 + \cos^2\vartheta}\, d\vartheta,$$

eine elliptisch transcendente Funktion für die Bestimmung der Zeit, wenn der Wert von ϑ gegeben ist.

Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1736, p. 10.
Walton, p. 356.

7. Eine geradlinige Röhre von sehr kleinem Querschnitte dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um einen festen Punkt O ihrer Axe in einer vertikalen Ebene. Welches ist die Bewegung eines schweren Punktes in ihr?



Figur 118.

Es sei (Fig. 118) OA die Lage der Röhre zur Zeit t, die horizontale Gerade OX ihre Anfangslage, so dass $\measuredangle XOA = \vartheta = \omega t$, die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes gleich v_0, sein anfänglicher Abstand zur Zeit $t = 0$ von dem Punkte $O = a$, P seine Lage zur Zeit t. Die Gleichung für die Bewegung des Punktes ist

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \varphi.$$

Im vorliegenden Falle ist $r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = r\omega^2$, $\varphi = -g \sin\vartheta = -g \sin\omega t$, folglich

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r - g \sin\omega t.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t.$$

Weil zur Zeit $t = 0$, $r = a$, $\frac{dr}{dt} = v_0$, so sind die Werte der willkürlichen Konstanten $A = \frac{1}{2\omega}\left(a\omega + v_0 - \frac{g}{2\omega}\right)$, $B = \frac{1}{2\omega}\left(a\omega - v_0 + \frac{g}{2\omega}\right)$, und wir erhalten

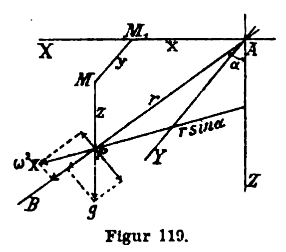
$$2\omega r = \left(a\omega + v_0 - \frac{g}{2\omega}\right)e^{\omega t} + \left(a\omega - v_0 + \frac{g}{2\omega}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{\omega}\sin\omega t, \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{2}\left(a\omega + v_0 - \frac{g}{2\omega}\right)e^{\omega t} - \frac{1}{2}\left(a\omega - v_0 + \frac{g}{2\omega}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}\cos\omega t. \quad (2)$$

Die (1) giebt mit $\omega t = \vartheta$ die Polargleichung der Bahn des Punktes, die (2) giebt die Geschwindigkeit des Punktes in der Richtung der Röhrenaxe als Funktion der Zeit, mit $\omega t = \vartheta$ als Funktion des Winkels ϑ.

8. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einer sehr engen geradlinigen Röhre, welche um eine vertikale Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω eine Kreiskegelfläche beschreibt. Wie ist die Bewegung des Punktes beschaffen?

Die Spitze A der Kegelfläche (Fig. 119, S. 296) sei Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes, die Axe der z falle mit der Drehaxe zusammen und sei vertikal abwärts positiv, die Axe der x liege in der


Figur 119.

vertikalen Ebene durch die Anfangslage der Röhre AB, die Axe der y ist senkrecht auf den Axen der z und der x, die Vertikalneigung der Röhre sei gleich α. Ferner sei P die Lage des Punktes zur Zeit t, $AP = r$, PM senkrecht zur Ebene XAY, $MM_1 \perp AX$, $AM_1 = x, M_1M = y$. $MP = z$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der schwere Punkt in A und seine Geschwindigkeit sei daselbst gleich Null.

An dem Punkte P wirken die Fallbeschleunigung g und die Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 u$, erstere vertikal abwärts, letztere in horizontaler Richtung. Die Componenten dieser Beschleunigungen in der Richtung der Röhrenaxe und senkrecht dazu sind $g \cos\alpha$ und $\omega^2 u \sin\alpha = \omega^2 r \sin^2\alpha$, so wie $g \sin\alpha$ und $- \omega^2 u \cos\alpha = - \omega^2 r \sin\alpha \cos\alpha$, die Summe der ersteren giebt die Beschleunigung des Punktes in der Richtung der Röhrenaxe, die Summe der letzteren die Druckbeschleunigung, welche auf die Bewegung keinen Einfluss hat. Mithin erhalten wir für die Bewegung des Punktes in der Röhre

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \omega^2 \sin^2\alpha \,.\, r + g \cos\alpha. \tag{1}$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$r = A e^{\omega \sin\alpha \cdot t} + B e^{-\omega \sin\alpha \cdot t} - \frac{g \cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}.$$

Mit Berücksichtigung der Bedingungen für die Anfangslage des Punktes finden wir $A = B = \frac{g \cos\alpha}{2\,\omega^2 \sin^2\alpha}$, so dass

$$r = \frac{g \cos\alpha}{2\,\omega^2 \sin^2\alpha}\left(e^{\sin\alpha \cdot \omega t} + e^{-\sin\alpha \cdot \omega t} - 2\right),$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{g}{2\,\omega} \operatorname{cotg}\alpha \left(e^{\sin\alpha \cdot \omega t} - e^{-\sin\alpha \cdot \omega t}\right).$$

Setzen wir jetzt $\omega t = \vartheta$, und berücksichtigen, dass $x = u \cos\vartheta = r \sin\alpha \cos\vartheta$, $y = u \sin\vartheta = r \sin\alpha \sin\vartheta$, $z = r \cos\alpha$, dann sind die Coordinaten des Punktes P als Funktionen des Winkels ϑ, oder mit $\vartheta = \omega t$ als Funktionen der Zeit

$$x = \frac{g}{2\,\omega^2} \operatorname{cotg}\alpha \cos\vartheta \left(e^{\sin\alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin\alpha \cdot \vartheta} - 2\right),$$

$$y = \frac{g}{2\,\omega^2} \operatorname{cotg}\alpha \sin\vartheta \left(e^{\sin\alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin\alpha \cdot \vartheta} - 2\right),$$

$$z = \frac{g}{2\,\omega^2} \operatorname{cotg}^2\alpha \left(e^{\sin\alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin\alpha \cdot \vartheta} - 2\right).$$

Die Druckbeschleunigung ist

$$N = (g - \omega^2 r \cos\alpha) \sin\alpha,$$

sie ist nicht konstant während der Bewegung des Punktes, so lange als $g > \omega^2 r \cos\alpha$ wirkt sie abwärts, in dem Augenblicke wo $r = \frac{g}{\omega^2 \cos\alpha}$ ist sie gleich Null, und wenn $g < \omega^2 r \cos\alpha$, wirkt sie aufwärts.

Ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$, dann geben die Formeln für r und $\frac{dr}{dt}$ zunächst die Werte ∞, jedoch lassen sie sich leicht auf diesen Spezialfall zurückführen. Schreiben wir

$$\frac{dr}{dt} = \frac{g \cot g\, \alpha}{2} \frac{e^{\sin\alpha \cdot \omega t} - e^{-\sin\alpha \cdot \omega t}}{\omega} = \frac{F(\omega)}{f(\omega)}, \text{ so wird } \frac{F(0)}{f(0)} = \frac{0}{0}.$$

Nun ist $\frac{F'(\omega)}{f'(\omega)} = \frac{g \cos\alpha}{2} \cdot t\,(e^{\sin\alpha \cdot \omega t} + e^{-\sin\alpha \cdot \omega t})$, also $\frac{F'(0)}{f'(0)} = g \cos\alpha \,.\, t.$

daher $\frac{dr}{dt} = v_r = g \cos\alpha \,.\, t$, $r = \frac{1}{2} g \cos\alpha \,.\, t^2$, welches die Gleichungen für die Bewegung eines schweren Punktes auf einer geneigten Geraden sind.

Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir die Bewegung eines Punktes in einer Röhre, welche sich in einer horizontalen Ebene um einen festen Punkt ihrer Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht, wir bekommen sofort dafür

$$r = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}.$$

9. Ein Punkt wird entlang einer Ebene geworfen, welche sich um eine horizontale Axe in ihr mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Welches ist die Bewegung des Punktes?

Zählen wir die x parallel zur Drehaxe, ist r der Abstand des Punktes von derselben zur Zeit t, dann werden wir finden

$$x = A + Bt, \qquad r = Ce^{\omega t} + De^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t.$$

10. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einer vertikalen Ebene, welche sich um eine vertikale Axe in ihr mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Wie ist die Bewegung des Punktes beschaffen?

Die Rotationsaxe sei Axe der z und diese positiv vertikal abwärts. Zur Zeit t sei r der Abstand des schweren Punktes von der Axe der z. Zur Zeit $t = 0$ sei $z = 0$, $\frac{dz}{dt} = \beta$, $r = a$, $\frac{dr}{dt} = \alpha$.

Die auf den Punkt wirkenden Beschleunigungen parallel zu den Coordinatenaxen sind $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, ausserdem ist noch die Centrifugalbeschleunigung in horizontaler Richtung thätig, so dass die zwei Bewegungsgleichungen bestehen

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = g, \qquad \frac{d^2 r}{d t^2} = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2 r.$$

Durch Integration dieser Gleichungen erhalten wir mit Berücksichtigung der für die zur Zeit $t = 0$ gegebenen Bewegungsverhältnisse

$$v_z = \beta + g t, \qquad v_r = \frac{1}{2}\{(a\omega + \alpha)e^{\omega t} - (a\omega - \alpha)e^{-\omega t}\},$$

$$z = \beta t + \frac{1}{2} g t^2, \quad (1) \qquad 2\omega r = (a\omega + \alpha)e^{\omega t} + (a\omega - \alpha)e^{-\omega t}. \quad (2)$$

Die Bewegung des Punktes ist demnach in vertikaler Richtung eine gleichförmig beschleunigte. Eliminieren wir aus (1) und (2) die Zeit, so gelangen wir zur Gleichung der Bahn des Punktes in seiner Ebene. Aus (1) folgt

$$t = \frac{1}{g}\{\sqrt{\beta^2 + 2 g z} - \beta\}. \quad (3)$$

Die (2) giebt

$$2\omega r e^{\omega t} = (a\omega + \alpha)e^{2\omega t} + (a\omega - \alpha), \quad e^{2\omega t} - \frac{2\omega r}{a\omega + \alpha}e^{\omega t} = -\frac{a\omega - \alpha}{a\omega + \alpha},$$

$$e^{\omega t} = \frac{r\omega}{a\omega + \alpha} + \sqrt{\frac{r\omega^2 - (a\omega + \alpha)(a\omega - \alpha)}{(a\omega + \alpha)^2}} = \frac{r\omega + \sqrt{(r^2 - a^2)\omega^2 + \alpha^2}}{a\omega + \alpha},$$

$$t = \frac{1}{\omega} l \frac{r\omega + \sqrt{(r^2 - a^2)\omega^2 + \alpha^2}}{a\omega + \alpha}, \quad (4)$$

so dass durch (3) und (4) die genannte Gleichung

$$l \frac{r\omega + \sqrt{(r^2 - a^2)\omega^2 + \alpha^2}}{a\omega + \alpha} = \frac{\omega}{g}\{\sqrt{\beta^2 + 2 g z} - \beta\}.$$

Diese und ähnliche Aufgaben lassen sich auch mittelst des Prinzipes von D'Alembert lösen, was später geschehen wird.

11. Ein Punkt ist an das eine Ende eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens gefesselt. Der Faden ist mittelst seines anderen Endes fest mit einer kreisförmigen Platte verbunden und vollständig um deren Umfang gewunden. Jeder Punkt der Platte stösst den beweglichen Punkt mit einer Beschleunigung zurück, welche der Entfernung verkehrt proportional ist. Wie gross ist die Geschwindigkeit v des Punktes zu einer beliebigen Zeit t nach dem Verlassen der Platte?

Es sei a der Halbmesser der Lamina, r der Abstand des Punktes von ihrem Centrum zur Zeit t, p die anfängliche Repulsivbeschleunigung, ϱ die freie Länge des Fadens zur Zeit t. Damit haben wir

$$v^2 = C + 2\int \frac{ap}{r} dr = C + a p\, l(r^2) = C + a p\, l(\varrho^2 + a^2).$$

Zur Zeit $t = 0$, ist $v = 0$, $\varrho = 0$, mithin $C = -a p\, l(a^2)$, folglich

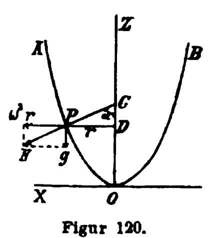
$$v^2 = a p\, l \frac{\varrho^2 + a^2}{a^2}.$$

Bezeichnet ϑ den Centriwinkel des Bogens des Plattenumfanges, von dem der Faden in der Zeit t abgewickelt worden ist, dann ist $\varrho = a\vartheta$, wodurch auch

$$v^2 = a p l (1 + \vartheta^2).$$

Walton, p. 359.

12. Eine in einer vertikalen Ebene gelegene Curve dreht sich um eine vertikale Axe in dieser Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Auf der Curve befindet sich ein schwerer Punkt. In welcher Lage ist der Punkt in relativer Ruhe? Wie muss die Curve beschaffen sein, damit der Punkt in jeder Lage in relativer Ruhe sein kann?



Figur 120.

AOB (Fig. 120) sei die Curve, OZ die Drehaxe, $OX \perp OZ$ in der Ebene der Curve Abscissenaxe, P eine beliebige Lage des schweren Punktes, $PD \perp OZ$ gleich x. Die auf den Punkt P wirkenden Accelerationen sind g und $\omega^2 x$, welche parallel zu den Coordinatenaxen gerichtet sind. Damit in P die Geschwindigkeit entlang der Curve gleich Null, muss offenbar die Resultante aus g und $\omega^2 x$ mit der Richtung der Curvennormalen für den Punkt P zusammenfallen. Bezeichnet α die Vertikalneigung der Richtung der Resultanten, l die Länge der Normalen PC, dann muss sein $\omega^2 x : g = tg\,\alpha$, und weil $x = l \sin \alpha$,

$$l \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2}.$$

Weil $l \cos \alpha = CD$ die Länge der Subnormalen für den Curvenpunkt P, so folgt der Satz: Der Punkt befindet sich in relativer Ruhe, wenn die Subnormale des entsprechenden Curvenpunktes gleich ist dem Quotienten aus der Fallbeschleunigung und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit um die Drehaxe. Für den Kreisbogen ist l konstant, gleich seinem Halbmesser a, so dass in solchem Falle $\cos \alpha = \frac{z}{a} = \frac{g}{a\omega^2}$, $z = \frac{g}{\omega^2}$, womit der Abstand des relativen Ruhepunktes von der Horizontalebene durch den Kreismittelpunkt bestimmt ist; er ist von dem Radius des Kreisbogens unabhängig.

Damit der schwere Punkt bei jeder Lage in relativer Ruhe sein kann, muss die Bedingung erfüllt sein $l \cos \alpha = Konst.$ für die ganze Curve. Diese Eigenschaft kommt der Parabel zu, ihre Subnormale ist gleich ihrem Halbparameter p, so dass mit $l \cos \alpha = p$, $p = \frac{g}{\omega^2}$ sein muss, und die Gleichung der verlangten Curve $x^2 = 2pz = 2\frac{g}{\omega^2}z$ ist.

13. Ein schwerer Punkt befindet sich innerhalb einer sphärischen Fläche an ihrer tiefsten Stelle. Der sphärischen Fläche wird eine solche horizontale Bewegung erteilt, dass ihre Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit gleich derjenigen eines dieselbe Zeit frei fallenden Punktes ist. Auf welche Höhe kann der schwere Punkt steigen?

Der Punkt steigt bis zur horizontalen Ebene durch den Kugelmittelpunkt.

Griffin, Solutions of the Examples on the Motion of a Rigid Body, p. 85.

14. Ein Punkt bewegt sich in einer sehr engen, geradlinigen Röhre, welche in einer horizontalen Ebene um einen festen Punkt O ihrer Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Wenn OP parallel und proportional zu der Druckbeschleunigung der Röhre auf den Punkt gezogen wird, zu finden die Gleichung des Ortes von P.

Ist ϑ die Neigung von OP zu irgend einer gegebenen Lage der Röhre, sind α und β gewisse Konstante, dann ist die Ortsgleichung von P

$$OP = \alpha e^{\vartheta} + \beta e^{-\vartheta}.$$

15. Zwei durch eine unveränderliche gerade Linie verbundene Punkte werden entlang einer horizontalen Ebene geworfen. Wie ist die Bewegung dieser Punkte beschaffen?

Die Coordinatenebene falle mit der Ebene der Bewegung zusammen. Beim Beginn der Bewegung habe der Mittelpunkt der Geraden die Coordinaten a, b und die Projektionen seiner Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen seien m, n. Ferner bezeichne ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Geraden, ϑ ihre Neigung zur Axe der x am Ende der Zeit t, ε dieselbe beim Beginn der Bewegung. Damit sind die Coordinaten des Mittelpunktes der Geraden als Funktionen der Zeit

$$x = mt + a, \qquad y = nt + b,$$

und die Neigung der Geraden gegen die Abscissenaxe ist

$$\vartheta = \omega t + \varepsilon.$$

Clairaut, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1736, p. 7.
Euler, Acta Acad. Petrop, 1780, P. 1. Opuscula, De motu corporum flexibilium, Tom. III, p. 91.

16. Eine kreisförmige Röhre dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihren vertikalen Durchmesser. Ein Punkt in ihr bleibt an derjenigen Stelle in relativer Ruhe, deren Mittelpunktsabstand die Vertikalneigung α besitzt. Zu finden die Länge l des entsprechenden isochronen einfachen Pendels für Oszillationen des schweren Punktes, wenn er unbedeutend aus seiner relativen Ruhelage verschoben wird und a den Radius des Kreises bezeichnet.

$$l = a \cot g\, \alpha \operatorname{cosec} \alpha.$$

17. Eine sehr enge Röhre von der Form einer Cardioide mit der Axenlänge $2a$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{g}{a}}$ um ihre vertikale Axe, und es ist ihre Spitze ihr höchster Punkt. Von der tiefsten Stelle der Röhre aus wird in ihr ein schwerer Punkt mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3ag}$ geworfen. Welche Maximalhöhe wird der Punkt erreichen?

Der Punkt hat seine grösste Höhe erreicht, wenn er sich in der durch die Spitze gehenden Horizontalebene befindet.

18. Ein Punkt fällt aus der Ruhe nach einem festen Centrum mit einer seinem Centralabstande direkt proportionalen Beschleunigung; er befindet sich dabei in einer sehr engen, geradlinigen Röhre, welche durch das Centrum geht und in einer Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Welches ist die Gleichung der Bahn des Punktes, wenn μ die absolute Beschleunigung, a, die anfängliche Centraldistanz des Punktes, genommen als Primradiusvektor?

$$r = \frac{1}{2} a \left\{ e^{\sqrt{\omega^2 - \mu}\frac{\vartheta}{\omega}} + e^{-\sqrt{\omega^2 - \mu}\frac{\vartheta}{\omega}} \right\}, \qquad \text{oder} \qquad r = a \cos \left\{ \sqrt{\mu - \omega^2}\, \frac{\vartheta}{\omega} \right\},$$

je nachdem $\mu \lesseqgtr \omega^2$ ist. Mit $\mu = \omega^2$ wird die Bahn ein Kreis.

19. Ein Punkt P ist an dem einen Ende einer unveränderlichen auf einer horizontalen Ebene liegenden Geraden PQ befestigt. Das Ende Q ist genötigt, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Umfange eines festen Kreises ABQ in dieser Ebene zu bewegen. Zu finden die Geschwindigkeit des Wachstums des Winkels PQR, welchen die Gerade PQ mit dem Strahle OQR, wobei O der Mittelpunkt des Kreises ist, einschliesst.

Wenn $PQ = h$, $OQ = a$, $\measuredangle PQR = \psi$ zu einer beliebigen Zeit t, $\psi = \alpha$, $\frac{d\psi}{dt} = \beta$ mit $t = 0$, $\omega =$ der Winkelgeschwindigkeit von OQ, dann ist

$$h \left\{ \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \beta^2 \right\} = 2\, a\, \omega^2 (\cos \psi - \cos \alpha).$$

Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1736, p. 14.

20. QBA ist ein Kreis in einer horizontalen Ebene, QP ein ihn in dem Punkte Q berührender vollkommen biegsamer Faden, welcher in Q befestigt ist. P ist ein an das freie Fadenende gefesselter Punkt. Der Punkt P wird in der Ebene des Kreises senkrecht zu QP mit einer gegebenen Geschwindigkeit v_0 geworfen, so dass QP sich allmählich um den Umfang des Kreises wickelt. Wie gross ist die Geschwindigkeit v des Punktes zu einer beliebigen Zeit während der Bewegung und die Zeit T, welche bis zur Ankunft des Punktes P auf dem Kreise verfliesst, wenn l die Länge des Fadens QP und a der Radius des Kreises ist?

$$v = v_0, \qquad T = \frac{l^2}{2\, a v_0}.$$

21. Zwei durch eine unveränderliche Gerade verbundene Punkte A, B befinden sich in einer engen geradlinigen Röhre, welche sich um eine vertikale Axe durch einen Punkt ihrer Mittellinie mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Der Punkt C liegt anfangs zwischen A und B in den Abständen a und b von A und B und ist $a < b$. Nach welcher Zeit t kommt der Punkt A in C an? Wie gross ist die Spannungsbeschleunigung N der Geraden AB zu einer beliebigen Zeit?

$$t = \frac{1}{\omega}\, l \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}; \qquad N = \frac{1}{2}\, \omega^2 (a + b).$$

22. Ein schwerer Punkt ist plaziert worden an einer gewissen Stelle einer geraden Linie in einer horizontalen Ebene von unbeschränkter Ausdehnung. Die Ebene

beginnt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um diese Linie als Rotationsaxe sich zu drehen. Nach welcher Zeit t verlässt der Punkt die Ebene?

Die geforderte Zeit folgt aus der Gleichung

$$4 \cos \omega t = e^{\omega t} + e^{-\omega t}.$$

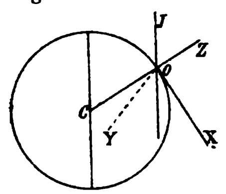
Diese Aufgabe wurde in The Lady's Diary für das Jahr 1778 von John Landon gegeben, welcher eine besonders mangelhafte Lösung mitteilte, denn er vernachlässigte nicht allein die Centrifugalbeschleunigung, sondern nahm auch an, dass die Horizontalgeschwindigkeit des Punktes gleich dem Produkte aus seiner Geschwindigkeit entlang der Ebene und dem Cosinus der Horizontalneigung der Ebene sei. Siehe: Diarian Repository, p. 512, woselbst eine korrekte Lösung durch die Verfasser des Repository in Verbindung mit derjenigen Landen's gegeben ist.

13—22. Walton, p. 360 et sq.

Dritter Abschnitt.

Relative Bewegung eines schweren Punktes in der Nähe der Oberfläche der Erde.

Berücksichtigen wir die Rotationsbewegung der Erde, so ist die Bewegung eines schweren Punktes in der Nähe ihrer Oberfläche eine etwas andere als in den früher betrachteten Fällen, wo angenommen wurde, dass die Erde fest sei. Um zunächst allgemein die Gleichungen für die Bewegung eines schweren Punktes in der Nähe der Erdoberfläche aufzustellen, beziehen wir die Bewegung auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Axen mit der Erde fest verbunden sind, also sich mit ihr bewegen.



Figur 121.

Es sei (Fig. 121) O ein beliebiger Punkt auf der Erdoberfläche, dessen Breite λ ist, unter λ also den Winkel verstanden, welchen die Normale der ruhigen Meeresoberfläche in O mit der Ebene des Äquators einschliesst. Die durch O gehende Axe der z sei vertikal und positiv in der der Fallbeschleunigung entgegengesetzten Richtung. Die Axen der x und y seien resp. eine Tangente in O an den Meridian durch O und eine Senkrechte zu ihr, positiv genommen nach Süd und nach West resp. In der Figur ist die Axe der y punktiert, um anzudeuten, dass sie senkrecht zu der Ebene des Papieres ist. ω sei die Winkelgeschwindigkeit der Erde, b der Abstand des Punktes O von der Rotationsaxe.

Den Punkt O können wir in die Ruhe durch Anbringung einer Acceleration $-\omega^2 b$, welche gleich und entgegengesetzt gerichtet zu derjenigen des Punktes O, und einer Geschwindigkeit $-\omega b$, welche gleich und von entgegengesetzter Richtung derjenigen des Punktes O, zurückführen. Dadurch dreht sich die ganze Figur um eine zur Rotationsaxe der Erde parallele Axe OJ mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Wird nun ein Punkt von O aus geworfen, so wirkt auf ihn die Attraktionsbeschleunigung und die angebrachte Beschleunigung $\omega^2 b$. Diese Anziehungsbeschleunigung ist nicht das, was wir Fallbeschleunigung nennen. Die Fallbeschleunigung ist die Resultante aus der Attraktionsbeschleunigung der Erde und der Centrifugalbeschleunigung, und die Erde ist von solcher Gestalt, dass diese Resultante senkrecht zur ruhigen Meeresfläche wirkt. Wenn es nicht so wäre, dann würden die auf der

Erde ruhenden Körper geneigt sein, entlang ihrer Oberfläche zu gleiten. Es geht daraus hervor, dass die auf den Punkt wirkende Beschleunigung, nachdem O in die Ruhe zurückgeführt worden ist, gleich der Fallbeschleunigung ist, welche wir mit g bezeichnen. Überdies können noch andere Accelerationen auf den Punkt wirken und seien die Summen ihrer Componenten parallel zu den Coordinatenaxen X, Y, Z.

Weil die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich um OJ dreht, so ist deren Componente um OZ gleich $\omega \sin \lambda$, indem der Winkel JOZ das Complement von λ ist. Weil die Rotation der Erde von West nach Ost erfolgt, so ist die Componente der Winkelgeschwindigkeit von y nach x, welches die negative Richtung ist, $\vartheta_3 = -\omega \sin \lambda$. Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um OX ist gleich $\omega \cos \lambda$, ihre Richtung geht von y nach z, welche positiv ist, folglich ist $\vartheta_1 = \omega \cos \lambda$. Noch haben wir, weil OJ senkrecht auf OY steht, $\vartheta_2 = 0$. Mithin bestehen für die wirklichen Geschwindigkeiten eines Punktes mit den Coordinaten x, y, z parallel zu den Axen die Gleichungen

$$u = \frac{dx}{dt} + \omega \sin \lambda \,.\, y, \qquad v = \frac{dy}{dt} - \omega \cos \lambda \,.\, z - \omega \sin \lambda \,.\, x, \qquad w = \frac{dz}{dt} + \omega \cos \lambda \,.\, y.$$

Nun sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{du}{dt} - v\,\vartheta_3 + w\,\vartheta_2, \qquad Y = \frac{dv}{dt} - w\,\vartheta_1 + u\,\vartheta_3, \\ Z &= \frac{dw}{dt} - u\,\vartheta_2 + v\,\vartheta_1, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

und es ist nur nötig, um die Gleichungen für die Bewegung im vorliegenden Falle zu erhalten, obige Werte in dieselben einzuführen. Die resultierenden Gleichungen können dadurch vereinfacht werden, dass wir solche kleine Grössen vernachlässigen, wie die Differenz der Fallbeschleunigung in verschiedenen Höhen. Wenn a den Äquatorialhalbmesser der Erde, g' die Beschleunigung der Schwere in einer Höhe z bezeichnet, so ist annähernd $g' = g\left(1 - \frac{2z}{a}\right)$. Nun ist $\omega^2 a$ die Centrifugalbeschleunigung am Äquator, welche bekanntlich gleich $\frac{1}{289} g$ ist. Folglich müssen wir, wenn wir das kleine Glied $g\frac{2z}{a}$ nicht beachten, auch $\omega^2 z$ vernachlässigen. Dadurch erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\omega \sin \lambda \cdot \frac{dy}{dt} = X, \\ &\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\omega \cos \lambda \cdot \frac{dz}{dt} - 2\omega \sin \lambda \cdot \frac{dx}{dt} = Y, \\ &\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\omega \cos \lambda \cdot \frac{dy}{dt} = -g + Z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wobei X, Y, Z alle an dem Punkte wirkenden Beschleunigungen ausser der Fallbeschleunigung einschliessen. Diese Gleichungen stimmen mit den von Poisson gegebenen überein. (Journal Polytechnique, 1838.)

In vielen Fällen wird es bequemer sein, die Bewegung auf Axen zu beziehen, welche eine allgemeinere Lage besitzen. Es sei O der Ursprung und die Axen seien relativ fest zu der Erde, aber in irgend welchen Richtungen rechtwinkelig zu einander. $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ seien die Componenten von ω um diese Axen, welche dann bekannte Konstante sind. Weil nun die Gleichungen bestehen

$$u = \frac{dx}{dt} - y\,\vartheta_3 + z\,\vartheta_2, \quad v = \frac{dy}{dt} - z\,\vartheta_1 + x\,\vartheta_3, \quad w = \frac{dz}{dt} - x\,\vartheta_2 + y\,\vartheta_1,$$

so geben dieselben in Verbindung mit den Gleichungen (α)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}\vartheta_3+2\frac{dz}{dt}\vartheta_2&=X,\\ \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dz}{dt}\vartheta_1+2\frac{dx}{dt}\vartheta_3&=Y,\\ \frac{d^2z}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}\vartheta_2+2\frac{dy}{dt}\vartheta_1&=Z-g.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Diese Gleichungen können in irgend einem besonderen Falle durch die Methode der kontinuierlichen Annäherung gelöst werden. Wenn wir die kleinen Glieder vernachlässigen, so bekommen wir eine erste Annäherung für die Werte von x, y, z. Um die zweiten Näherungswerte zu finden, substituieren wir diese Werte in die ω enthaltenden Gleichungen und integrieren die resultierenden Gleichungen. Weil diese Gleichungen nur unter der Voraussetzung richtig sind, dass ω^2 vernachlässigt werden kann, so ist keine dritte Annäherung möglich. In unserem Falle ist $\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}$, oder genau $\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{\cdot}000729$, wodurch offenbar alle Glieder mit ω^2 vernachlässigt werden können.

1. Ein Punkt fällt aus der Höhe h, wie ist seine Bewegung beschaffen?

Zur Zeit $t = 0$ sind $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ alle Null und $z = h$. Ferner ist $X = Y = Z = 0$. Vernachlässigen wir alle Glieder, welche den Faktor ω enthalten, in (1), so folgt $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$, und giebt die Integration $x = 0$, $y = 0$, $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Die Substitution dieser Werte von x, y, z in die Gleichungen (1) führt zu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\omega\cos\lambda\, g\, t = 0,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g,$$

woraus folgt

$$x = 0,\quad y = -\,\omega\cos\lambda\,\frac{g}{3}t^3,\quad z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Diese Resultate ergeben eine kleine Abweichung nach Osten, welche dem Kubus der Fallzeit direkt proportional ist. Eine südliche Abweichung ist nicht vorhanden, wodurch die Vertikalbewegung dieselbe ist, als wenn die Erde fest wäre. Die Bewegung findet in der YZ-Ebene statt und giebt die Elimination von t die Bahngleichung

$$y^2 = \frac{8}{9}\cdot\frac{\omega^2}{g}\cos^2\lambda\,(h-z)^3.$$

Eine elementare Erläuterung macht die Sache noch deutlicher. Es falle der Punkt aus einer Höhe h vertikal über O. Wird O in den Ruhezustand versetzt, dann wird der Punkt in Wirklichkeit mit einer Geschwindigkeit $\omega h\cos\lambda$ ostwärts geworfen. Folglich würde der Punkt, wenn die Richtung der Fallbeschleunigung infolge der Rotation der Erde um OJ sich nicht änderte, eine Parabel beschreiben, und die östliche

Abweichung würde mit t als Fallzeit gleich $\omega h \cos\lambda . t = \omega \cos\lambda\, g \frac{t^3}{2}$, weil $h = \frac{1}{2} g t^2$, sein. Die Rotation ω um OJ ist äquivalent $\omega \sin\lambda$ um OZ und $\omega\cos\lambda$ um OX. Die erstere ändert die Lage der Normalen OC der Erdoberfläche nicht, welche die Richtung der Fallbeschleunigung giebt. Die letztere dreht OC in einer Zeit t durch einen Winkel $\omega\cos\lambda . t$, so dass die Fallbeschleunigung allmählich ihre Richtung mit dem fallenden Punkte ändert. An dem Punkte wirkt daher eine westliche Componente, $g \sin(\omega\cos\lambda . t)$, welche — weil ω klein ist — nahezu gleich $g\omega\cos\lambda . t$ ist. Bezeichnet y' den Abstand des Punktes von der Lage der XZ-Ebene im Raume, wenn der Punkt zu fallen beginnt, und wird y' in westlicher Richtung positiv genommen, dann ist die Gleichung für die Bewegung des Punktes im Raume $\frac{d^2 y'}{dt^2} = g\omega\cos\lambda . t$. Die Integration dieser Gleichung giebt, da mit $t = 0$, $\frac{dy'}{dt} = -\omega h \cos\lambda$,

$$y' = -\omega h \cos\lambda . t + \frac{1}{6} g\, \omega \cos\lambda . t^3.$$

Wenn der Punkt die Erdoberfläche erreicht, so ist sehr nahe $y' = y$ und $h = \frac{1}{2} g t^2$, also ist die Deviation ostwärts $-\omega g \cos\lambda . \frac{t^3}{3}$, wie oben. In der Zeit t haben sich OY und OZ durch einen sehr kleinen Winkel $\vartheta = \omega\cos\lambda . t$ gedreht, folglich ist durch Transformation der Axen $y' = y\cos\vartheta - z\sin\vartheta = y\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \cdots\right) - z\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{2.3} + \cdots\right)$, so dass, wie gesagt wurde, annähernd $y' = y$ ist.

2. Ein schwerer Punkt wird mit einer Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen. Wie ist die Bewegung des Punktes beschaffen?

Im vorliegenden Falle haben wir $X = Y = Z = 0$, zur Zeit $t = 0$ ist $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = v_0$. Die Vernachlässigung aller ω enthaltenden Glieder giebt die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g,$$

so dass durch Integration

$$\frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy}{dt} = 0,\ \frac{dz}{dt} = v_0 - gt; \quad x = 0,\ y = 0,\ z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Mit diesen Näherungswerten gelangen wir zu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\,(v_0 - gt), \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g,$$

woraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 2\omega\cos\lambda\left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right), \quad \frac{dz}{dt} = v_0 - gt.$$

$$x = 0, \quad y = \omega\cos\lambda\left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3\right), \quad z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Mit $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$ ist $t = \frac{v_0}{g}$, wie in dem einfachen Falle. Damit erhalten wir als grösste Abweichung von der Axe der y

$$y = \omega \cos\lambda \left(\frac{v_0^3}{g^2} - \frac{1}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\right) = \frac{2}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2} = \frac{2}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t^3.$$

Kehrt der Punkt wieder nach der Erdoberfläche zurück, dann ist seine Deviation nach dem vorhergehenden Beispiele $-\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t^3$, daher die ganze Abweichung beim Emporsteigen und Zurückfallen $y_1 = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t^3$. welche hier eine westliche und numerisch ebenso gross wie diejenige für den freien Fall allein ist. Durch die Gleichungen für y und z ist die Lage des Punktes in seiner Bewegungsebene für jeden Wert von t gegeben. die Elimination von t aus ihnen führt zur Gleichung der Bahn des Punktes.

3. Ein schwerer Punkt wird mit einer Geschwindigkeit v_0 in einer Richtung geworfen, welche einen Winkel α mit der horizontalen Ebene einschliesst und die Vertikalebene durch die Wurfrichtung macht dabei mit der Ebene des Meridians einen Winkel β, welcher von Süd nach Ost gemessen gedacht wird. Wenn x horizontal in der Wurfebene gemessen wird, y horizontal in einer Richtung, welche einen Winkel $\beta + \frac{\pi}{2}$ mit dem Meridian einschliesst, z vom Wurfpunkte aus vertikal aufwärts, dann ist die XZ-Ebene Wurfebene. Die Bewegung des Punktes soll unter diesen Voraussetzungen untersucht werden.

Die Componenten der Winkelgeschwindigkeit ω für die Coordinatenaxen sind

$$\vartheta_1 = \omega\cos\lambda\cos\beta,\quad \vartheta_2 = -\omega\cos\lambda\sin\beta,\quad \vartheta_3 = -\omega\sin\lambda.$$

Die Componenten der auf den Punkt wirkenden Beschleunigungen ausser g parallel zu den Coordinatenaxen sind $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Damit gehen die allgemeinen Bewegungsgleichungen (2) über in

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\omega\sin\lambda - 2\frac{dz}{dt}\omega\cos\lambda\sin\beta = 0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dz}{dt}\omega\cos\lambda\cos\beta - 2\frac{dx}{dt}\omega\sin\lambda = 0,\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}\omega\cos\lambda\sin\beta - 2\frac{dy}{dt}\omega\cos\lambda\cos\beta = -g.
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Vernachlässigen wir für die erste Annäherung alle Glieder, welche den kleinen Faktor ω enthalten, dann entstehen daraus die einfachen Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g,$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = 0$, $v_z = v_0 \sin\alpha$, $x = y = z = 0$.

Unter diesen Umständen giebt die Integration

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - g\,t,$$

$$x = v_0 \cos\alpha \,.\, t, \quad y = 0, \qquad z = v_0 \sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Dieses sind die bekannten Gleichungen für die schiefe Wurfbewegung eines schweren Punktes bei feststehender Erde unter sonst gleichen Verhältnissen. Führen wir die erhaltenen Resultate in die Gleichungen (1) ein, so ergiebt sich für eine zweite Annäherung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\,\omega \cos\lambda \sin\beta\,(v_0 \sin\alpha - gt),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2\,\omega \cos\lambda \cos\beta\,(v_0 \sin\alpha - g\,t) - 2\,\omega\, v_0 \sin\lambda \cos\alpha.$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\,2\,\omega\, v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta - g.$$

Durch die Integration dieser Gleichungen folgt

$$\frac{dx}{dt} = 2\,\omega \cos\lambda \sin\beta\,(v_0 \sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g\,t^2) \qquad = v_x,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\,\omega \cos\lambda \cos\beta\,(v_0 \sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g\,t^2) - 2\,\omega\, v_0 \sin\lambda \cos\alpha \,.\, t \; = v_y,$$

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - 2\,\omega\, v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta \,.\, t - g\,t \qquad = v_z,$$

$$x = \omega \cos\lambda \sin\beta\,(v_0 \sin\alpha \,.\, t^2 - \frac{1}{3} g\,t^3),$$

$$y = \omega \cos\lambda \cos\beta\,(v_0 \sin\alpha \,.\, t^2 - \frac{1}{3} g\,t^3) - \omega\, v_0 \sin\lambda \cos\alpha \,.\, t^2,$$

$$z = v_0 \sin\alpha \,.\, t - \omega\, v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta \,.\, t^2 - \frac{1}{2} g\,t^2.$$

Durch diese sechs Gleichungen ist die Bewegung des Punktes vollständig gegeben.

Die Bahn des Punktes schneidet zweimal die XY-Ebene, denn es ist mit $z = 0$

$$0 = (v_0 \sin\alpha - \omega\, v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta \,.\, t - \frac{1}{2} g\,t)\,t,$$

so dass diese Schnitte stattfinden zur Zeit $t = 0$, d. i. in der Anfangslage des Punktes und zur Zeit

$$t = \frac{2\,v_0 \sin\alpha}{g + 2\,\omega\, v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta}.$$

Mit Vernachlässigung aller Glieder, welche höhere Potenzen von ω über die erste hinaus als Faktoren enthalten, können wir näherungsweise schreiben

$$t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha}{g}\right), \; t^2 = \frac{4 v_0{}^2 \sin^2\alpha}{g^2}\left(1 - \frac{4\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha}{g}\right),$$

$$t^3 = \frac{8 v_0{}^3 \sin^3\alpha}{g^3}\left(1 - \frac{6\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha}{g}\right).$$

Durch diese Werte erhalten wir für die Coordinaten x_1, y_1 des Schnittpunktes der Bahn mit der horizontalen XY-Ebene, wenn wir wieder nur die Glieder, welche nur die erste Potenz von ω als Faktoren besitzen, berücksichtigen,

$$x_1 = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g} + \frac{4}{3}\omega \frac{v_0{}^3}{g^2} \cos\lambda \sin\alpha \sin\beta (\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha),$$

$$y_1 = \frac{4}{3}\omega \frac{v_0{}^3}{g} \sin^2\alpha (\cos\lambda \sin\alpha \cos\beta + 3 \sin\lambda \cos\alpha).$$

Daraus ergiebt sich, dass die Abweichung y_1 von der vertikalen Wurfebene stets nach rechts auf der nördlichen und immer nach links auf der südlichen Halbkugel liegt. Die Wurfweite x_1 wird zu einem Maximum für einen von 45^0 abweichenden Elevationswinkel. Das zweite Glied in dem Ausdrucke für x_1 verschwindet mit $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$, d. i. mit $tg\,\alpha = \sqrt{3}$, oder mit $\alpha = 60^0$. Demnach hat die Rotation der Erde keinen Einfluss auf die Wurfweite, wenn der Punkt unter einem Winkel von 60^0 geworfen wird.

Für die Wurfhöhe haben wir die Bedingung

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - 2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta \, . \, t - g t = 0,$$

womit die Zeit zur Erreichung der grössten Höhe, welche t' sein mag,

$$t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta}{g}\right).$$

Diese Zeit ist mithin halb so gross wie diejenige zur Erlangung der Wurfweite. Bezeichnet z' die Wurfhöhe, dann folgt durch Substitution dieses Wertes von t in die Gleichung für z

$$z' = \frac{v_0{}^2 \sin^2\alpha}{2g} + \omega \frac{v_0{}^3}{g^2} \cos\lambda \sin^2\alpha \cos\alpha \sin\beta.$$

Die Wurfhöhe wird demnach grösser oder kleiner als in dem einfachen Falle, je nachdem $\cos\lambda \sin\beta$ positiv oder negativ ist.

Schliesst die Meridianebene mit der Wurfebene den Winkel $\beta = 0$ ein, dann ist mit den erhaltenen Resultaten

$$x = v_0 \cos\alpha \, . \, t, \quad y = \omega \cos\lambda \left(v_0 \sin\alpha \, . \, t^2 - \frac{1}{3} g t^3\right) - \omega v_0 \sin\lambda \cos\alpha \, . \, t^2,$$

$$z = v_0 \sin\alpha \, . \, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Projektion der Bahn des Punktes auf die Ebene der xz ist hier eine

Parabel, wie wenn die Erde fest wäre. Die Wurfweite, Abweichung und Wurfhöhe sind

$$x_1 = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}, \qquad y_1 = \frac{4}{3}\omega\frac{v_0^3}{g^2}\sin^2\alpha\,(\cos\lambda\sin\alpha + 3\sin\lambda\cos\alpha).$$

$$z' = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Ist die Wurfebene rechtwinkelig zur Meridianebene, also $\beta = \frac{\pi}{2}$, dann ergeben sich folgende Resultate:

$$x = v_0\cos\alpha . t + \omega\cos\lambda\,(v_0\sin\alpha . t^2 - \frac{1}{3}g t^3), \quad y = -\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha . t^2,$$

$$z = v_0\sin\alpha . t - \frac{1}{2}g t^2 - \omega v_0\cos\lambda\cos\alpha . t^2,$$

$$x_1 = \frac{v_0\sin 2\alpha}{g} + \frac{4}{3}\omega\frac{v_0^3}{g^2}\cos\lambda\sin\alpha\,(\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha).$$

$$y_1 = 4\omega\frac{v_0^3}{g^2}\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$z' = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \omega\frac{v_0^3}{g^2}\cos\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Wird der Punkt in horizontaler Richtung geworfen, dann ist $\alpha = 0$, folglich

$$x = v_0 t - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\sin\beta\, g t^3, \qquad y = -\frac{1}{3}\omega\,(g\cos\lambda\cos\beta . t + 3 v_0\sin\lambda)\,t^2.$$

$$z = -\frac{1}{2}g t^2 - \omega v_0\cos\lambda\sin\beta . t^2.$$

4. Bewegung eines einfachen Pendels unter dem Einflusse der Rotation der Erde.

Wir beziehen am vorteilhaftesten hier die Bewegung auf Axen, welche nicht fest mit der Erde verbunden, sondern in einer bekannten Weise beweglich sind. Die Axe der z nehmen wir vertikal, wie vorhin, die Axen der x und der y lassen wir sich langsam mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin\lambda$ um die Vertikale in der Richtung von Süd nach West bewegen. Bei dieser Annahme ist, wenn β den von der Axe der x und der Tangente an den Meridian eingeschlossenen Winkel bezeichnet, $\frac{d\beta}{dt} = \omega\sin\lambda$, so dass

$$\vartheta_1 = \omega\cos\lambda\cos\beta, \quad \vartheta_2 = -\omega\cos\lambda\sin\beta, \quad \vartheta_3 = -\omega\sin\lambda + \omega\sin\lambda = 0.$$

Wenn wir, wie vorher, die ω^2 als Faktoren enthaltenden Glieder vernachlässigen, so müssen wir auch die $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ und $\frac{d\vartheta_2}{dt}$ enthaltenden Glieder verwerfen. Es bezeichne l die Länge des mathematischen Pendels, N die

Spannungsbeschleunigung des Pendelfadens. Mit diesen Werten erhalten wir, den Aufhängepunkt zum Coordinatenursprunge machend, durch (2) die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} - 2\,\omega \cos\lambda \sin\beta \frac{d z}{d t} = - N \frac{x}{l},$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - 2\,\omega \cos\lambda \cos\beta \frac{d z}{d t} = - N \frac{y}{l},$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + 2\,\omega \cos\lambda \sin\beta \frac{d x}{d t} + 2\,\omega \cos\lambda \cos\beta \frac{d y}{d t} = - g - N \frac{z}{l}.$$

Bezeichnet α den halben Schwingungswinkel des Pendels, den wir als sehr klein voraussetzen, dann ist $z = l \cos\alpha = l\,(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \cdots)$, so dass wir wegen der Kleinheit von α offenbar $z = l$ setzen dürfen. Aus demselben Grunde dürfen wir auch $N = g$ nehmen. Mit $z = l$ ist $\frac{dz}{dt} = 0$. Nehmen wir an, das Pendel sei seitwärts gezogen, so dass es mit der Vertikalen den kleinen Winkel α einschliesst, und dann frei gelassen, dann muss der Pendelpunkt mit einer Geschwindigkeit $l \sin\alpha\, \omega \sin\lambda$ relativ zu den mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin\lambda$ sich bewegenden Axen senkrecht zu der Anfangsebene der Verschiebung geworfen werden. Dadurch haben wir zur Zeit $t = 0$, $x = l\alpha$, $y = 0$, $\frac{d x}{d t} = 0$, $\frac{d y}{d t} = l \alpha \omega \sin\lambda$.

Unsere Bewegungsgleichungen gehen mit den Näherungswerten über in

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - g \frac{x}{l}, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = - g \frac{y}{l},$$

$$\omega \cos\lambda \sin\beta \frac{d x}{d t} + \omega \cos\lambda \cos\beta \frac{d y}{d t} = - g.$$

Die Integration der beiden ersten Gleichungen giebt

$$x = A' \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B' \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t, \qquad y = A'' \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B'' \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Für die Integrationskonstanten finden wir

$$A' = 0, \qquad B' = l\alpha, \qquad A'' = l\alpha \sqrt{\frac{l}{g}}\, \omega \sin\lambda, \qquad B'' = 0.$$

Daher ergeben sich für die Projektionsbewegung auf der XY-Ebene die Gleichungen

$$x = l\alpha \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t, \qquad y = l\alpha \sqrt{\frac{l}{g}}\, \omega \sin\lambda \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

$$\frac{d x}{d t} = - l\alpha \sqrt{\frac{g}{l}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t, \qquad \frac{d y}{d t} = l\alpha\, \omega \sin\lambda \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Quadrieren wir die beiden ersten Gleichungen und addieren die Resultate, so erhalten wir als Gleichung der Projektionsbahn in der XY-Ebene

$$\frac{x^2}{(l\alpha)^2} + \frac{y^2}{\left(l\alpha\sqrt{\frac{l}{g}}\,\omega \sin\lambda\right)^2} = 1.$$

Dieses ist die Gleichung einer Ellipse, ihr Mittelpunkt fällt mit dem Aufhängepunkte zusammen, ihre Halbaxen stehen in dem Verhältnisse $\omega \sin\lambda \sqrt{\frac{l}{g}}$. Die Rotation der Erde bewirkt, dass die Ellipse um die Vertikale sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin\lambda$ in der Richtung von Süd nach West dreht. Weil ω sehr klein ist, so ist die Ellipse sehr lang gestreckt. Die Zeit, innerhalb welcher die Ellipse einmal beschrieben wird, ist $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sie dreht sich in einem der Rotation der Erde entgegengesetzten Sinne einmal herum in der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda}$, welche für die Breite von Karlsruhe (49°) ungefähr 32 Stunden beträgt. Es zeigt sich, dass die Schwingungszeit T, wenn die den Faktor $\omega\alpha^2$ enthaltenden Glieder vernachlässigt werden können, von der Rotation der Erde unabhängig ist.

Wenn der Winkel α nicht so klein ist, dass sein Quadrat vernachlässigt werden kann, dann schreiten die Absiden der Ellipse fort, was aus der absoluten Bewegung eines Punktes bekannt ist. Für den Erfolg von Experimenten ist es daher nötig, die Pendellänge l möglichst gross zu nehmen. Diese Bewegung der Absiden, welche von der Grösse des Winkels α abhängt, erfolgt in einer zur Rotation der Erde entgegengesetzten Richtung.

E. P. Routh, Dynamics of a System of Rigid Bodies

Dritter Teil.

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im unveränderlichen Systeme.

Erstes Kapitel.

Die Geschwindigkeit im unveränderlichen Systeme.

Bewegt sich ein ebenes unveränderliches System in seiner Ebene, ist Ω seine Winkelgeschwindigkeit, $d\vartheta$ die Elementaramplitude der Rotation um das Momentancentrum zur Zeit t, U die Geschwindigkeit des Momentancentrums, V die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes in der Entfernung r von dem Momentancentrum, ds das Bogenelement der Curve der Momentancentra, sind Γ, Γ_1 die Krümmungshalbmesser der Curven (C) und (Γ) für ihren augenblicklichen Berührungspunkt, dann bestehen die Gleichungen

$$\Omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \qquad V = \Omega r = \frac{ds}{dt}, \qquad \frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma . \Gamma_1}{\Gamma_1 \pm \Gamma},$$

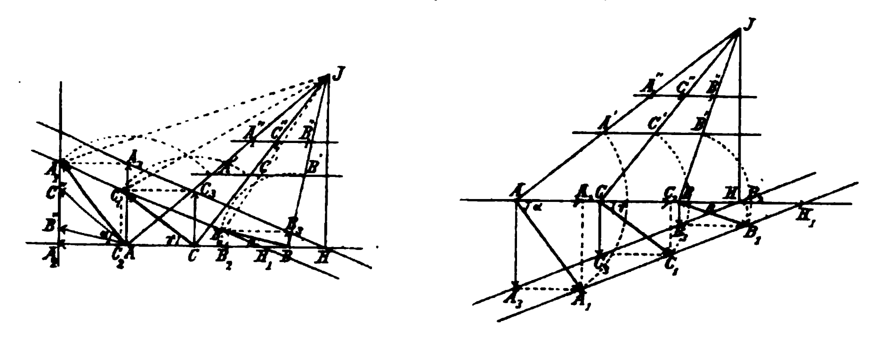
und gilt in der letzten Formel das obere oder untere Zeichen, je nachdem die benachbarten Teile der Curven (C) und (Γ) auf entgegengesetzte Seiten oder auf dieselbe Seite der gemeinschaftlichen Tangente fallen.

Weil die augenblicklichen Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte den Abständen dieser Punkte von dem Momentancentrum direkt proportional sind, so sind die Geschwindigkeiten sämtlicher Systempunkte gegeben, wenn die Geschwindigkeiten zweier Systempunkte nach Grösse und Richtung, oder auch nur eine Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung, die andere der Richtung nach bekannt sind.

I. Die Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte stellen wir nach Grösse und Richtung durch Strecken dar und verstehen dann unter diesen Strecken die Geschwindigkeiten selbst, wodurch auf rein geometrischem Wege Aufschluss über einige Eigenschaften derselben erlangt werden kann.

a) Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer Systemgeraden liegen auf einer geraden Linie. Die Anfangspunkte und Endpunkte der Geschwindigkeiten teilen ihre Träger nach demselben Verhältnisse.

Ist AB (Fig. 122 und 122a) eine beliebige Gerade des ebenen

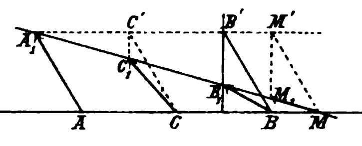


Figur 122. Figur 122 a.

Systemes, J das Momentancentrum, AA_1 die Geschwindigkeit des Punktes A, welche direkt proportional der Poldistanz AJ und senkrecht zu ihr, je nach der Bewegung des Systemes rechts oder links drehend erscheinen kann, daher die Doppelfigur, so ergiebt sich zunächst die Geschwindigkeit eines Punktes B der Systemgeraden AB wie folgt. Wir ziehen die Polstrahlen AJ, BJ, machen $AA' = AA_1$, ziehen $A'B' \parallel AB$, machen BB_1 senkrecht BJ und gleich BB', in der Weise, dass BB_1 denselben Drehungssinn wie AA_1 besitzt, dann ist offenbar BB_1 die Geschwindigkeit des Systempunktes B. In gleicher Weise ergiebt sich die Geschwindigkeit CC_1 irgend eines weiteren Punktes C der Geraden AB. Verbinden wir die Punkte A_1 und B_1 durch eine gerade Linie, so zeigt es sich, dass mit dieser der Punkt C_1 zusammenfällt. Ziehen wir die Strahlen JA_1, JB_1, JC_1, dann ist zufolge der Konstruktion $\triangle A_1AJ \sim \triangle B_1BJ \sim \triangle C_1CJ$, folglich $\sphericalangle A_1JA = \sphericalangle B_1JB = \sphericalangle C_1JC$, mithin auch $\sphericalangle A_1JB_1 = \sphericalangle AJB$, $\sphericalangle A_1JC_1 = \sphericalangle AJC$, $\sphericalangle B_1JC_1 = \sphericalangle BJC$, $A_1J : AJ = B_1J : BJ = C_1J : CJ$, so dass $\triangle A_1B_1J \sim \triangle ABJ$, $\triangle A_1C_1J \sim \triangle ACJ$, $\triangle B_1C_1J \sim \triangle BCJ$. Daraus ergiebt sich $A_1B_1 : AB = A_1C_1 : AC = B_1C_1 : BC$, $\sphericalangle B_1A_1J = \sphericalangle BAJ$, $\sphericalangle B_1C_1J = \sphericalangle BCJ$, $\sphericalangle A_1B_1J = \sphericalangle ABJ$, und weil die Dreiecke A_1B_1J, C_1B_1J den Winkel A_1B_1J sonach gemeinschaftlich besitzen, liegen offenbar ihre Seiten A_1B_1, C_1B_1 in einer geraden Linie, folglich die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte A, B, C auf dem Strahle A_1B_1. Weil nun der Punkt C ganz beliebig angenommen wurde, so ergiebt sich, dass die Endpunkte der Geschwindigkeiten aller Punkte einer Systemgeraden auf einem Strahle liegen. Die letzte Proportion lehrt, dass die Endpunkte der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer Systemgeraden ihren Träger nach demselben Verhältnisse teilen, wie die Anfangspunkte die Systemgerade.

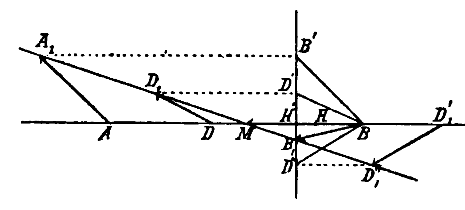
Ist AB (Fig. 123, S. 314) die gegebene Systemgerade, sind AA_1,

BB_1 die gegebenen Geschwindigkeiten der Punkte A, B und soll die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes C dieser Geraden verzeichnet werden, so machen wir, nachdem der Strahl $A_1 B_1$ gezogen, BB', CC' parallel und gleich AA_1, ziehen $B'B_1$, zu ihr $C'C_1$ parallel und schliesslich die Strecke CC_1, welche die verlangte Geschwindigkeit ist. Zufolge der Konstruktion besteht nämlich die Proportion $A_1 C_1 : C_1 B_1 = A_1 C' : C' B' = AC : BC$. Die Systemgerade AB wird von dem Strahle $A_1 B_1$ in dem Punkte M geschnitten, seine Geschwindigkeit MM_1 fällt mit dem Strahle $A_1 B_1$ zusammen, denn das Dreieck $C' C C_1$ geht in diesem Falle in das Dreieck $M' M M_1$ über.



Figur 123.

b) Die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Systempunkte schneiden sich offenbar unter demselben Winkel wie die zugehörigen Strahlen nach dem Geschwindigkeitspole J. Verlegen wir die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer Systemgeraden ohne Änderung ihrer Richtungen nach irgend einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte, dann liegen die Endpunkte dieser Strecken ebenfalls auf einer Geraden. Wählen wir (Fig. 122, S. 313) A zu diesem Punkte, machen $AB'' =$ und $\| BB_1$, $AC'' =$ und $\| CC_1$, so befinden sich die Punkte A_1, B'', C'' auf einer Geraden. Denken wir uns nämlich die Strecken AA', BB', CC' in ihrer Richtung bis zum Momentancentrum verschoben, so dass $A_1'' J = AA'$ etc. wird, dann ist klar, dass die Punkte A_1'', B_1'', C_1'' auf dem zu AB parallelen Strahle $A_1'' B_1''$ liegen. Nun ist aber $\sphericalangle A_1 A B'' = \sphericalangle A_1'' J B_1''$, $\sphericalangle A_1 A C'' = \sphericalangle A_1'' J C''$ etc., folglich $\triangle A_1 A B'' \cong \triangle A_1'' J B_1''$, $\triangle A_1 A C'' \cong \triangle A_1'' J C_1''$, $\triangle B'' A C'' \cong \triangle B_1'' J C_1''$, mithin liegen die drei Punkte A_1, B'', C'' in einer geraden Linie, welche hier senkrecht auf der Systemgeraden AB steht, weil das Dreieck $A_1 A B''$ mit seinen Seiten senkrecht auf den entsprechenden Seiten des Dreieckes $A_1'' J B_1''$ steht. Dadurch kann sofort die Geschwindigkeit irgend eines Punktes einer Systemgeraden gefunden werden, wenn die Geschwindigkeit eines Punktes derselben gegeben und die Richtung oder Grösse der Geschwindigkeit eines zweiten Punktes bekannt ist. Ist (Fig. 124) BB_1 die Geschwindigkeit des Punktes B, A_1 die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes A der Systemgeraden AB und soll der Punkt D dieser Linie gefunden werden, welchem eine der Grösse nach gegebene Geschwindigkeit



Figur 124.

zukommt, so ziehen wir durch B_1 den zu AB senkrechten Strahl $B_1 H'$, $BB' \parallel AA_1$, $B'A_1 \parallel AB$, wodurch in AA_1 jetzt auch die Grösse der Geschwindigkeit des Punktes A gegeben ist, hierauf verzeichnen wir den Strahl $A_1 B_1$, machen BD' gleich der gegebenen Geschwindigkeit, $D'D_1 \parallel AB$ und $D_1 D \parallel D'B$, alsdann ist D der gesuchte Punkt der Systemgeraden AB. Offenbar giebt es noch einen zweiten Punkt $D_1{}^{0'}$. Weil der Strahl $B_1 H'$ senkrecht auf der Systemgeraden AB steht, so sind die Projektionen der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer solchen Geraden auf ihre Richtung von konstanter Grösse, gleich der Strecke BH', wodurch sich zeigt, dass sämtliche Punkte der Geraden in ihrer Richtung dieselbe Geschwindigkeit besitzen. Die Strecke BH' giebt zugleich die Grösse des Geschwindigkeitsminimums. Um den Punkt von AB zu finden, welchem die kleinste Geschwindigkeit zukommt, haben wir nur vom Schnittpunkte M der Geraden AB und $A_1 B_1$ aus die Strecke MH auf AB gleich $H'B$ zu machen, so ist H der verlangte Punkt und HM seine Geschwindigkeit; der durch H zu AB senkrecht gezogene Strahl enthält das Momentancentrum. Derjenige Punkt von AB, welcher die grösste Geschwindigkeit besitzt, liegt im Unendlichen, denn die Richtung der Maximalgeschwindigkeit ist parallel zu $B_1 H'$, diese Geschwindigkeit ist daher unendlich gross. Geht die Systemgerade durch das Momentancentrum, dann fällt der Punkt H' mit dem Punkte B zusammen, so dass die Gerade in ihrer Richtung sich mit der Geschwindigkeit Null bewegt, die Geschwindigkeiten ihrer Punkte senkrecht zu ihr sind und der mit dem Momentancentrum zusammenfallende Punkt die Geschwindigkeit Null besitzt.

c) Werden die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer Systemgeraden in ihre Componenten in paralleler und senkrechter Richtung zu dieser Geraden zerlegt, so sind die ersteren Componenten einander gleich und die Endpunkte der letzteren liegen auf einem zum Träger der Endpunkte der Geschwindigkeiten parallelen Strahle.

Schliessen die Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C einer Systemgeraden AB (Fig. 122, S. 313) mit AB die Winkel α, β, γ ein, sind AA_2, AA_3, BB_2, BB_3 .... die genannten Componenten der Geschwindigkeiten AA_1, BB_1 ...., ist $AJ = r_1$, $BJ = r_2$ ...., $JH \perp AB$ und $= h$, so erhalten wir für die zu AB parallelen Componenten

$$AA_2 = AA_1 \cos\alpha = \Omega r_1 . \frac{h}{r_1} = \Omega h, \; BB_2 = BB_1 \cos\beta = \Omega r_2 . \frac{h}{r^2} = \Omega h,$$
$$CC_2 = CC_1 \cos\gamma = \Omega h,$$

mithin ist $AA_2 = BB_2 = CC_2$, womit auch in anderer Weise dargethan ist, dass die Projektionen der Geschwindigkeiten auf die Systemgerade gleich gross sind, dass sich die einzelnen Punkte dieser Linie in ihrer Richtung mit derselben Geschwindigkeit Ωh bewegen.

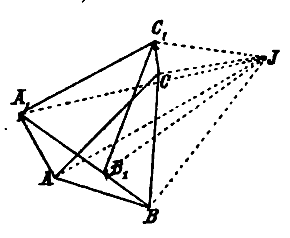
Ferner ergiebt sich für die zu AB senkrechten Geschwindigkeitscomponenten

$$A A_3 = A A_1 \sin\alpha = \Omega r_1 . \frac{1}{r_1} \sqrt{r_1{}^2 - h^2} = \Omega \sqrt{r_1{}^2 - h^2},$$

$$B B_3 = B B_1 \sin\beta = \Omega \sqrt{r_2{}^2 - h^2}, \quad C C_3 = C C_1 \sin\gamma = \Omega \sqrt{r_3{}^2 - h^2} \text{. etc.}$$

Diese Componenten sind gleich den Abständen der Punkte A_1, B_1, C_1 von der Geraden AB und weil die Punkte A_3, B_3, C_3 gleichweit von den Punkten A_1, B_1, C_1 entfernt sind, A_1, B_1, C_1 ganz beliebig gelegen gewählt wurden, so liegen die Endpunkte dieser Componenten der Geschwindigkeiten aller Punkte irgend einer Systemgeraden auf einer zu dem Strahle $A_1 B_1$ parallelen Linie.

d) Sind die Geschwindigkeiten AA_1, BB_1, CC_1 dreier nicht in gerader Linie liegender Systempunkte A, B, C (Fig. 125) gegeben, verbinden wir die Systempunkte unter sich, so wie die Endpunkte ihrer Geschwindigkeiten unter sich durch gerade Linien, dann sind die dadurch entstehenden Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ einander ähnlich.



Figur 125.

Ist J der Geschwindigkeitspol, ziehen wir die Polstrahlen der Punkte A, B, C, A_1, B_1, C_1, so folgt aus dem Vorhergehenden sofort dass

$$A_1 B_1 : A B = A_1 C_1 : A C = B_1 C_1 : B C = A_1 J_1 : A J = C_1 J : C J = B_1 J : B J.$$

oder $A_1 B_1 : A_1 C_1 : B_1 C_1 = A B : A C : B C$, d. i. $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A B C$.

e) Sind $A, B, C, D, E \ldots$. Punkte des Systemes, welche in ihrer Reihenfolge durch gerade Linien verbunden, die Eckpunkte eines beliebigen Polygonzuges bilden, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \ldots$. die Endpunkte ihrer Geschwindigkeiten, dann liegen die letzteren auf einem ähnlichen Polygonzuge. Aus dem Vorhergehenden folgt sofort die Proportion

$$A_1 B_1 : B_1 C_1 : C_1 D_1 : D_1 E_1 \ldots . = A B : B C : C D : D E \ldots .$$

Werden die Seiten des Polygonzuges $ABCDE \ldots$. einander gleich und unendlich klein, dann geht derselbe in einen Kreisbogen über und es liegen offenbar auch die Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \ldots$. auf einem Kreisbogen. Wenn die Winkel des regulären Polygonzuges gleich π werden, so nimmt derselbe die Gestalt einer geraden Linie an, woraus folgt, dass die Endpunkte der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer Systemgeraden auf einem Strahle liegen.

Die Ähnlichkeit der beiden Polygonzüge $ABCDE \ldots, A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \ldots$ lässt darauf schliessen, dass die Endpunkte der Geschwindigkeiten der einzelnen auf irgend einer Curve des Systemes gelegenen Punkte auf einer dieser Curve ähnlichen Linie liegen.

1. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass stets zwei seiner Punkte AB, welche den Abstand $AB = a$ besitzen, auf zwei festen, unter rechtem Winkel sich schneidenden geraden Linien OX, OY (Fig. 2, S. 3) fortrücken.

a) Das Momentancentrum C besitzt eine gleichförmige Geschwindigkeit c oder — was dasselbe ist — der Kreis (Γ) rollt in dem Kreise (C) gleichförmig. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum? Wie gross ist die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes?

Bezeichnen wir den Winkel $XOC = \sphericalangle OAB$ mit ψ, nehmen an, dass zur Zeit $t = 0$ der Radiusvektor OC mit der Abscissenaxe OX zusammenfällt, so ist, weil OC konstante Winkelgeschwindigkeit besitzt, $ct = a\psi$, oder $\psi = \frac{ct}{a}$. Nun ist A die Projektion des Punktes C auf die Abscissenaxe, die Bewegung dieses Punktes eine schwingende, seine Geschwindigkeit $v = -a\omega \sin \omega t$, nach 1, Kap. I. Th. II, und da hier $\omega = \frac{c}{a}$, $\omega t = \psi$, $v = -c \sin \psi = -c \sin \frac{ct}{a}$, mithin die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum

$$\Omega = \frac{v}{AC} = -\frac{c \sin \frac{ct}{a}}{a \sin \psi} = -\frac{c \sin \frac{ct}{a}}{a \sin \frac{ct}{a}} = -\frac{c}{a}.$$

Die Verwendung der Formel $\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma \Gamma_1}{\Gamma_1 \pm \Gamma}$ giebt hier, weil $\Gamma = a, \Gamma_1 = \frac{a}{2}$, beide Curven (C), (Γ) auf derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Tangente liegen,

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} - a} = -a, \quad \Omega = -\frac{c}{a}.$$

Diese Winkelgeschwindigkeit ist mithin konstant und absolut genommen gleich derjenigen, mit welcher sich der Radiusvektor OC um O dreht. Ist D ein beliebiger Systempunkt, sein Abstand vom Momentancentrum $CD = r$, so ist seine Geschwindigkeit $V = \frac{c}{a} r$. Nun seien die Coordinaten dieses Systempunktes für die beweglichen Axen, mit dem Ursprunge in O_1, α, β, dann ist, weil die Coordinaten des Punktes (C, Γ) für diese Axen, da $\sphericalangle AO_1C = 2\psi$, $\frac{a}{2} \cos 2\psi$, $\frac{a}{2} \sin 2\psi$,

$$r^2 = (\alpha - \frac{a}{2} cos\, 2\,\psi)^2 + (\beta - \frac{a}{2} sin\, 2\,\psi)^2$$
$$= \frac{a^2}{4} + \alpha^2 + \beta^2 - a\,(\alpha\, cos\, \frac{2\,c}{a}\, t + \beta sin\, \frac{2\,c}{a}\, t),$$

folglich ist die Geschwindigkeit des Systempunktes D

$$V = \frac{c}{a}\, r = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2}{4} + \alpha^2 + \beta^2 - a\,(\alpha\, cos\, \frac{2\,c}{a}\, t + \beta\, sin\, \frac{2\,c}{a}\, t}.$$

Diese Geschwindigkeit ist im allgemeinen eine periodisch veränderliche, da sich die goniometrischen Funktionen des Winkels $\psi = \frac{c}{a}\, t$ periodisch ändern, wenn der Punkt C seinen Kreis durchläuft.

Mit $\alpha = \beta = 0$ fällt der Systempunkt D mit dem Mittelpunkte O_1 der Geraden $A\,B$ zusammen und durchläuft seine Kreisbahn mit der Geschwindigkeit $V = \frac{c}{2}$.

Ist $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, liegt der Systempunkt D auf dem Kreise (Γ), etwa in Γ', dann haben wir $C\,\Gamma' = r'$, $\sphericalangle\, X\,O\,\Gamma' = \delta$, $r' = a\, sin\, (\psi - \delta)$ $= a\, sin \left(\frac{c}{a}\, t - \delta\right)$, so dass die Geschwindigkeit, mit welcher er seine geradlinige Bahn $\Gamma'\, O$ beschreibt,

$$V' = c\, sin \left(\frac{c}{a}\, t - \delta\right)$$

ebenfalls eine periodisch veränderliche Grösse ist.

b) Ein Punkt D des Systemes schreitet auf einer durch den Punkt O gehenden, zur Abscissenaxe $O\,X$ unter einem Winkel δ geneigten Geraden mit konstanter Geschwindigkeit c fort. Wie sind Ω und U beschaffen?

Mit Rücksicht auf das unter a) Gesagte erhalten wir, c negativ nehmend

$$\Omega = \frac{V'}{r'} = -\frac{c}{a\, sin\, (\psi - \delta)}, \quad U = -\, a\, \Omega = \frac{c}{sin\, (\psi - \delta)}.$$

Diese Geschwindigkeiten sind Funktionen des veränderlichen Winkels ψ, sie ändern sich, absolut genommen, in gleicher Weise. Beide Geschwindigkeiten nehmen mit $sin\, (\psi - \delta) = 0$, d. i. mit $(\psi - \delta) = 0,\ \pi,\ 2\,\pi \ldots$, wenn also der Punkt D in den Endpunkten seiner Bahn anlangt, ihre grössten Werte, nämlich die Werte ∞ an. Mit $sin\, (\psi - \delta) = \pm 1$ erlangen sie ihre kleinsten Werte, nämlich $\mp \frac{c}{a}$ und $\pm c$, dieses geschieht, wenn $(\psi - \delta) = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \ldots$, wenn der Punkt D die Mitte O seiner

Bahn passiert. Im ersten Falle tritt das Momentancentrum in einen der Endpunkte der Bahn (D), im zweiten Falle liegt dasselbe auf der durch O gehenden Normalen zu (D), abwechselnd links und rechts von (D), seinen grössten Abstand a von (D) besitzend

Die Geschwindigkeiten Ω und U lassen sich aber auch als Funktionen der Zeit darstellen. Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$, $\psi = 0$, bezeichnen den in der Zeit t von dem Momentancentrum zurückgelegten Weg mit ψ, so erhalten wir, weil $s = a\psi$ ist,

$$a\frac{d\psi}{dt} = \frac{ds}{dt} = U = \frac{c}{\sin(\psi - \delta)}, \quad \sin(\psi - \delta)\, d\psi = \frac{c}{a}\, dt,$$

$$\int^{\psi} \sin(\psi - \delta)\, d\psi = \frac{c}{a}\int_0^t dt, \quad \cos(\psi - \delta) - \cos\delta = \frac{c}{a}t,$$

und aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$\sin\psi = \left(\frac{c}{a}t + \cos\delta\right)\sin\delta \pm \cos\delta\sqrt{\frac{c^2}{a^2}t^2 - 2\frac{c}{a}t\cos\delta + \sin^2\delta},$$

$$\psi = arc\left\{\sin = \left[\left(\frac{c}{a}t + \cos\delta\right)\sin\delta \pm \cos\delta\sqrt{\frac{c^2}{a^2}t^2 - 2\frac{c}{a}t\cos\delta + \sin^2\delta}.\right]\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist für ψ in die obigen Gleichungen zu substituieren, um die Geschwindigkeiten Ω und U als Funktionen der Zeit zu erhalten.

2. Ein ebenes System bewegt sich in seiner Ebene so, dass stets zwei seiner Punkte A, B, deren wechselseitiger Abstand $AB = a$ ist, (Fig. 3, S. 6) auf zwei festen, unter einem Winkel γ sich schneidenden Geraden OX, OZ fortgleiten.

a) Das Momentancentrum besitzt eine konstante Geschwindigkeit c. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit Ω um das Momentancentrum? Welches ist die Geschwindigkeit V eines beliebigen Systempunktes?

Es sei $\measuredangle XOC = \psi$, zur Zeit $t = 0$, $\psi = 0$. Weil der Geschwindigkeitspol C auf seinem Kreise vom Halbmesser $OC = a\,cosec\,\gamma$ mit konstanter Geschwindigkeit c fortschreitet, so dreht sich der Fahrstrahl OC mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um O, es ist daher $a\,cosec\,\gamma\,.\,\psi = ct$, folglich $\psi = \frac{ct}{a\,cosec\,\gamma}$. Die Geschwindigkeit der Projektion A des Momentancentrums C auf OX ist $v = -c\sin\psi = -c\sin\frac{ct}{a\,cosec\,\gamma}$, daher

$$\Omega = \frac{v}{AC} = -\frac{c\sin\psi}{a\,cosec\,\gamma\,.\sin\psi} = -\frac{c}{a}\sin\gamma.$$

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes D im Abstande r von C ist

$$V = \frac{c}{a} \sin\gamma \, . \, r.$$

Sind α, β die Coordinaten des Punktes D, x', y' diejenigen des Punktes (C, Γ) bezüglich der beweglichen Axen mit dem Ursprunge O_1, ist $\sphericalangle O_1 A C = \nu$, und wird $a \operatorname{cosec}\gamma = b$ gesetzt, so haben wir

$$A C = b \sin\psi, \quad B C = b \sin(\gamma - \psi), \quad \cos\nu = \frac{b^2 \sin^2\psi + a^2 - b^2 \sin^2(\gamma - \psi)}{2 a b \sin\psi}.$$

Damit ist

$$x' = \frac{a}{2} - b \sin\psi \cos\nu = \frac{a}{2} \operatorname{cosec}^2\gamma \{ \sin^2(\gamma - \psi) - \sin^2\psi \}. \qquad (1)$$

Weiter ist die Gleichung des Kreises (Γ) mit den beweglichen Axen als Coordinatenaxen

$$x'^2 + y'^2 - a \operatorname{cotg}\gamma \, . \, y' = \frac{a^2}{4}, \text{ folglich } y' = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}\gamma + \sqrt{\frac{a^2}{4}(1 + \operatorname{cotg}^2\gamma) - x'^2}$$

und mit (1)

$$y' = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}\gamma + \frac{a}{2} \operatorname{cosec}\gamma \sqrt{1 - \operatorname{cosec}^2\gamma \{ \sin^2(\gamma - \psi) - \sin^2\psi \}^2}. \qquad (2)$$

Setzen wir $\psi = \frac{c}{a} t \sin\gamma$, dann sind die Coordinaten des Punktes (C, Γ) als Funktionen der Zeit

$$x' = \frac{a}{2} \operatorname{cosec}^2\gamma \left\{ \sin^2\left(\gamma - \frac{c}{a} t \sin\gamma\right) - \sin^2\left(\frac{c}{a} t \sin\gamma\right) \right\}, \qquad (1')$$

$$y' = \frac{a}{2} \operatorname{cosec}\gamma \left\{ \cos\gamma + \sqrt{1 - \operatorname{cosec}^2\gamma \left\{ \sin^2\left(\gamma - \frac{c}{a} t \sin\gamma\right) - \sin^2\gamma\left(\frac{c}{a} t \sin\gamma\right) \right\}^2} \right\}. \qquad (2')$$

Der Kürze halber x' und y' beibehaltend, ist $r = \sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}$, mithin die Geschwindigkeit des Systempunktes D, welcher bekanntlich eine mit O konzentrische Ellipse beschreibt,

$$V = \frac{c}{a} \sin\gamma \sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}.$$

Die Ausdrücke für x' und y' lassen erkennen, dass die Geschwindigkeit V nicht konstant ist, auch nicht, wenn $\alpha = \beta = 0$, also D mit dem Mittelpunkte O_1 von AB zusammenfällt, welcher bekanntlich ebenfalls eine elliptische Bahn besitzt.

Fällt der Systempunkt D mit dem Kreise (Γ) zusammen, dann ist, wenn δ die Neigung der von ihm beschriebenen Geraden gegen die Abscissenaxe bezeichnet, sein Abstand von dem Momentancentrum C $r' = a \operatorname{cosec}\gamma \sin(\psi - \delta)$, folglich

$$\Omega = -\frac{c \sin\gamma}{a \sin(\psi - \delta)} = -\frac{c \sin\gamma}{a \sin\left(\frac{c}{a} t \sin\gamma - \delta\right)}.$$

Schneiden sich die Führungsgeraden OX, OZ rechtwinkelig, so ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $cosec\,\gamma = 1$, $cotg\,\gamma = 0$, womit in diesem Falle

$$\Omega = -\frac{c}{a},$$

$$x' = \frac{a}{2} \cos 2\psi = \frac{a}{2} \cos \frac{2c}{a} t, \qquad y' = \frac{a}{2} \sin 2\psi = \frac{a}{2} \sin \frac{2c}{a} t,$$

$$V = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2}{4} + \alpha^2 + \beta^2 - a\left(\alpha \cos \frac{2c}{a} t + \beta \sin \frac{2c}{a} t\right)},$$

und wenn der Systempunkt mit dem Kreise (Γ) zusammenfällt

$$\Omega = -\frac{c}{a \sin(\psi - \delta)} = -\frac{c}{a} cosec\left(\frac{ct}{a} - \delta\right).$$

b) Welches sind die Geschwindigkeiten Ω und U, wenn ein Systempunkt D die Gerade DO mit konstanter Geschwindigkeit c durchläuft und diese Gerade einen Neigungswinkel δ gegen die Abscissenaxe besitzt?

Wir erhalten mit negativer Geschwindigkeit c

$$\Omega = \frac{v'}{r'} = -\frac{c}{a\, cosec\,\gamma \sin(\psi - \delta)} = -\frac{c}{a} \frac{\sin\gamma}{\sin(\psi - \delta)}.$$

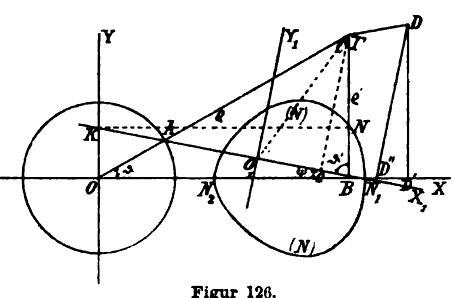
Die konstanten Krümmungshalbmesser der Curven (C) und (Γ) sind $\Gamma = a\, cosec\,\gamma$, $\Gamma_1 = \frac{a}{2} cosec\,\gamma$, mithin ist

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{\frac{a}{2} cosec\,\gamma \,.\, a\, cosec\,\gamma}{\frac{a}{2} cosec\,\gamma - a\, cosec\,\gamma} = -a\, cosec\,\gamma, \quad U = \Omega\, a\, cosec\,\gamma = c\, cosec(\psi - \delta).$$

Mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird $\Omega = -\frac{c}{a} cosec(\psi - \delta)$, $U = c\, cosec(\psi - \delta)$.

3. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass einer seiner Punkte A einen festen Kreis beschreibt, während ein zweiter Punkt B auf einer durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehenden festen Geraden fortrückt (Kurbelbewegung). Die Winkelgeschwindigkeit des Punktes A ist konstant, gleich ω. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit um das Momentancentrum? Welches ist die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes, insbesondere diejenige des Punktes B?

Es sei (Fig. 126, S. 322) O der Mittelpunkt des von dem Systempunkte A beschriebenen Kreises vom Halbmesser $OA = r$, OX die Führungsgerade des Punktes B, AB eine beliebige Lage der die Punkte



Figur 126.

A und B verbindenden Geraden, C das entsprechende Momentancentrum, $\sphericalangle XOA = \vartheta$, $\sphericalangle ABO = \psi$, $\sphericalangle ABC = \vartheta'$, $AB = a > r$, $OC = \varrho$, $BC = \varrho'$.

Der Punkt A bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $r\omega$ in seiner Kreisbahn, daher ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum C mit Rücksicht auf das Problem 3, Teil I, weil $\vartheta = \omega t$,

$$\Omega = \frac{r\omega}{CA} = \frac{r\omega}{OC - OA} = \frac{r\omega}{\varrho - r} = \frac{r\omega\cos\vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}} = \frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\omega t}}. \tag{1}$$

Für die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes D, dessen Abstand von $C = e$ ist, haben wir

$$V = \frac{r\omega}{CA}\cdot CD = \frac{r\omega\cos\vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}}\, e. \tag{2}$$

Sind (x', y') die Coordinaten des Punktes (C, Γ), (α, β) diejenigen des Punktes D für die beweglichen Axen mit dem Ursprunge in O_1 ($AO_1 = BO_1$), so erhalten wir

$$x' = \frac{a}{2} - \varrho'\cos\vartheta', \qquad y' = \varrho'\sin\vartheta'.$$

Es ist aber $\varrho' = r\sin\vartheta + tg\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}$, $\cos\vartheta' = \frac{r}{a}\sin\vartheta$, womit sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a}{2} - \frac{r}{a}\sin^2\vartheta\left\{r + \sec\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}\right\}, \\ \text{oder}\quad x' &= \frac{a}{2} - \frac{r}{a}\sin^2\omega t\left\{r + \sec\omega t\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\omega t}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{a}\sin\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}\left\{r + \sec\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}\right\}, \\ \text{oder}\quad y' &= \frac{1}{a}\sin\omega t\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\omega t}\left\{r + \sec\omega t\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\omega t}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Damit sind die Coordinaten des Punktes (C, Γ) als Funktionen der Zeit bestimmt, jedoch mögen der Kürze halber x' und y' beibehalten werden. Nun ist $e = \sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}$, daher

$$V = \frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\omega t}}\sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}, \tag{5}$$

welche Geschwindigkeit sonach periodisch veränderlich ist, wenn der Punkt D seine Bahn durchläuft.

Mit $\alpha = \beta = 0$ ergiebt sich vermöge (5), (3) und (4) als Geschwindigkeit des Mittelpunktes O_1 der Strecke AB

$$V_{o_1} = \frac{r\,\omega \cos \omega t}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} \times \\ \sqrt{\frac{a^2}{4}(1 + 4\,tg^2\,\omega t) - r \sin^2 \omega t \sec \omega t \,(r \sin^2 \omega t \sec \omega t - \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \omega t})} \quad (6)$$

Von besonderem Interesse ist die Geschwindigkeit des Systempunktes B, dessen bewegliche Coordinaten $\frac{a}{2}$ und 0 sind. In diesem Falle ist, wenn wir von den Gleichungen (3) und (4) absehen, $e = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - x'\right)^2 + y'^2} = \varrho'$ gleich dem Fahrstrahle $B\Gamma$ der Curve (Γ), daher die Geschwindigkeit des Punktes B

$$V_B = \frac{r\,\omega \cos \vartheta \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}(r + \sec \vartheta \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}),$$

$$V_B = r\,\omega\left(\sin \vartheta + \frac{r \sin 2\vartheta}{2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}\right) = r\,\omega\left(\sin \omega t + \frac{r \sin 2\,\omega t}{2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}\right). (7)$$

Diese Geschwindigkeit lässt sich aber auch in anderer Weise ableiten, denn sie ist auch gleich $r\,\omega\,\frac{CB}{CA}$. Der Strahl AB schneidet die Ordinatenaxe OY in dem Punkte K. Ziehen wir die Linie KN parallel zu OX, wobei N den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Linie BC bedeutet, so ist, infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke CBA und OKA, $CB : CA = OK : r$, mithin $V_B = r\,\omega\,\frac{OK}{r} = \omega . OK = \omega . BN$. Konstruieren wir demnach für alle Lagen von AB die Punkte N, so liefern dieselben in ihrer Gesamtheit eine Curve (N), deren Ordinatenlängen mit der Winkelgeschwindigkeit ω multipliziert die jeweilige Translationsgeschwindigkeit des Punktes B geben. Die Curve (N) wird die Geschwindigkeitscurve des Punktes B für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ genannt. Mittelst des Dreieckes OAK ergiebt sich $OK : r = \sin(\vartheta + \psi) : \cos \psi$, $OK = r(\sin \vartheta + \cos \vartheta\, tg\,\psi)$, oder, weil $\sin \psi = \frac{r}{a} \sin \vartheta$, also $tg\,\psi = \frac{r \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}$,

$$OK = r \sin \vartheta \left(1 + \frac{r \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}\right),$$

folglich ist

$$V_B = r\,\omega \sin \vartheta \left(1 + \frac{r \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}\right) = r\,\omega\left(\sin \vartheta + \frac{r \sin 2\vartheta}{2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}\right).$$

Wählen wir den Punkt O als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten mit der Abscissenaxe OX, dann sind die Gleichungen der Curve (N)

$$x = \varrho \cos \vartheta = r \cos \vartheta + \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}, \quad y = r \sin \vartheta \left(1 + \frac{r \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta}}\right).$$

Hier haben wir zunächst das Verhältnis $\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma \Gamma_1}{\Gamma_1 \pm \Gamma}$ zu bestimmen. Die Polargleichungen der Curven (C) und (Γ) sind

$$\varrho = a \sin\psi \sec^2\psi, \qquad \varrho' = a \sec^2\psi,$$

und die Formel für den Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten lautet

$$\Gamma = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\psi^2}}.$$

Hiermit ergiebt sich

$$\Gamma = \frac{a}{2}(1 + tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}, \qquad \Gamma_1 = \frac{a \sec^2\psi (1 + 4\, tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{1 - 2\, tg^2\psi}.$$

Mit diesen Werten erhalten wir, beachtend, dass beide Curven gleich gekrümmt sind,

$$\frac{U}{\Omega} = a \sec^2\psi \sqrt{1 + 4\, tg^2\psi}.$$

Zufolge dieses Resultates ist die Winkelgeschwindigkeit um das Momentancentrum

$$\Omega = \frac{U}{a \sec^2\psi \sqrt{1 + 4\, tg^2\psi}} = \frac{c \cos^2\psi}{a\sqrt{1 + 4\, tg^2\psi}}.$$

Diese Geschwindigkeit ist, weil sie eine Funktion des Winkels ψ, eine periodisch veränderliche Grösse. Mit $\psi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ ist $\Omega = \frac{c}{a}$, mit $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ ist $\Omega = 0$. Die Winkelgeschwindigkeit Ω besitzt ihr Maximum $\frac{c}{a}$, wenn das Momentancentrum den festen Punkt O passiert, ihr Minimum 0, wenn C in dem unendlich fernen Punkte seiner Bahn ankommt.

Der Abstand eines beliebigen Systempunktes D von dem Momentancentrum C ist bereits unter b) als Funktion des Winkels ψ dargestellt worden, so dass dessen Geschwindigkeit

$$V = \frac{c \cos^2\psi}{a\sqrt{1 + 4\, tg^2\psi}} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + a^2 \sec^4\psi + 2\, a \sec\psi\, (\alpha - \beta\, tg\,\psi)}.$$

Die Geschwindigkeit des Systempunktes B ist daher $V_B = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\, tg^2\psi}}$, diejenige des Systempunktes O $V_O = \frac{c \sin\psi}{\sqrt{1 + 4\, tg^2\psi}}$. Die Componenten der Geschwindigkeit V_B in paralleler und senkrechter Richtung zu OB sind $V_B \sin\psi$, $V_B \cos\psi$, die erstere giebt die Geschwindigkeit, mit welcher

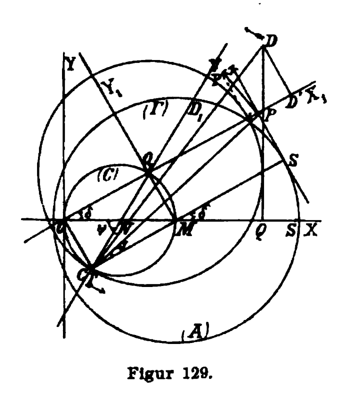
sich die Gerade OB in ihrer Richtung bewegt, die zweite ist diejenige, welche in B die Gerade OB um O dreht. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit der Geraden OB um O mit ω', so ist demnach

$$\omega' = \frac{V_B \cos\psi}{OB} = -\frac{c\cos^2\psi}{a\sqrt{1+4\,tg^2\psi}} = \Omega.$$

Bezeichnet s den in der Zeit t von dem Momentancentrum durchlaufenen Weg, vorausgesetzt, dass zur Zeit $t=0$, C mit O zusammenfällt, dann ist

$$s = ct = \frac{y}{2a}\sqrt{a^2+4y^2} + \frac{1}{4}\,a\,l\left(\frac{2y-\sqrt{a^2+4y^2}}{a}\right),$$

$$s = ct = \frac{a}{2}\,tg\,\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi} + \frac{1}{4}\,a\,l\,(2\,tg\,\psi + \sqrt{1+4\,tg^2\psi}).$$



Figur 129.

5. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass die eine der zwei unter rechtem Winkel sich schneidenden Systemgeraden OP, PS (Fig. 129) stets durch den festen Punkt O geht, die andere, PS, an einem in der Ebene festen Kreise, dessen Mittelpunkt M von O um die Strecke e entfernt, dessen Radius a ist, hingleitet. (Siehe Problem 7, Teil I.)

a) Die Geschwindigkeit des Momentancentrums ist konstant, gleich c. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum? Welches ist die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes?

Die konstanten Krümmungshalbmesser der Curven (C) und (Γ) sind $\Gamma = \frac{e}{2}$, $\Gamma_1 = e$, so dass, weil diese Curven auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen,

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1 - \Gamma} = \frac{\frac{e}{2}\cdot e}{e - \frac{e}{2}} = e.$$

Daher ist die Winkelgeschwindigkeit um das Momentancentrum

$$\Omega = \frac{U}{e} = \frac{c}{e} = \omega,$$

welche sonach während der ganzen Bewegung des Systemes konstant ist.

Für den in der Zeit t von dem Momentancentrum durchlaufenen Bogen OC haben wir, wenn O die Anfangslage von C, mit $\measuredangle ONC = \psi$, $OC = s = ct = \frac{e}{2}\psi$, wodurch $\frac{d\psi}{dt} = 2\frac{c}{e} = 2\omega$. Die Winkelgeschwindigkeit des Momentancentrums ist gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit des Systemes um dasselbe.

Sind $O_1 O = x'$, $OC = y'$ die Coordinaten des Punktes (C, Γ), $O_1 D' = \alpha$, $D'D = \beta$ diejenigen eines beliebigen Systempunktes D für die beweglichen Axen $O_1 X_1$, $O_1 Y_1$, dann ist die Geschwindigkeit V des Punktes D

$$V = \omega\sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}.$$

Nun ist

$$x' = O_1 O = -2 . ON . \sin \measuredangle \frac{ONO_1}{2} = -2 . \frac{e}{2} \sin\left(\frac{\pi - \psi}{2}\right) = e \cos\frac{\psi}{2},$$

$$y' = OC = -2 . ON . \sin \measuredangle ONC = -2 . \frac{e}{2} \sin\frac{\psi}{2} = -e \sin\frac{\psi}{2}.$$

folglich $(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = \left(\alpha + e\cos\frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\beta + e\sin\frac{\psi}{2}\right)^2$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e\left(\alpha\cos\frac{\psi}{2} + \beta\sin\frac{\psi}{2}\right).$$

Mithin erhalten wir, weil $\psi = \frac{2c}{e}t = 2\omega t$,

$$V = \omega\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)}.$$

Die Coordinaten des Punktes P sind $\alpha = a$, $\beta = 0$, wodurch seine Geschwindigkeit

$$V_P = \omega\sqrt{a^2 + e^2 + 2ae\cos\omega t}.$$

Für den mit dem Punkte O_1 zusammenfallenden Systempunkt ist $\alpha = \beta = 0$, daher dessen Geschwindigkeit $V_{O_1} = \omega e = c$, gleich der Geschwindigkeit des Momentancentrums, was auch daraus hervorgeht, dass der Strahl CNO_1 sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 2ω um den Mittelpunkt N des Kreises (C) dreht, welches giebt $V_{O_1} = 2\omega . \frac{e}{2} = \omega e = c$.

Weil $CO_1 = e$, so erhalten wir hierdurch auch $\Omega = \frac{c}{O_1 C} = \frac{c}{e} = \omega$, ohne die Krümmungshalbmesser der Curven (C) und (Γ) zu benutzen. Die Geschwindigkeit des auf dem Kreise (Γ) dem Geschwindigkeitspole C diametral gegenüber liegenden Punktes D_1 ist, weil $CD = 2e$, $2\omega e = 2c$, diejenige des mit O zusammenfallenden Systempunktes, weil für denselben $\alpha = -e\cos\frac{\psi}{2}$, $\beta = 0$, $V_O = c\sin\frac{c}{e}t = c\sin\omega t$.

Alle auf dem Strahle CND_1 liegenden Systempunkte besitzen wäh-

rend der Bewegung des Systemes konstante Geschwindigkeiten, es fragt sich daher, ob es nicht noch weitere Systempunkte mit konstanten Geschwindigkeiten giebt. Die Geschwindigkeit V ist nach der für sie gefundenen Relation konstant, wenn $\alpha \cos\frac{\psi}{2} + \beta \sin\frac{\psi}{2} = 0$, d. i. wenn $\frac{\alpha}{\beta} = -tg\frac{\psi}{2}$, wenn also $\sphericalangle O O_1 D_1 = \pi - \frac{\psi}{2}$, oder $\sphericalangle X_1 O_1 D_1 = \frac{\psi}{2}$ ist. Daraus folgt, dass nur die Systempunkte des Strahles CND_1 konstante Geschwindigkeiten besitzen, für alle übrigen Systempunkte ist die Geschwindigkeit periodisch veränderlich.

Der Winkel $\delta = \sphericalangle POX$ ist $= \frac{\psi}{2} = \omega t$, so dass $\frac{d\delta}{dt} = \omega$, d. h. die Gerade PO dreht sich um den Punkt O mit einer der Winkelgeschwindigkeit Ω gleichen Winkelgeschwindigkeit.

Der Durchmesser des Kreises (Γ) ist doppelt so gross als derjenige der Curve (C), daher wird, wenn die Gerade PO eine volle Umdrehung macht, der Kreis (C) von dem Momentancentrum zweimal beschrieben.

Die Geschwindigkeit des Systempunktes S ist nicht konstant, sondern es ist $V_S = \frac{c}{e} \cdot CS = \frac{c}{e}\left(a + e\cos\frac{\psi}{2}\right) = \omega(a + e\cos\omega t)$.

b) Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist konstant, gleich ω. Wie gross sind U und V?

Weil der Punkt O_1 dieselbe Geschwindigkeit wie der Punkt C besitzt, so ist

$$U = \omega \,.\, CO_1 = \omega e = c,$$

sie folgt auch aus $\frac{U}{\Omega} = e$, womit $U = \Omega \,.\, e = \omega e = c$.

Die Bewegung des Systemes ist mit derjenigen unter a) identisch, daher

$$V = \omega\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)}.$$

c) Die Gerade OP dreht sich um den Punkt O so, dass der Winkel $XOP = \delta$ proportional der Zeit wächst, $\delta = \omega t$ ist. Wie gross ist die Fortschrittsgeschwindigkeit des Momentancentrums, die Winkelgeschwindigkeit um dasselbe und die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes?

Weil $\sphericalangle ONC = 2\delta = 2\omega t$, so ist offenbar

$$Ut = 2\omega t \,.\, \frac{e}{2}, \qquad U = \omega e = c, \qquad \Omega = \frac{\omega e}{CO_1} = \frac{\omega e}{e} = \omega.$$

Die Bewegung des Systemes ist mithin dieselbe wie unter a), so dass

für die Geschwindigkeit V eines beliebigen Systempunktes auch hier der dort gefundene Wert gilt.

d) Der Systempunkt P bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit c in seiner Bahn. Zu bestimmen Ω, V und U.

Für die Entfernung des Punktes P vom Momentancentrum C haben wir, mit $\sphericalangle POX = \delta$,

$\overline{PC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OP}^2 = e^2 \sin^2\delta + (a + e\cos\delta)^2 = a^2 + e^2 + 2\,a\,e\cos\delta$, folglich ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum

$$\Omega = \frac{c}{PC} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + e^2 + 2\,a\,e\cos\delta}}.$$

Der Abstand eines beliebigen Systempunktes D von C ist gegeben durch $\overline{CD}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2\,e\,(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)$, mithin ist die Geschwindigkeit dieses Punktes

$$V = c\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2\,e\,(\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta)}{a^2 + e^2 + 2\,a\,e\cos\delta}},$$

aus welcher Gleichung die Geschwindigkeiten besonderer Systempunkte mit Leichtigkeit abgeleitet werden können.

Der in der Zeit t von dem Geschwindigkeitspole C zurückgelegte Weg (s_1) ist, wenn seine Bewegung vom Punkte O aus beginnt, $s_1 = \frac{e}{2}\cdot 2\,\delta = e\,\delta$, daher ist

$$U = \frac{d\,s_1}{d\,t} = e\frac{d\,\delta}{d\,t}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\,\delta}{d\,t}$ der Geraden OP um O lässt sich bestimmen wie folgt. Die Länge des in der Zeit t, dieselbe gerechnet vom Beginne der Bewegung an, von dem Punkt P durchlaufenen Curvenbogens ist $s = c\,t$, die Gleichung der Bahn (P) in Polarcoordinaten mit dem Ursprunge O und der Polaraxe OX ist $\varrho = a + e\cos\delta$. Das Bogenelement des Bahnbogens s ist allgemein $d\,s = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\,\varrho}{d\,\delta}\right)^2}\,d\,\delta$, folglich weil $\frac{d\,\varrho}{d\,\delta} = -\,e\sin\delta$, $d\,s = \sqrt{(a + e\cos\delta)^2 + e^2\sin^2\delta}\,d\,\delta$

$$= (a + e)\sqrt{1 - \frac{4\,a\,e}{(a+e)^2}\sin^2\frac{\delta}{2}}, \text{ so dass mit } \frac{4\,a\,e}{(a+e)^2} = m^2$$

$$\frac{d\,s}{d\,t} = c = (a + e)\sqrt{1 - m^2\sin^2\frac{\delta}{2}}\frac{d\,\delta}{d\,t}; \quad \frac{d\,\delta}{d\,t} = \frac{c}{(a+e)\sqrt{1 - m^2\sin^2\frac{\delta}{2}}}$$

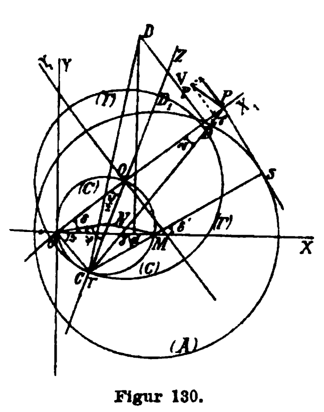
Sonach ist die Geschwindigkeit des Momentancentrums

$$U = \frac{c\,e}{(a+e)\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}}.$$

Es wäre nun noch wünschenswert, den Winkel als Funktion der Zeit darzustellen. Mit $\frac{\delta}{2} = \varphi$ ist

$$s = c\,t = 2\,(a+e)\int \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}\, d\,\varphi + C,$$

woraus φ und sodann δ zu bestimmen wäre. Das hier vorkommende Integral ist aber, weil $m \lesseqgtr 1$, ein elliptisches der zweiten Gattung, weshalb davon abgesehen werden soll.



Figur 130.

6) Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass die eine der zwei Systemgeraden OP, PS, welche einen beliebigen spitzen Winkel $OPS = \gamma$ (Fig. 130) miteinander einschliessen, stets durch den festen Punkt O geht, die andere, PS, an einem in der Ebene des Systemes festliegenden Kreise mit dem Mittelpunkte M, dessen Abstand von O gleich e, und von dem Radius a hingleitet. (Siehe Problem 8, Teil I.)

a) Das Momentancentrum besitzt eine konstante Geschwindigkeit c. Zu bestimmen Ω, V und die Winkelgeschwindigkeit der Geraden OP um O.

Weil hier $\Gamma = \frac{e}{2} \operatorname{cosec} \gamma$, $\Gamma_1 = e \operatorname{cosec} \gamma$, beide Curven (C) und (Γ) auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen, so ist

$$\frac{\Omega}{U} = \frac{\Omega}{c} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma}{\Gamma_1 \cdot \Gamma} = \frac{e \operatorname{cosec} \gamma - \frac{e}{2} \operatorname{cosec} \gamma}{e \operatorname{cosec} \gamma \cdot \frac{e}{2} \operatorname{cosec} \gamma} = \frac{1}{e} \sin \gamma,$$

mithin

$$\Omega = \frac{c}{e} \sin \gamma = \omega.$$

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes D ist, wenn x', y' die Coordinaten des Punktes (C, Γ), $\alpha = O_1 D'$, $\beta = D' D$ diejenigen des Punktes D für die beweglichen Axen $O_1 X_1$, $O_1 Y_1$ sind,

$$V = \omega \sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}.$$

Weil aber $x' = O_1 O = -e \, cosec \, \gamma \, . \, cos \frac{\psi}{2}$, $y' = OC = -e \, cosec \, \gamma \, . \, sin \frac{\psi}{2}$, mit $\sphericalangle ONC = \psi$, so wird $(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = \left(\alpha + e \, cosec \, \gamma \, . \, cos \frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\beta + e \, cosec \, \gamma \, . \, sin \frac{\psi}{2}\right)^2$, so dass, wenn wir die Relation $\psi = 2 \frac{c}{e} sin \, \gamma \, . \, t = 2 \, \omega \, t$ berücksichtigen,

$$V = \omega \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 cosec^2 \gamma + 2 \, e \, cosec \, \gamma \, (\alpha \, cos \, \omega t + \beta \, sin \, \omega t)}.$$

Für den Punkt P ist $\alpha = a \, cosec \, \gamma$, $\beta = 0$, mithin

$$V_P = \omega \, cosec \, \gamma \sqrt{a^2 + e^2 + 2 \, a \, e \, cos \, \omega t}.$$

Ferner sind die Geschwindigkeiten der Systempunkte O_1 und O

$$V_{O_1} = \frac{c}{e} sin \, \gamma \, . \, e \, cosec \, \gamma = c, \quad V_O = \frac{c}{e} sin \, \gamma \, . \, e \, cosec \, \gamma \, . \, sin \frac{\psi}{2} = c \, sin \, \omega t.$$

Der Abstand des Punktes S von C ist $SC = SM + MC = a + e \, cosec \, \gamma \times sin \left(\gamma - \frac{\psi}{2}\right)$, weil $\sphericalangle MNC = 2\gamma - \psi$, daher ist die Geschwindigkeit dieses Punktes $V_S = \omega \{a + e \, cosec \, \gamma \, sin \, (\gamma - \omega t)\}$.

Die Geschwindigkeit des Systempunktes D ist von dem Winkel ψ unabhängig, wenn $\alpha \, cos \frac{\psi}{2} + \beta \, sin \frac{\psi}{2} = 0$, d. i. wenn $\frac{\beta}{\alpha} = - tg \frac{\psi}{2}$; dieses ist mithin der Fall für die auf dem Centralstrahle der Kreise (C) und (Γ) liegenden Systempunkte, denn dieser schliesst mit der Abscissenaxe $O_1 X_1$ den Winkel $\frac{\psi}{2}$ ein. Beispielsweise ist die Geschwindigkeit des Punktes D_1 auf CO_1 und (Γ) $V_{D_1} = \frac{c}{e} sin \, \gamma \, . \, 2 \, e \, cosec \, \gamma = 2 \, c$.

Setzen wir $\sphericalangle POX = \delta$, $\sphericalangle NOM = \varepsilon$, dann ist $\delta = \varepsilon + \frac{\psi}{2}$, $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, $cos \, \varepsilon = sin \, \gamma$, so dass $sin \, \delta = sin \left(\varepsilon + \frac{\psi}{2}\right) = sin \, \varepsilon \, cos \frac{\psi}{2} + cos \, \varepsilon \, sin \frac{\psi}{2} = cos \, \gamma \, cos \frac{\psi}{2} + sin \, \gamma \, sin \frac{\psi}{2} = cos \left(\gamma - \frac{\psi}{2}\right)$,

$$\delta = arc \{sin = cos \, (\gamma - \omega t)\}.$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach t giebt

$$\frac{d \delta}{d t} = \omega = \frac{c}{e} sin \, \gamma.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Systemgeraden PO um O ist daher gleich der Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum.

Setzen wir $\sphericalangle SMX = \delta'$, so ist $\delta' = \frac{\pi}{2} - \left(\gamma + \varepsilon - \frac{\psi}{2}\right) = \varepsilon - \varepsilon$

$+\frac{\psi}{2}=\frac{\psi}{2}=\omega t.$ Dieser Winkel ändert sich mithin proportional dem Winkel ψ, er ist stets gleich der Hälfte von ihm.

Zerlegen wir die Geschwindigkeit V_P des Systempunktes P, welche senkrecht zu CP gerichtet ist, in ihre Componenten parallel und senkrecht zu PO, so sind dieselben mit $\sphericalangle OPC=\nu$

$$V_P \sin\nu = \Omega\,.\,PC\,.\,\frac{OC}{PC} = \Omega\,.\,OC = \frac{c}{e}\sin\gamma\,.\,e\,\mathrm{cosec}\,\gamma \sin\frac{\psi}{2} = 2c\sin\omega t,$$

$$V_P \cos\nu = \Omega\,.\,PC\,.\,\frac{OP}{PC} = \Omega\,.\,OP = \frac{c}{e}\sin\gamma\left(a + e\,\mathrm{cosec}\,\gamma\cos\frac{\psi}{2}\right)$$
$$= \omega\,(a + e\,\mathrm{cosec}\,\gamma\cos\omega t).$$

Die erstere Componente ist die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes P nach O, die letztere ist die OP in P um O drehende Geschwindigkeit. Für die Winkelgeschwindigkeit ω' der Geraden OP um O bekommen wir mithin

$$\omega' = \frac{V_P\cos\nu}{O.P} = \Omega\,.\frac{O.P}{OP} = \Omega = \omega = \frac{d\,\delta}{d\,t},$$

wie oben.

Auch hier wird der Kreis (C) von dem Punkte Γ zweimal durchlaufen, wenn die Gerade OP eine Umdrehung macht.

Mit $\gamma=\frac{\pi}{2}$ schneiden sich die Systemgeraden PO, PS rechtwinkelig (Fig. 129, S. 331), aus obigen Resultaten folgt für diesen Spezialfall, weil dann $\mathrm{cosec}\,\gamma=1$,

$$\Omega=\omega,\quad V=\omega\sqrt{\alpha^2+\beta^2+e^2+2e(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)},$$
$$V_P=\omega\sqrt{a^2+e^2+2ae\cos\omega t},\qquad V_P\sin\nu=2c\sin\omega t,$$
$$V_P\cos\nu=\omega(a+e\cos\omega t),\qquad \omega'=\frac{d\,\delta}{d\,t}=\omega,\quad \text{wie oben unter 5.}$$

b) Das System bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um das Momentancentrum. Wie ist die Geschwindigkeit des Momentancentrums und diejenige eines beliebigen Systempunktes beschaffen?

Weil $\frac{U}{\Omega}=e\,\mathrm{cosec}\,\gamma$, so ist $U=\omega e\,\mathrm{cosec}\,\gamma=c$. Die Bewegungsverhältnisse sind dieselben wie unter a), der weitere Verlauf der Untersuchung ist derselbe wie dort.

c) Die Systemgerade OP dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt O. Zu bestimmen U, Ω und V.

Befindet sich zur Zeit $t=0$ das Momentancentrum in O, so schliesst

die Gerade OP mit der Abscissenaxe den Winkel $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ ein. Zur Zeit $t = t$ macht die Gerade OP mit ihrer Anfangslage den Winkel $\frac{\psi}{2}$, so dass $\frac{\psi}{2} = \omega t$. In derselben Zeit legt der Geschwindigkeitspol den Weg $s = \frac{e}{2} cosec\,\gamma . \psi = \frac{e}{2} cosec\,\gamma . 2\,\omega t = e\,cosec\,\gamma . \omega t$ zurück, mithin ist die Fortschrittsgeschwindigkeit des Momentancentrums

$$U = \frac{ds}{dt} = e\,\omega\,cosec\,\gamma = c$$

und folglich die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um dasselbe

$$\Omega = \frac{U}{C\,O_1} = \frac{e\,\omega\,cosec\,\gamma}{e\,cosec\,\gamma} = \omega.$$

Die Bewegung des Systemes ist hiernach ebenso wie unter a) beschaffen, der weitere Verlauf der Untersuchung mithin derselbe wie dort.

d) Der Systempunkt P bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c in seiner Bahn. Zu bestimmen Ω, U und V.

Für den Abstand des Systempunktes P vom Geschwindigkeitspole C besteht die Relation $\overline{CP}^2 = a^2 + e^2 cosec^2\gamma + 2\,a\,e\,cosec\,\gamma\,cos\frac{\psi}{2}$, folglich ist

$$\Omega = \frac{c}{\sqrt{a^2 + e^2 cosec^2\gamma + 2\,a\,e\,cosec\,\gamma\,cos\frac{\psi}{2}}}$$

und, weil $U : \Omega = e\,cosec\,\gamma$,

$$U = \frac{c\,e\,cosec\,\gamma}{\sqrt{a^2 + e^2 cosec^2\gamma + 2\,a\,e\,cosec\,\gamma\,cos\frac{\psi}{2}}}.$$

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes ist mit $\frac{\psi}{2} = \delta'$

$$V = c\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 cosec^2\gamma + 2\,e\,cosec\,\gamma\,(\alpha\,cos\,\delta' + \beta\,sin\,\delta')}{a^2 + e^2 cosec^2\gamma + 2\,a\,e\,cosec\,\gamma\,cos\,\delta'}}.$$

Die Darstellung des Winkels $\delta' = \frac{\psi}{2}$ als Funktion der Zeit führt zu keinem einfachen Resultate. Es ist $\delta' = \delta - \varepsilon = \delta - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, so dass, wenn δ als Funktion der Zeit bekannt ist, auch δ' durch die Zeit ausgedrückt werden kann. Die Gleichung der Curve (P) ist nach 7, Teil I, $(x^2 + y^2 - e\,x - \mu\,y)^2 = a^2 cosec^2\gamma\,(x^2 + y^2)$, woraus als Polargleichung folgt

$$\varrho = a\,cosec\,\gamma + e\,cos\,\delta + \mu\,sin\,\delta.$$

Damit ist für das Bogenelement ds der Bahn (P), wenn $\mu^2 + e^2 + a^2 cosec^2 \gamma = m$, $2 a cosec \gamma = n$ gesetzt wird,

$$ds^2 = \{ m + n (e \cos \delta + \mu \sin \delta) \} d\delta^2,$$

Fällt nun zur Zeit $t = 0$ die Gerade PO mit der Abscissenaxe zusammen, so ist

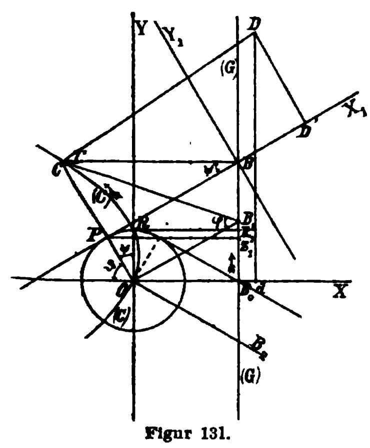
$$s = ct = \int_0^\delta \sqrt{m + n (e \cos \delta + \mu \sin \delta)}\, d\delta,$$

womit eine Relation zwischen δ und t gegeben ist, durch welche δ aber nicht in einfacher Form als Funktion der Zeit ausgedrückt werden kann. Am einfachsten erhalten wir den Winkel δ und sodann den Winkel δ' dadurch, dass wir die Strecke $s = ct$ durch Konstruktion auf (P) von der Abscissenaxe aus aufwickeln, sodann O mit dem Endpunkte des erhaltenen Bogens durch eine Gerade verbinden, welche die entsprechende Lage von OP giebt u. s. f.

Noch folgt, wenn die Gleichung für ds^2 auf beiden Seiten mit dt^2 geteilt und beachtet wird, dass $\frac{ds}{dt} = c$, für die Winkelgeschwindigkeit der Geraden PO um O

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{c}{\sqrt{m + n (e \cos \delta + \mu \sin \delta)}}.$$

Mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ gehen die erhaltenen Resultate in diejenigen für denselben Fall unter 5) über.



Figur 131.

7. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass ein bestimmter Punkt B einer Systemgeraden die feste Gerade (G) beschreibt und diese Systemgerade zugleich stets einen festen Kreis (R) mit dem Mittelpunkte O und dem Radius $OR = r$ berührt, wobei der Punkt O von der Geraden (G) um die Strecke $OB_0 = a$ entfernt ist. (Siehe Problem 5, Teil I.) (Figur 131.)

Wir verwerten hier die Resultate und Bezeichnungen im ersten Teile. Die Polargleichung der Curve (C) ist $\varrho = (r + a \cos \vartheta) \times cosec^2 \vartheta$, diejenige der Curve (Γ) mit B_0 als Pol und $B_0 X$ als Polaraxe $(a^2 - r^2) \varrho'^2 \cos^4 \varphi + 2 a^2 r \varrho' \sin \varphi \cos^2 \varphi = a^4$. Den Winkel $PBC = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ setzen wir in der Folge gleich ψ.

a) Die Geschwindigkeit des Punktes B ist konstant und gleich c. Die Bewegung desselben erfolgt in der Richtung $B_0 B$, zur Zeit $t = 0$ fällt der Punkt B mit B_0, das Momentancentrum mit dem Punkte O zusammen. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum, die Geschwindigkeit des Momentancentrums und diejenige eines beliebigen Systempunktes?

Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist $\Omega = \frac{c}{BC}$ und weil $BC = (a + r\sin\psi)\sec^2\psi$

$$\Omega = \frac{c}{(a + r\sin\psi)\sec^2\psi} = \frac{c\cos^2\psi}{a + r\sin\psi}. \tag{1}$$

Ist nicht der Winkel ψ, sondern die Zeit t der Bewegung des Punktes B von B_0 bis B gegeben, so haben wir Ω als Funktion der Zeit darzustellen. Der Weg des Punktes B in der Zeit t ist

$$B_0 B = s = a\,tg\,\psi + r\sec\psi = ct.$$

Damit ergiebt sich durch eine einfache Rechnung

$$\sin\psi = -\frac{1}{a^2 + c^2 t^2}(ar \mp ct\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}) = \cos\vartheta, \tag{2}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{a^2 + c^2 t^2}(crt \pm a\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}) = \sin\vartheta, \tag{3}$$

Nun folgt aus (1), (2), (3)

$$\Omega = \frac{c(crt \pm a\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2})^2}{(a^2 + c^2 t^2)\{a(a^2 + c^2 t^2) - ar^2 \pm crt\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}\}}. \tag{4}$$

Hier gelten offenbar die oberen Zeichen so lange als $\sin\psi$ positiv ist.

Mit (2) und (3) sind die Winkel ψ und ϑ als Funktionen der Zeit

$$\psi = arc\left\{\cos = \frac{crt \pm a\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}}{a^2 + c^2 t^2}\right\} = arc\{\cos = u\}, \tag{5}$$

$$\vartheta = arc\left\{\sin = \frac{crt \pm a\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}}{a^2 + c^2 t^2}\right\} = arc\{\sin = u\}. \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich durch Differentiation nach t für die Winkelgeschwindigkeiten der Geraden PB und OC um P und O

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$= \frac{2ct\{crt \pm a\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}\} - (a^2 + c^2 t^2)\left\{cr \pm \frac{ac^2 t}{\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}}\right\}}{(a^2 + c^2 t^2)\sqrt{(a^2 + c^2 t^2)^2 - \{crt \pm a\sqrt{a^2 - r^2 + c^2 t^2}\}^2}}, \tag{7}$$

welche absolut genommen von gleicher Grösse sind.

Bezeichnet ds das Bogenelement der Curve (C), so ist die Ge-

schwindigkeit des Momentancentrums $U = \frac{ds}{dt}$. Aus der Polargleichung $\varrho = (r + a \sin\psi) \sec^2\psi$ der Curve (C) folgt

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2 = \sec^4\psi \{ (1 + 4 tg^2\psi)(r + a \sin\psi)^2 + a^2 \cos^2\psi + 4 a \sin\psi (r + a \sin\psi) \} d\psi^2,$$

mithin ist

$$\left.\begin{array}{l} U = \frac{ds}{dt} = \sec^2\psi \frac{d\psi}{dt} \times \\ \sqrt{(1 + 4 tg^2\psi)(r + a \sin\psi)^2 + a^2 \cos^2\psi + 4 a \sin\psi (r + a \sin\psi)}. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Durch diese Gleichung ist die Geschwindigkeit U vollständig bestimmt, denn $\frac{d\psi}{dt}$ und die goniometrischen Funktionen des Winkels ψ sind bereits als Funktionen der Zeit bekannt.

Um die Geschwindigkeit V eines beliebigen Systempunktes D zu bestimmen, setzen wir die Coordinaten der Punkte D und (C, Γ) für die beweglichen Axen BX_1, BY_1, $BD' = \alpha$, $D'D = \beta$, $BP = x'$, $PC = y'$, womit

$$V = \Omega \sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}.$$

Es ist aber $x' = BP = -(a + r \sin\psi) \sec\psi$, $y' = PC = (a + r \sin\psi) \sin\psi \sec^2\psi$, wodurch $(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (a + r \sin\psi)^2 \sec^4\psi + 2 (\alpha - \beta\, tg\psi)(a \sec\psi + r\, tg\psi)$ wird, so dass hiermit und mit (1)

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{c \cos^2\psi}{a + r \sin\psi} \times \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (a + r \sin\psi)^2 \sec^4\psi + 2 (\alpha - \beta\, tg\psi)(a \sec\psi + r\, tg\psi)}. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Hieraus lassen sich bequem die Geschwindigkeiten besonderer Systempunkte ableiten.

Mit $r = 0$ wird der Kreis (K) zu dem Punkte O, die Curve (C) zu einer gemeinen Parabel, es erscheint das unter 4) behandelte Problem und geben die oben erhaltenen Resultate für diesen Fall

$$\Omega = \frac{c}{a} \cos^2\psi = \frac{a c}{a^2 + c^2 t^2}, \quad \psi = arc\left(\cos = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2 t^2}}\right).$$

$$\vartheta = arc\left(\sin = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2 t^2}}\right), \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{a c}{a^2 + c^2 t^2} = \Omega.$$

$$U = a \sec^2\psi \frac{d\psi}{dt} \sqrt{1 + 4 tg^2\psi} = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 + 4 c^2 t^2},$$

$$V = \frac{c}{a} \cos^2\psi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2 a \sec\psi (\alpha - \beta\, tg\psi)}$$

$$= \frac{c}{a^2 + c^2 t^2} \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) a^2 + (a^2 + c^2 t^2)^2 + 2 a (a \alpha - \beta c t) \sqrt{a^2 + c^2 t^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Zur Zeit $t = 0$, wenn das Momentancentrum mit dem Punkte O zusammenfällt, ist $\psi = 0$,

$$\Omega = \frac{c}{a}, \quad U = c, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{a}.$$

b) Das Momentancentrum C schreitet so in seiner Bahn fort, dass der Winkel $COY = \psi$ direkt proportional der Zeit sich ändert. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Momentancentrum in R, dem höchsten Punkte des Kreises (R), falle also die Systemgerade BP mit der zur Abscissenaxe parallelen Linie RR_1 zusammen, zur Zeit $t = t$ in C, welchem Punkte die Lage BP der beweglichen Geraden entspricht, und es sei $\sphericalangle COY = \sphericalangle CBP = \sphericalangle B_1OB_0 = \psi = \omega t$. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum, die Geschwindigkeit des Momentancentrums und diejenige eines beliebigen Systempunktes?

Die Projektion des Curvenbogens RC, welcher von dem Momentancentrum in der Zeit t beschrieben wird, auf die Gerade (G) ist die in derselben Zeit von dem Punkte B durchlaufene Bahn $R_1B = B_0B - r = \frac{a \sin\psi + r}{\cos\psi} - r = a\, tg\, \psi + r(\sec\psi - 1)$, so dass, wenn wir dieselbe mit s_1 bezeichnen,

$$s_1 = a\, tg\, \omega t + r(\sec \omega t - 1).$$

Aus dieser Gleichung folgt als Geschwindigkeit des Punktes B

$$V_B = \frac{ds_1}{dt} = \frac{a\omega}{\cos^2 \omega t} + r\omega . \frac{\sin \omega t}{\cos^2 \omega t} = \omega \sec^2 \omega t (a + r \sin \omega t).$$

Daher ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum

$$\Omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{\omega \sec^2 \omega t (a + r \sin \omega t)}{(a + r \sin\psi) \sec^2\psi} = \frac{\omega \sec^2 \omega t (a + r \sin \omega t)}{\sec^2 \omega t (a + r \sin \omega t)} = \omega,$$

sie ist gleich der Winkelgeschwindigkeit der Geraden BP.

Die Geschwindigkeit des Momentancentrums C ist $U = \frac{ds}{dt}$. Unter a) wurde gezeigt, dass

$$\frac{ds}{dt} = \sec^2\psi \frac{d\psi}{dt} \times$$
$$\sqrt{(1 + 4\, tg^2 \psi)(r + a \sin^2\psi)^2 + a^2 \cos^2\psi + 4 a \sin\psi (r + a \sin\psi)},$$

mithin erhalten wir im vorliegenden Falle, weil hier $\psi = \omega t, \frac{d\psi}{dt} = \omega$,

$$U = \omega \sec^2 \omega t \times$$
$$\sqrt{(1 + 4\, tg^2 \omega t)(r + a \sin \omega t)^2 + a^2 \cos^2 \omega t + 4 a \sin \omega t (r + a \sin \omega t)}.$$

Die Geschwindigkeit U wächst mit der Zeit; zur Zeit $t = 0$ ist $U = \omega\sqrt{a^2 + r^2}$, zur Zeit $t = \infty$ ist $U = \infty$. Die Bahnen RC und R_1B werden von den Punkten C und B in gleicher Zeit beschrieben.

Ist s_1 gegeben, so lässt sich leicht eine Gleichung für die Zeit aufstellen. Wir haben die Relation

$$s_1 + r = a\,tg\,\omega t + r\,sec\,\omega t = a\,tg\,\omega t + r\sqrt{1 + tg^2\,\omega t},$$

aus ihr folgt

$$tg\,\omega t = \frac{1}{a^2 - r^2}\left\{a(s_1 + r) \pm r\sqrt{a^2 + 2rs_1 + s_1^2}\right\},$$

$$t = \frac{1}{\omega}\,arc\left\{tg = \frac{a(s_1 + r) \pm r\sqrt{a^2 + 2rs_1 + s_1^2}}{a^2 - r^2}\right\}.$$

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes D ist, wenn wir das für die Strecke $CD = \sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}$ unter a) entwickelte Resultat beachten,

$$V = \omega\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (a + r\,sin\,\omega t)^2\,sec^4\,\omega t + 2(\alpha - \beta\,tg\,\omega t)(a\,sec\,\omega t + r\,tg\,\omega t)}.$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Punktes B, dessen Coordinaten $\alpha = 0$, $\beta = 0$ sind,

$$V_B = \omega(a + r\,sin\,\omega t)\,sec^2\,\omega t,$$

wie oben. Die Geschwindigkeit des Systempunktes O ist, weil $OC = (a\,tg\,\psi + r\,sec\,\psi)\,sec\,\psi$,

$$V_O = \omega(a\,tg\,\omega t + r\,sec\,\omega t)\,sec\,\omega t.$$

Die Rechnung gestaltet sich in ganz gleicher Weise, wenn der Punkt B von R_1 aus sich in entgegengesetzter Richtung bewegt, wir haben dann nur zu beachten, dass die Gerade OC sich dabei ebenfalls entgegengesetzt dreht und die Linie OB_1 allmählich unter die Abscissenaxe in die Lage OB_2 rückt.

Mit $r = 0$ kommen wir auf das Problem 4 zurück. Die soeben erhaltenen Resultate geben mit diesem Werte von r

$$\Omega = \omega, \qquad U = a\,\omega\,sec^2\,\omega t\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\omega t}, \qquad t = \frac{1}{\omega}\,arc\left(tg = \frac{s_1}{a}\right),$$

$$V = \omega\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + a^2\,sec^4\,\omega t + 2\,a\,sec\,\omega t\,(\alpha - \beta\,tg\,\omega t)},$$

$$V_B = a\,\omega\,sec^2\,\omega t, \qquad V_O = a\,\omega\,tg\,\omega t\,.\,sec\,\omega t.$$

c) Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist konstant, gleich ω. Wie sind die Grössen U und V beschaffen, wenn der Geschwindigkeitspol C in der Zeit von $t = 0$ bis $t = t$ den Bogen RC seiner Bahn beschreibt?

Die Projektion des Curvenbogens RC auf die Gerade (G) ist der in der Zeit t vom Punkte B zurückgelegte Weg $R_1B = s_1 = a\,tg\,\psi + r(sec\,\psi - 1)$, mithin ist die Geschwindigkeit des Punktes B

$$V_B = \frac{ds_1}{dt} = (a + r\,sin\,\psi)\,sec^2\,\psi\,\frac{d\psi}{dt},$$

aber es ist auch

$$V_B = \omega\,.\,BC = \omega\,.\,(a + r\,sin\,\psi)\,sec^2\,\psi,$$

wodurch aus diesen beiden Gleichungen folgt

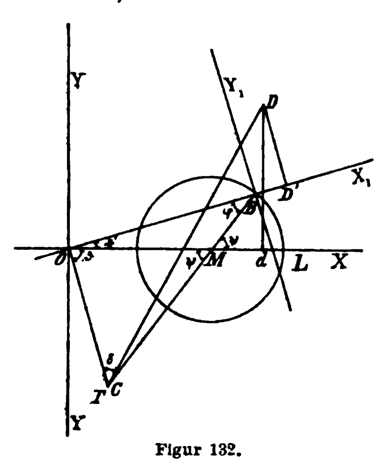
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \psi = \omega t,$$

d. h. der Winkel ψ wächst direkt proportional der Zeit und es ist

$$V_B = \omega (a + r \sin \omega t) \sec^2 \omega t.$$

Die Bewegung des Systemes ist sonach dieselbe wie unter b) und sind die Geschwindigkeiten U, V ebenso wie dort zu bestimmen, es ergeben sich für dieselben die nämlichen Werte.

8. **Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass eine seiner durch einen festen Punkt O gehenden Geraden BO mit dem Punkte B einen festen Kreis (R) beschreibt. Der Mittelpunkt M (Fig. 132) dieses Kreises vom Halbmesser r ist von dem festen Punkte O um die Strecke $OM = e$ entfernt. Der Punkt B bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit c in seiner Bahn. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum, die Geschwindigkeit des Momentancentrums und diejenige eines beliebigen Systempunktes, wenn $e > r$ ist?**



Figur 132.

Wir verwenden die im ersten Teile für dieses Problem (Aufgabe 6) erhaltenen Resultate, behalten die dort eingeführten Bezeichnungen bei, setzen nur hier $\sphericalangle BMX = \sphericalangle CMO = \psi$. Zur Zeit $t = 0$ sei $\psi = 0$, falle die Gerade MB mit der Abscissenaxe zusammen, sei das Momentancentrum in O. Zur Zeit $t = t$ befindet sich der Systempunkt mit der gegebenen Geschwindigkeit in B, ihm entspricht das Momentancentrum C.

In der Zeit t durchläuft der Punkt B den Weg $LB = ct = r\psi$, so dass $\psi = \frac{c}{r} t = \omega t$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Geraden MB um M bedeutet.

Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist $\Omega = \frac{c}{BC} = \frac{\omega r}{BC}$.

Wir haben gefunden, dass die Polargleichung der Curve (C) mit M

als Pol, OM als Polaraxe, $MC = \varrho$ als Radiusvektor und ψ als Polarwinkel $\varrho = \frac{e + r\cos\psi}{r + e\cos\psi} \cdot e$, so dass $BC = \varrho + r = \frac{e^2 + r^2 + 2er\cos\psi}{r + e\cos\psi}$, mithin ergiebt sich

$$\Omega = \omega \frac{r^2 + er\cos\omega t}{e^2 + r^2 + 2er\cos\omega t}.$$

Weil $\omega t = \psi$, so ist mit wachsendem ψ diese Winkelgeschwindigkeit periodisch veränderlich.

Bezeichnet ds das Bogenelement der Curve der Momentancentra, so ist die Geschwindigkeit des Momentancentrums $U = \frac{ds}{dt}$. Aus der vorhin angeschriebenen Polargleichung dieser Curve folgt

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2 = \left\{\frac{e^2\sin^2\psi}{(r + e\cos\psi)^4}(e^2 - r^2)^2 + e^2\frac{(e + r\cos\psi)^2}{(r + e\cos\psi)^2}\right\} d\psi^2,$$

mithin ist

$$U = \frac{ds}{dt} = \frac{e}{(r + e\cos\psi)^2}\frac{d\psi}{dt}\sqrt{(e^2 - r^2)^2\sin^2\psi + (e + r\cos\psi)^2(r + e\cos\psi)^2},$$

oder, weil $\psi = \omega t$, $\frac{d\psi}{dt} = \omega$,

$$U = \frac{\omega e}{(r + e\cos\omega t)^2}\sqrt{(e^2 - r^2)^2\sin^2\omega t + (e + r\cos\omega t)^2(r + e\cos\omega t)^2}.$$

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes D ist, wenn für die beweglichen Axen BX_1, BY_1 die Coordinaten des Punktes D, $BD' = \alpha$, $D'D = \beta$, diejenige des Punktes $(C, \Gamma) - BO = x'$, $-OC = y'$ gesetzt werden,

$$V = \Omega . CD = \Omega\sqrt{(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2}.$$

Aus dem Dreiecke OMB geht sofort hervor, dass

$$\overline{BO}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2 + 2 . OM . MB . \cos\psi = e^2 + r^2 + 2er\cos\psi.$$

Ferner ist OC der Fahrstrahl der Curve (C), wenn O Pol, OX Polaraxe und ϑ Polarwinkel, so dass

$$OC = e\cos\vartheta + \frac{e^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}}.$$

Aber wir haben $\vartheta = \frac{\pi}{2} - (\psi - \varphi)$, $\sin\varphi = \frac{e}{r}\cos\vartheta$, daraus folgt

$$\cos\vartheta = \frac{r\sin\psi}{\sqrt{e^2 + r^2 + 2er\cos\psi}}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{1 - \frac{r^2\sin^2\psi}{e^2 + r^2 + 2er\cos\psi}},$$ mit

welchen Werten wir erhalten

$$OC = \frac{e\sin\psi}{r + e\cos\psi}\sqrt{e^2 + r^2 + 2er\cos\psi}.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich mittelst der Relation $OC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BO}^2}$.

Daher ist $\overline{CD}^2 = (\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = (\alpha + \sqrt{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\psi})^2$

$$+ (\beta + \frac{e\sin\psi}{r + e\cos\psi}\sqrt{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\psi})^2.$$

Mit den Werten von Ω und CD gelangen wir nach einer kleinen Rechnung zu

$$V = \omega\,\frac{r^2 + e\,r\cos\omega t}{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\omega t}\Big\{\alpha^2 + \beta^2 + \Big(\frac{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\omega t}{r + e\cos\omega t}\Big)^2$$

$$+ 2\frac{\sqrt{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\omega t}}{r + e\cos\omega t}\left[\alpha\,(r + e\cos\omega t) + \beta\sin\omega t\right]\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Von besonderem Interesse ist die Geschwindigkeit des mit dem festen Punkte O zusammenfallenden Systempunktes, sein Abstand von dem Momentancentrum ist die bereits bekannte Strecke OC, seine Coordinaten sind $\alpha = -BO$, $\beta = 0$, daher ist

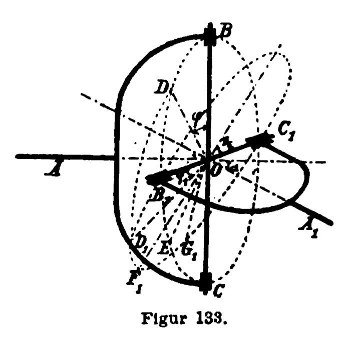
$$V_O = \frac{\omega\,r\sin\omega t}{\sqrt{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\omega t}}.$$

Der in der Zeit t von dem Fahrstrahle OC beschriebene Winkel ist

$$\vartheta = arc\Big(\cos = \frac{r\sin\omega t}{\sqrt{e^2 + r^2 + 2\,e\,r\cos\omega t}}\Big).$$

Damit sind die Hauptdaten für diese Bewegung gegeben. Die speziellere Bearbeitung dieses für den Maschinenbau wichtigen Bewegungsproblemes mag dem Studierenden anheimgestellt bleiben; es sei nur noch bemerkt, dass die Geschwindigkeitscurve derjenigen Systempunkte, welche successive mit dem Punkte O zusammenfallen, sich eben so leicht konstruieren lässt wie diejenige des gerad geführten Punktes beim gewöhnlichen Curbelgetriebe.

9. Das Universalgelenk von Cardano. Dieser Mechanismus dient zur Verbindung zweier Wellen A und A_1 (Fig. 133), deren Axenrichtungen in O unter einem beliebigen spitzen Winkel α sich schneiden, er besteht aus einem beweglichen rechtwinkeligen Kreuze $B\,C\,B_1\,C_1$ mit zapfenförmigen Enden, welche durch die bügelförmigen Enden $B\,A\,C$ und $B_1\,A_1\,C_1$ der zu verbindenden Wellen A und A_1 gesteckt werden. Die Winkelgeschwindigkeiten der Wellen A und A_1 seien ω und ω_1 resp. Die Punkte B und C bewegen sich in einer zur Axe AO, die Punkte B_1 und C_1 in einer zur Axe A_1O senkrechten Ebene, beide Ebenen schneiden sich in der Geraden $B_1\,O\,C_1$. Denken wir uns um den Punkt O als Mittelpunkt mit dem Radius $OB = OB_1$ eine Kugel beschrieben,



Figur 133.

so wird diese Kugelfläche von den genannten Ebenen, die ebenfalls den Winkel α mit einander einschliessen, in zwei grössten Kreisen geschnitten.

Dreht sich die Axe A um irgend einen Winkel $BOD = \varphi$, dann wird sich die Axe A_1 um einen Winkel $B_1 O D_1 = \varphi_1$, welcher von φ verschieden sein wird, drehen. Weil bei dieser Drehung die Kreuzlinien immer gegen einander senkrecht bleiben, so muss $\measuredangle D O D_1 = \frac{\pi}{2}$ sein. Durch die drei Geraden OB_1, OD_1 und OD wird aus der Kugelfläche das sphärische Dreieck $D_1 B_1 D$ herausgeschnitten. Es ist $\measuredangle DOD_1 = \frac{\pi}{2}$, $\measuredangle DOB_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\measuredangle D_1 O B_1 = \varphi_1$, dem Winkel DOD_1 liegt der Winkel $\pi - \alpha$ gegenüber. Zufolge der Grundgleichung $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ der sphärischen Trigonometrie besteht demnach hier die Relation

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos\varphi_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi_1 \cos(\pi - \alpha),$$

das ist
$$0 = \sin\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\sin\varphi_1\cos\alpha,$$

woraus folgt
$$tg\,\varphi_1 : tg\,\varphi = 1 : \cos\alpha.$$

Um die Winkelgeschwindigkeiten ω und ω_1 in Rechnung ziehen zu können, differentiieren wir diese Gleichung mit Rücksicht auf die Veränderlichen φ und φ_1, was giebt

$$\frac{d\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi}.$$

Es ist aber $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$, daher $\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1}{\omega}$, mithin

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos\alpha\cos^2\varphi\,(1 + tg^2\varphi_1)},$$

und weil $tg\,\varphi_1 = \frac{1}{\cos\alpha}\,tg\,\varphi$,

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{\cos\alpha\cos^2\varphi\left(1 + \frac{tg^2\varphi}{\cos^2\alpha}\right)} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi\,(\cos^2\alpha + tg^2\varphi)}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \sin^2\varphi}, \qquad \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}, \qquad (1)$$

womit eine Beziehung zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Wellen A und A_1 gefunden ist.

Mit $\varphi = 0$ ist $\varphi_1 = 0$, also $\varphi = \varphi_1$, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist auch $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $tg\,\varphi = tg\,\varphi_1 = \infty$. Für alle zwischen diesen Grenzen liegenden Werte

von φ ist $\varphi_1 > \varphi$, die getriebene Welle eilt also der treibenden Welle immer voraus.

Setzen wir in der letzten Gleichung die Winkelgeschwindigkeiten einander gleich, dann folgt

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \text{ d. i. } tg\, \varphi = \sqrt{\cos \alpha}, \text{ oder } \varphi = arc\,(tg = \sqrt{\cos \alpha}).$$

wodurch der Winkel φ gefunden ist, dem gleiche Winkelgeschwindigkeiten beider Wellen entsprechen. Setzen wir den Bogen $B_1 E = \psi$, also den Weg $B E = \frac{\pi}{2} + \psi$, den Bogen $F_1 G_1 = \psi_1$, also den Weg $B_1 G_1 = \frac{\pi}{2} + \psi_1$, so ist $tg\, \varphi = -\cot g\, \psi$, $tg\, \varphi_1 = -\cot g\, \psi_1$, folglich $tg\, \varphi_1 : tg\, \varphi = tg\, \psi : tg\, \psi_1$. Hiernach ist die Bewegung im zweiten Quadranten umgekehrt wie im ersten Quadranten. Wächst α über π hinaus, dann findet eine abermalige Umkehrung, also eine Rückkehr zum ursprünglichen Änderungsgesetze des Verhältnisses $\omega_1 : \omega$ für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ statt, u. s. f.

Aus (1) folgt, dass mit $\cos \varphi = 0$, d. i. mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$, die Winkelgeschwindigkeit ω_1 ein Maximum, mit $\cos \varphi = 1$, d. i. mit $\varphi = 0$, dieselbe ein Minimum wird, und zwar ist

$$max\, \omega_1 = \frac{\omega}{\cos \alpha}, \qquad min\, \omega_1 = \omega \cos \alpha.$$

Die mittlere Geschwindigkeit m der Welle A_1 ist bei konstanter Winkelgeschwindigkeit der Welle A gleich dem Quotienten aus der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit der Welle A_1, daher

$$m = \frac{\frac{\omega}{\cos \alpha}}{\omega \cos \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + tg^2 \alpha.$$

Unter dem Ungleichförmigkeitsgrad δ einer Bewegung versteht man die Differenz aus der grössten und kleinsten Geschwindigkeit, geteilt durch die konstante Geschwindigkeit, so dass

$$\delta = \frac{max\, \omega' - min\, \omega'}{\omega} = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Der Ungleichförmigkeitsgrad hängt demnach lediglich von dem Winkel α ab, je grösser dieser Winkel, um so ungleichförmiger wird die Bewegung, wie aus nachstehender Tabelle ersichtlich ist.

$\alpha =$	10^0	20^0	30^0	45^0
$m =$	$1 \cdot 031$	$1 \cdot 132$	$1 \cdot 333$	$2 \cdot 0$
$\delta =$	$\frac{1}{32 \cdot 67}$	$\frac{1}{8 \cdot 033}$	$\frac{1}{3 \cdot 464}$	$\frac{1}{1 \cdot 440}$.

Gewöhnlich pflegt man den Ungleichförmigkeitsgrad einer Bewegung durch einen Bruch, welcher die Einheit zum Zähler hat, darzustellen.

Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II, S. 157—159.

Zweites Kapitel.

Die Beschleunigung im unveränderlichen Systeme.

Ein ebenes System bewegt sich in seiner Ebene.

Sind Γ, Γ_1 die Krümmungshalbmesser der Curven (C) und (Γ) für ihren augenblicklichen Berührungspunkt, ist U die Geschwindigkeit des Momentancentrums, Ω die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum, dann besteht die Relation

$$\frac{U}{\Omega}=\frac{\Gamma \cdot \Gamma_1}{\Gamma_1 \pm \Gamma},$$

und es gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die benachbarten Teile von (C) und (Γ) auf entgegengesetzte Seiten oder auf dieselbe Seite der gemeinschaftlichen Tangente fallen.

Bezeichnet r den Abstand eines beliebigen Systempunktes D vom Momentancentrum C, so sind die Componenten seiner Beschleunigung

$$r\frac{d\,\Omega}{dt}, \qquad \Omega^2 r, \qquad \Omega\, U,$$

wovon die erste senkrecht zur Linie CD, die zweite nach C und die dritte senkrecht zur Tangente der Curve (C) im Sinne der Winkelgeschwindigkeit Ω gerichtet ist.

Die Componenten X, Y der Beschleunigung des Systempunktes D in paralleler Richtung zu der Tangente und der Normalen der Curve der Momentancentra für den Punkt C sind, wenn die Tangente als Axe der x und positiv im Sinne der Geschwindigkeit U, die Normale als Axe der y und positiv im Sinne der Beschleunigung $\Omega\, U$ gewählt werden,

$$X=-\Omega^2 x+\frac{d\,\Omega}{dt}y, \qquad Y=-\Omega^2 y-\frac{d\,\Omega}{dt}x+\Omega\, U.$$

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zu der Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden

$$-\Omega^2 x+\frac{d\,\Omega}{dt}y=0,$$

welche durch das Momentancentrum geht und mit der Abscissenaxe CX den Winkel $\operatorname{arc}\left(tg=\Omega^2\frac{dt}{d\,\Omega}\right)$ einschliesst.

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zu der Tangente der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden

$$-\frac{d\,\Omega}{dt}x-\Omega^2 y+\Omega\, U=0,$$

dieselbe schneidet von den Coordinatenaxen CX, CY die Stücke $\Omega\, U \cdot \frac{dt}{d\,\Omega}$, $\frac{U}{\Omega}$ ab,

sie ist von dem Momentancentrum um die Strecke $\delta = \frac{\Omega U}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}}$ entfernt. Die eben genannten Geraden stehen aufeinander senkrecht.

Es giebt im allgemeinen nur einen einzigen Systempunkt, welcher momentan die Beschleunigung Null besitzt, er heisst Beschleunigungscentrum oder Beschleunigungspol. Sind x_1, y_1 die Coordinaten dieses Punktes bezüglich der genannten Axen, so ist

$$x_1 = \frac{\Omega \frac{d\Omega}{dt} U}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}, \qquad y_1 = \frac{\Omega^3 U}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}.$$

Das Beschleunigungscentrum fällt mit dem Durchschnittspunkte der Geraden $X = 0$, $Y = 0$ zusammen. Für die Componenten der Beschleunigung φ eines beliebigen Systempunktes bestehen noch die Relationen

$$X = -\Omega^2 (x - x_1) + (y - y_1) \frac{d\Omega}{dt}, \qquad Y = -\Omega^2 (y - y_1) - (x - x_1) \frac{d\Omega}{dt},$$

$$X = -\Omega^2 \xi + \frac{d\Omega}{dt} \eta, \qquad Y = -\Omega^2 \eta - \frac{d\Omega}{dt} \xi,$$

in welchen die Geschwindigkeit des Momentancentrums nicht vorkommt und die beiden letzten Gleichungen sich auf das mit seinem Ursprunge nach dem Beschleunigungspole verlegte Coordinatensystem beziehen.

Bei der Bewegung eines ebenen Systemes zerfällt die Beschleunigung φ eines jeden Systempunktes jeden Augenblick in zwei Componenten, von denen die eine die Richtung der den Systempunkt und das Beschleunigungscentrum verbindenden Geraden besitzt, die andere zu dieser Linie rechtwinkelig ist. Ist p der Abstand eines beliebigen Systempunktes vom Beschleunigungspole, sind φ_1, φ_2 diese Componenten seiner Beschleunigung φ, so haben wir

$$\varphi_1 = \Omega^2 p, \qquad \varphi_2 = p \frac{d\Omega}{dt}, \qquad \varphi = p \sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2},$$

und die Acceleration φ ist gegen die Verbindungslinie des Systempunktes mit dem Beschleunigungspole unter einem Winkel $arc\left(tg = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \frac{d\Omega}{dt}\right)$ geneigt.

Die Punkte gleicher Beschleunigung β liegen auf einem um das Beschleunigungscentrum als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{\beta \delta}{\Omega U}$ beschriebenen Kreise, seine Gleichung lautet

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\beta^2}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}.$$

Die Componenten der Beschleunigung φ eines beliebigen Systempunktes in der Richtung der Verbindungslinie dieses Punktes und des Momentancentrums, sowie senkrecht dazu sind die Normalcomponente φ_n und die Tangentialcomponente φ_t, für welche die Relationen bestehen

$$\varphi_n = X \frac{x}{r} + Y \frac{y}{r} = -\Omega^2 r + \Omega U \frac{y}{r} = -\Omega^2 r + \Omega U \sin \varepsilon = \frac{V^2}{\varrho} = \frac{\Omega^2 r^2}{\varrho},$$

$$\varphi_t = X \frac{y}{r} - Y \frac{x}{r} = r \frac{d\Omega}{dt} - \Omega U \frac{x}{r} = r \frac{d\Omega}{dt} - \Omega U \cos \varepsilon,$$

wobei ε den von r und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, ϱ den Krümmungsradius der Bahn des Punktes D bezeichnet.

Der Ort aller Punkte des Systemes, für welche die Normalbeschleunigung φ_n verschwindet, ist ein Kreis; derselbe berührt die Curve (C) im Momentancentrum, enthält den Beschleunigungspol, besitzt den Durchmesser $\frac{U}{\Omega}$ und hat die Gleichung

$$\Omega^2 (x^2 + y^2) - \Omega U y = 0.$$

Der Ort aller Systempunkte, für welche die Tangentialbeschleunigung φ_t verschwindet, ist ebenfalls ein Kreis; dessen Mittelpunkt liegt auf der Tangente der Curve (C), er besitzt den Durchmesser $\Omega U \frac{dt}{d\Omega}$, geht durch den Beschleunigungspol und hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2) \frac{d\Omega}{dt} - \Omega U x = 0.$$

Diese zwei Kreise wurden von Bresse gefunden. (Journal de l'École Polytechn. 1853.)

Das sind die hauptsächlichen Resultate aus der Theorie der Beschleunigung eines ebenen, unveränderlichen Systemes, ihre Entwickelung findet der Leser in dem Werke „Theorie der Bewegung und der Kräfte" von Schell.

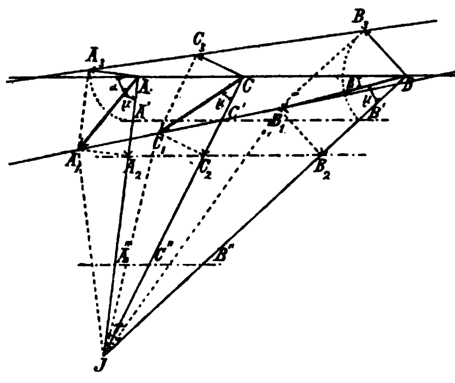
I. Wie die Geschwindigkeit, so stellen wir auch die Beschleunigung nach Grösse, Richtung und Lage durch eine Strecke dar und verstehen dann unter dieser Linie die Beschleunigung selbst. Im ersten Kapitel wurden einige Eigenschaften der Geschwindigkeit geometrisch bewiesen, das Gleiche soll hier für die Beschleunigung geschehen.

a) Die Endpunkte der Componenten φ_1 und φ_2 der Beschleunigungen der einzelnen Punkte einer Systemgeraden in der Richtung der diese Punkte mit dem Beschleunigungscentrum verbindenden Geraden (Polstrahlen) und senkrecht zu diesen Linien liegen auf geraden Linien.

Weil $\varphi_1 = \Omega^2 p$, so liegen offenbar die Endpunkte der Beschleunigungen φ_1 auf einem zu der Systemgeraden parallelen Strahle. Weil die Beschleunigungen $\varphi_2 = p \frac{d\Omega}{dt}$ senkrecht auf den zugehörigen Polstrahlen stehen, ist es klar, dass mit Rücksicht auf I_a, Kap. I, Th. III, ihre Endpunkte auf einem Strahle sich befinden.

b) Die Projektionen der Beschleunigungen φ_2 der einzelnen Punkte einer Systemgeraden auf diese Gerade sind einander gleich. Zerlegen wir die Beschleunigungen φ_2 der einzelnen Punkte einer Systemgeraden in ihre Componenten parallel und senkrecht zu dieser Linie, dann liegen die Endpunkte der letzteren Componenten auf einem zum Träger der Endpunkte der Beschleunigungen φ_2 parallelen Strahle. Die Beweise ergeben sich mit Hilfe von I_c, Kap. I, Th. III, wenn wir daselbst an die Stelle der Geschwindigkeiten die Accelerationen φ_2 und an Stelle des Momentancentrums den Beschleunigungspol setzen. Das unter I_b, Kap. I, Th. III, für die Geschwindigkeit Gesagte, gilt auch vollständig für die Beschleunigung φ_2.

c) Die Endpunkte der Beschleunigungen $\varphi = p\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)^2}$ der einzelnen Punkte einer Systemgeraden liegen auf einer geraden Linie. Die Winkel, welche die Beschleunigungen der Punkte des Systemes mit den zugehörigen Polstrahlen einschliessen, sind einander gleich, es ist, wenn μ einen solchen Winkel bezeichnet, $tg\,\mu = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \frac{d\,\Omega}{d\,t}$, die Beschleunigungen sind proportional den zugehörigen Polstrahllängen. Ist $A\,B$ (Fig. 134) die fragliche Systemgerade, J der Beschleunigungspol, $A\,A_1$ die Acceleration eines beliebigen Punktes A von $A\,B$, so ergiebt sich die Beschleunigung eines weiteren beliebigen Punktes B von $A\,B$ wie folgt. Wir zerlegen die Beschleunigung $A\,A_1$ in ihre Componenten $A\,A_2$, $A\,A_3$ in der Richtung des Polstrahles $A\,J$ und senkrecht dazu, machen $A\,A' = A\,A_3$, ziehen durch A_2, A' Parallelstrahlen zu $A\,B$, diese schneiden auf dem Polstrahle $B\,J$ die Componente $B\,B_2 = \varphi_1$ der Beschleunigung φ des Punktes B und die Strecke $B\,B'$ ab. Machen wir nun $B\,B_3 \perp B\,J$ und $= B\,B'$, so ist $B\,B_3 = \varphi_2$, konstruieren hierauf das Parallelogramm $B\,B_2\;B_1\;B_3$ und dessen Diagonale $B\,B_1$, dann ist die Strecke $B\,B_1$ äquivalent der Beschleunigung des Punktes B. In gleicher Weise ergiebt sich die Beschleunigung $C\,C_1$ des beliebigen Punktes C von $A\,B$ aus den Componenten $C\,C_2$, $C\,C_3$. Ziehen wir jetzt die Gerade $A_1\,B_1$, dann fällt mit derselben der Endpunkt C_1 der Acceleration φ des Punktes C zusammen. Um dieses zu beweisen, verzeichnen wir noch die Strahlen $A_1\,J$, $B_1\,J$, $C_1\,J$. Zufolge der Gleichheit der Winkel $A_1\,A\,J$, $B_1\,B\,J$, $C_1\,C\,J$ $(= \mu)$ und der Proportion $A\,A_1 : A\,J = B\,B_1 : B\,J = C\,C_1 : C\,J$ ist $\triangle\,A_1\,A\,J \sim \triangle\,B_1\,B\,J \sim \triangle\,C_1\,C\,J$, so dass $\sphericalangle\,A_1\,J\,A = \sphericalangle\,B_1\,J\,B = \sphericalangle\,C_1\,J\,C$; mithin ist $\sphericalangle\,A_1 J B_1 = \sphericalangle\,A J B$, $\sphericalangle\,A_1 J C_1 = \sphericalangle\,A J C$, $\sphericalangle\,B_1 J C_1 = \sphericalangle\,B J C$, ferner $A_1\,J : A\,J = B_1\,J : B\,J = C_1\,J : C\,J$, folglich $\triangle A_1 B_1 J \sim \triangle A B J$, $\triangle\,A_1\,C_1\,J \sim \triangle\,A\,C\,J$, $\triangle\,B_1\,C_1\,J \sim \triangle\,B\,C\,J$. Weil aber $\sphericalangle\,A_1\,B_1\,J$ den Dreiecken $A_1\,B_1\,J$ und $C_1\,B_1\,J$ gemeinschaftlich angehört, so müssen die Dreiecksseiten $A_1\,B_1$ und $C_1\,B_1$ in eine Gerade hineinfallen, es liegt daher der Punkt C_1 auf der Geraden $A_1\,B_1$. Da A, B, C drei beliebige Punkte der Systemgeraden $A\,B$ sind, so folgt, dass die Endpunkte der Beschleunigungen φ aller Punkte einer Systemgeraden auf einem Strahle

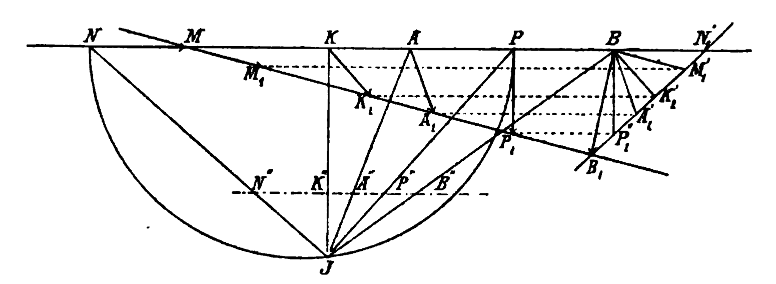


Figur 134.

liegen. Wir erkennen noch, dass die Endpunkte der Beschleunigungen φ der einzelnen Punkte von AB jederzeit auf einem Strahle liegen, wenn diese Beschleunigungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in derselben Richtung um ihre Anfangspunkte gedreht werden, denn der gegebene Beweis gilt für jeden beliebigen Winkel μ. Weil auch die Beziehung besteht $A_1 B_1 : A_1 C_1 : B_1 C_1 = AB : AC : BC$, so sehen wir, dass die Endpunkte der Beschleunigungen φ der einzelnen Punkte von AB ihren Träger nach demselben Verhältnisse teilen, wie ihre Anfangspunkte die Systemgerade. Daher kann die Beschleunigung eines dritten Punktes der Geraden AB, wenn die Accelerationen zweier ihrer Punkte gegeben sind, genau in derselben Weise konstruiert werden wie die Geschwindigkeit dieses Punktes, wenn die Geschwindigkeiten zweier Punkte von AB bekannt sind.

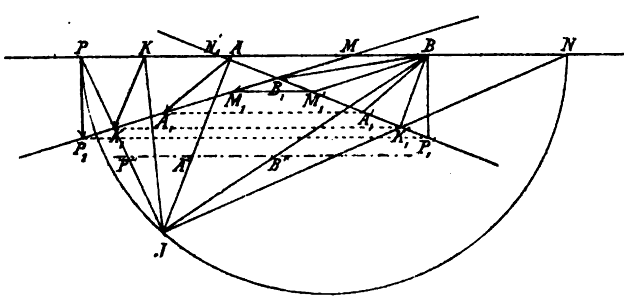
d) Der Winkel, welcher die Richtungen der Beschleunigungen φ zweier Systempunkte mit einander einschliesst, ist gleich dem von den zugehörigen Polstrahlen gebildeten Winkel. Es seien α, β (Fig. 134, S. 352) die Winkel, welche die Accelerationen AA_1, BB_1 der Punkte A, B der Geraden AB mit AB einschliessen, ferner sei $\sphericalangle AJB = \psi$, $\sphericalangle A_1 AJ = \sphericalangle B_1 BJ = \mu$, dann ist, weil $\sphericalangle (\alpha + \mu)$ Aussenwinkel des Dreiecks ABJ, $\alpha + \mu = \beta + \mu + \psi$, woraus für den gesuchten Winkel folgt $(\alpha - \beta) = \psi$, w. z. b. w.

e) Werden die Beschleunigungen φ der einzelnen Punkte einer Systemgeraden, ohne ihre Richtungen zu ändern, nach irgend einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte verlegt, dann liegen die Endpunkte der so verschobenen Accelerationen ebenfalls auf einem Strahle. Ist (Fig. 134, S. 352) AA_1 die gegebene Beschleunigung des Punktes A der Geraden AB und soll die Grösse der Beschleunigungen weiterer Punkte B, C, ... dieser Linie gefunden werden, so machen wir auf AJ $JA'' = AA_1$, legen durch A'' einen Parallelstrahl zu AB und ziehen die Polstrahlen der Punkte $B, C, \ldots$, alsdann schneidet die Parallele auf diesen Strahlen die verlangten Strecken $JB'' = JB_1$, $JC'' = JC_1, \ldots$ ab. Nun ist aber $\sphericalangle A''JB'' = (\alpha - \beta)$, $\sphericalangle A''JC'' = (\alpha - \gamma)$, $\sphericalangle B''JC'' = (\beta - \gamma)$, mithin liegen auch die Endpunkte der in obiger Weise verlegten Beschleunigungen auf einer geraden Linie. Dieser Satz ist von Wichtigkeit für die Konstruktion der Beschleunigungen der einzelnen Punkte einer Systemgeraden, wenn die Accelerationen von zwei Punkten derselben bekannt sind. Um dann die Beschleunigung eines beliebigen Punktes C von AB zu finden, verfahren wir genau so, wie dieses unter gleichen Verhältnissen für seine Geschwindigkeit zu geschehen hat. Es seien AA_1, BB_1 (Fig. 135 a, S. 354) die gegebenen Beschleunigungen der Punkte A, B der Systemgeraden AB. Machen wir BA'_1 AA_1 und ziehen den Strahl $A'_1 B_1$, so liegen auf diesem offenbar die End-

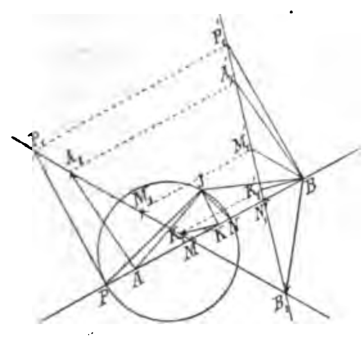


Figur 135 a.

punkte der parallel zu sich selbst mit ihren Anfangspunkten nach B verschobenen Beschleunigungen sämtlicher Punkte der Systemgeraden AB. Der Strahl $B_1 A_1'$ schneidet die Gerade AB in Punkt N'_1, es ist daher BN'_1 die Grösse und Richtung der Beschleunigung desjenigen Punktes von AB, dessen Acceleration mit AB zusammenfällt. Weil der Endpunkt dieser Beschleunigung mit dem Durchschnittpunkte M der Geraden AB und $A_1 B_1$ zusammenfallen muss, so ergiebt sich mit $MN = N'_1 B$ in N derjenige Punkt, dessen Beschleunigung in AB liegt. Mit $BP'_1 \perp AB$ erhalten wir die Grösse der Acceleration desjenigen Punktes, welcher rechtwinkelig zu AB beschleunigt wird. Machen wir $P'_1 P_1 \| AB$, $P_1 P \| P'_1 B$, dann ist P derjenige Punkt der Systemgeraden, dessen Beschleunigung senkrecht zu ihr liegt. Weil die Richtungen der Accelerationen der Punkte N und P sich rechtwinkelig schneiden, so schliessen die zu den Punkten N und P gehörigen Polstrahlen NJ und PJ einen rechten Winkel mit einander ein. Daraus folgt, dass der über NP als Diameter beschriebene Kreis den Beschleunigungspol J enthält und dieser Punkt sofort bestimmt werden kann, wenn N und P und die Richtungen ihrer Beschleunigungen bekannt sind. Die Grösse und Richtung der einem gewissen Punkte von AB zukommenden Minimalbeschleunigung giebt die von B auf $A'_1 B$ gefällte Senkrechte BK'_1. Mit $K'_1 K_1 \| AB$, $K_1 K \| K'_1 B$ erhalten wir in K denjenigen Punkt der Systemgeraden, welcher die kleinste Beschleunigung KK_1 besitzt. Derjenige Punkt der Geraden AB, dessen Beschleunigung ein Maximum ist, liegt unendlich fern, die Beschleunigung selbst ist unendlich gross und parallel



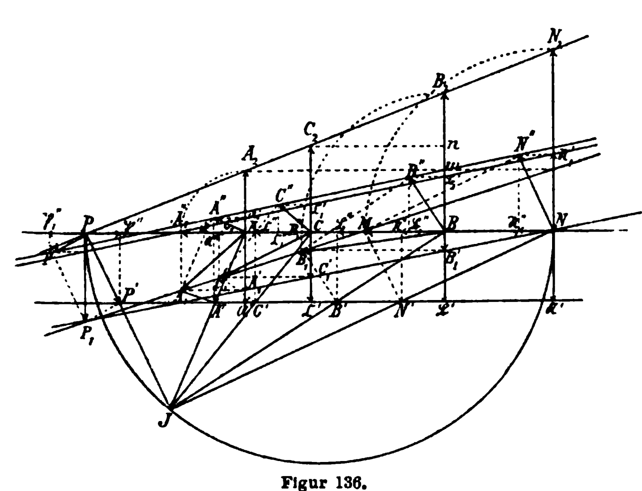
Figur 135 b.



Figur 135 c.

zum Polstrahle PJ, denn die Grösse und Richtung dieser Beschleunigung giebt offenbar die durch B zu $N'_1 B_1$ gezogene Parallele, welche den Strahl $B_1 N'_1$ im Unendlichen schneidet. Die Beschleunigung MM_1 des Durchschnittspunktes M der Geraden AB und $A_1 B_1$ fällt mit $A_1 B_1$ zusammen. Die Figuren 135a, 135b, 135c zeigen einige Lagen, welche bezüglich der Punkte A, B, N, P, J vorkommen.

f) Werden die Beschleunigungen φ der einzelnen Punkte einer Systemgeraden in ihre Componenten nach den Richtungen senkrecht und parallel zu dieser Geraden zerlegt, so befinden sich die Endpunkte der ersteren auf einem Strahle, die Endpunkte der letzteren, durch einen Winkel von 90^0 in gleicher Richtung um ihre Anfangspunkte gedrehten Componenten ebenfalls auf einem Strahle. Um dieses zu beweisen, gehen wir von den Componenten φ_1 und φ_2 der Beschleunigung φ aus. Die Componenten AA', AA'', BB', BB'', CC', CC'', ... der Beschleunigungen $\varphi = AA_1, BB_1, CC_1$, (Fig. 136) in den Richtungen der entsprechenden Polstrahlen u. normal dazu zerlegen wir in ihre Seitenbeschleunigungen in den Richtungen senkrecht und parallel zu AB. Die senkrechten Beschleunigungscomponenten sind $A\mathfrak{A}'$, $A\mathfrak{A}'_1$, $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}'_1$, $C\mathfrak{C}'$, $C\mathfrak{C}'_1, \ldots$; die parallelen Componenten sind $A\mathfrak{A}''$, $A\mathfrak{A}''_1$, $B\mathfrak{B}''$, $B\mathfrak{B}''_1$, $C\mathfrak{C}''$, $C\mathfrak{C}''_1, \ldots$; die Componenten der Beschleunigungen φ in denselben Richtungen sind $AA'_1, BB'_1, CC'_1, \ldots$; $AA''_1, BB''_1, CC''_1, \ldots$, so dass die Beziehungen bestehen



Figur 136.

$$AA'_1 = A\mathfrak{A}' - A\mathfrak{A}'_1, \quad BB'_1 = B\mathfrak{B}' - B\mathfrak{B}'_1, \quad CC'_1 = C\mathfrak{C}' - C\mathfrak{C}'_1, \ldots$$
$$AA''_1 = A\mathfrak{A}'' + A\mathfrak{A}''_1, \quad BB''_1 = B\mathfrak{B}'' + B\mathfrak{B}''_1, \quad CC_1'' = C\mathfrak{C}'' + C\mathfrak{C}''_1, \ldots$$

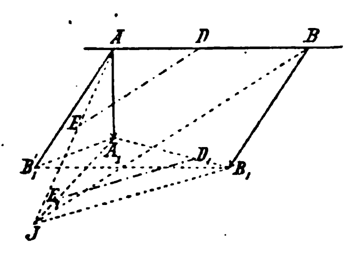
Die Endpunkte der Componenten $A\mathfrak{A}'$, $B\mathfrak{B}'$, $C\mathfrak{C}'$,...., welche einander gleich sind, liegen auf dem Strahle $A'B'$, die Endpunkte der Componenten $A\mathfrak{A}_1'$, $B\mathfrak{B}'_1$, $C\mathfrak{C}'_1$,.... auf dem Strahle $\mathfrak{A}'_1\,\mathfrak{B}_1'$. Machen wir daher das Trapez $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'B'_1A'_1$ kongruent dem Trapeze $AB\mathfrak{B}'_1\mathfrak{A}'_1$, so müssen die Endpunkte der zu AB senkrechten Componenten der Beschleunigungen φ auf der Geraden $A'_1B'_1$ sich befinden. Dieser Strahl schneidet die Systemgerade in dem Punkte N, welcher mithin keine senkrechte Beschleunigungscomponente besitzt, und ist parallel zum Träger der Endpunkte der Beschleunigungscomponente φ_2. Die Seitenbeschleunigungen $A\mathfrak{A}''_1$, $B\mathfrak{B}''_1$, $C\mathfrak{C}''_1$,... der Componenten AA'', BB'', CC'',... sind einander gleich. Mit $AJ=p_1$, $BJ=p_2$, $CJ=p_3$,..., der zu AB senkrechten Poldistanz $=h$ erhalten wir $A\mathfrak{A}''_1=B\mathfrak{B}''_1=C\mathfrak{C}''_1=\ldots=\zeta h$, $A\mathfrak{A}''=\zeta\sqrt{p_1{}^2-h^2}$, $B\mathfrak{B}''=\zeta\sqrt{p_2{}^2-h^2}$, $C\mathfrak{C}''=\zeta\sqrt{p_3{}^2-h^2}$,... Machen wir auf den Senkrechten zu AB durch A, B, C,... jetzt $AA_2=A\mathfrak{A}''+A\mathfrak{A}''_1$, $BB_2=B\mathfrak{B}''+B\mathfrak{B}''_1$, $CC_2=C\mathfrak{C}''+C\mathfrak{C}''_1$,.... und ziehen den Strahl A_2B_2, so liegen auf ihm die Endpunkte A_2, B_2, C_2,... der um 90° gedrehten Componenten AA''_1, BB''_1, CC''_1,.... Zeichnen wir nämlich die Linien A_2m und C_2n parallel zu AB, setzen $\measuredangle B_2A_2m=\varepsilon$, $\measuredangle B_2C_2n=\varepsilon_1$, so folgt

$$tg\,\varepsilon=\frac{BB_2-AA_2}{AB}=\frac{\zeta(h+\sqrt{p_2{}^2-h^2})-\zeta(h+\sqrt{p_1{}^2-h^2})}{\sqrt{p_2{}^2-h^2}-\sqrt{p_1{}^2-h^2}}=\zeta,$$

ebenso
$$tg\,\varepsilon_1=\zeta,$$

mithin ist $tg\,\varepsilon=tg\,\varepsilon_1$, d. i. $\varepsilon=\varepsilon_1$, es liegen daher die Punkte A_2, B_2, C_2 auf einer geraden Linie. Weil nun A, B, C drei beliebige Punkte der Systemgeraden AB sind, so ergiebt sich, dass die Endpunkte der in derselben Richtung durch einen Winkel von 90° um ihre Anfangspunkte gedrehten zu AB parallelen Beschleunigungscomponenten der einzelnen Punkte einer Systemgeraden auf einem Strahle liegen. Der Strahl A_2B_2 schneidet die AB in dem Punkte P, welcher mithin keine Beschleunigung in der Richtung von AB besitzt. Damit ist ein weiteres Verfahren zur Bestimmung der ausgezeichneten Punkte N und P gegeben.

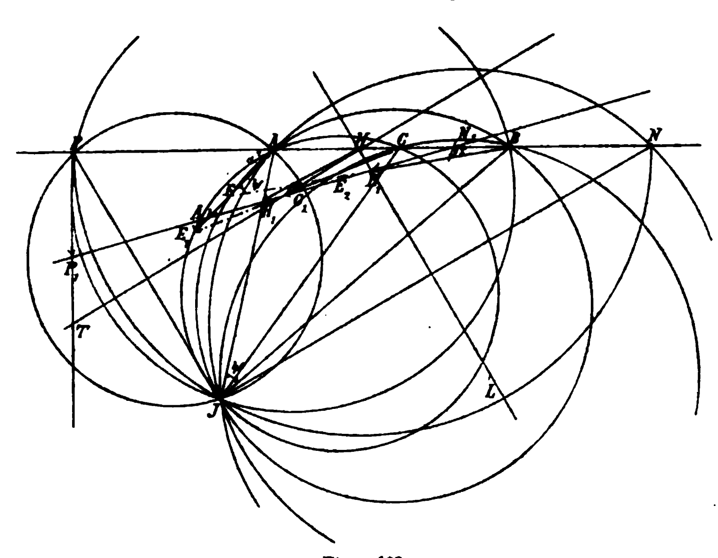
g) Die Lage des Beschleunigungscentrums ist durch die gegebenen Beschleunigungen zweier Systempunkte bestimmt. Sind AB (Fig. 137) die Systempunkte, AA_1, BB_1 ihre Beschleunigungen, ist J der Beschleunigungspol, verbinden wir die Punkte A, B unter sich und mit J, sowie die Punkte A_1, B_1 unter sich und mit J durch gerade Linien, bilden ferner mit den Strecken AA_1, BB_1 und dem von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkel



Figur 137.

das Dreieck $A A_1 B'_1$, wobei $A B'_1 \underline{\parallel} B B_1$, so besteht die Relation $\triangle A_1 A B_1' \sim \triangle A J B \sim \triangle A_1 J B_1$. Dadurch lässt sich der Pol J finden, wenn die Beschleunigungen $A A_1$ und $B B_1$ gegeben sind. Wir verzeichnen mit den Beschleunigungen $A A_1$, $B B_1$ und dem von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkel das Dreieck $A A_1 B'_1$. Hierauf ziehen wir die Linie $A B$, machen auf ihr $A D = A_1 B'_1$, schlagen sodann von A und D aus als Mittelpunkten mit $A A_1$ und $B B'_1$ Kreisbögen, welche sich in E schneiden, ziehen den Strahl $A E$, die Gerade $D E$ und zu $D E$ durch B einen Parallelstrahl, beide Strahlen schneiden sich in dem gesuchten Beschleunigungspole J. Ferner können wir, nachdem das Dreieck $A A_1 B'_1$ verzeichnet, die Linie $A_1 B_1$ gezogen worden ist, auf letzterer $A_1 D_1 = A_1 B'_1$ machen, von A_1 und D_1 aus als Mittelpunkte mit den Radien $A A_1$ und $A B'_1$ Kreisbögen beschreiben, welche sich in E_1 schneiden, sodann den Strahl $A_1 E_1$, die Gerade $D_1 E_1$, zu letzterer durch B_1 einen Parallelstrahl ziehen, beide Strahlen gehen durch den Beschleunigungspol J.

h) Der Kreis, welcher durch zwei Systempunkte A, B (Fig. 138)



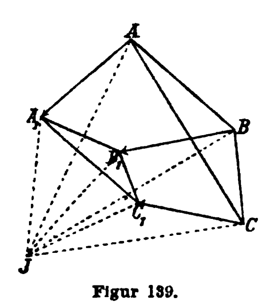
Figur 138.

und den Durchschnittspunkt E der Richtungen ihrer Beschleunigungen $A A_1$, $B B_1$ geht, enthält stets das Beschleunigungscentrum J. Weil die Richtungen der Beschleunigungen der Systempunkte A, B und die zu diesen Punkten gehörigen Polstrahlen gleiche Winkel einschliessen, der genannte Kreis der geometrische Ort des dritten Eckpunktes des veränderlichen Dreieckes $A B E$ über $A B$ mit dem konstanten Winkel $(\alpha - \beta) = \psi$ bei E ist, so muss dieser Kreis offenbar durch das Beschleunigungscentrum gehen. Mit diesem sind wir in den Stand gesetzt, das Beschleunigungscentrum J

zu finden, wenn für drei Systempunkte A, B, C, welche ganz beliebig liegen können, die Richtungen der Beschleunigungen bekannt sind. Schneiden sich die Richtungen der Accelerationen AA_1, BB_1 in E, diejenigen der Beschleunigungen AA_1, CC_1 in E_1, diejenigen der Beschleunigungen BB_1, CC_1 in E_2, legen wir durch die Punkte A, B, E, sowie durch die Punkte A, C, E_1 und durch die Punkte B, C, E_2 je einen Kreis, so schneiden sich diese drei Kreise im Beschleunigungscentrum und es genügen offenbar zwei derselben zu seiner Bestimmung. Die durch den Punkt P einer Systemgeraden AB (Fig. 138, S. 357), dessen Beschleunigung PP_1 senkrecht zu AB ist und die einzelnen Punkte $A, B, C, \ldots.$ dieser Geraden gehenden Beschleunigungskreise, wenn wir den oben genannten Kreis jetzt kurz Beschleunigungskreis heissen, besitzen in der Geraden PJ eine gemeinschaftliche Sehne. Daher liegen die Mittelpunkte aller solcher Kreise auf derjenigen Geraden, welche durch den Mittelpunkt H der Strecke PN geht und parallel zu dem Polstrahle NJ ist. Die durch den Punkt N einer Systemgeraden AB, dessen Acceleration NN'_1 parallel zu AB ist, und die einzelnen Punkte $A, B, C, \ldots.$ gehenden Polkreise besitzen in der Linie NJ eine gemeinschaftliche Sehne. Daher liegen die Centren aller solcher Kreise auf der durch den Mittelpunkt H der Strecke PN gehenden und zu dem Polstrahle NJ senkrechten Geraden HL.

i) Aus den unter den vorstehenden Numern enthaltenen Eigenschaften der Beschleunigungen der einzelnen Punkte einer Systemgeraden lassen sich verschiedene Konstruktionen zur Auffindung der Lage des Beschleunigungspoles ableiten, wenn die Beschleunigungen zweier Systempunkte bekannt sind, von denen die eine oder die andere für den betrachteten Spezialfall am zweckmässigsten ist. Zwei Methoden sind unter g) gegeben, eine dritte befindet sich unter h). Ein weiteres, sehr bequemes Verfahren lehrt e). Sind AA_1, BB_1 (Fig. 135a, S. 354) die Beschleunigungen der Systempunkte A, B, so ziehen wir die Strahlen AB, A_1B_1, machen $BA_1' \# AA_1$, ziehen den Strahl B_1A_1', welcher AB in N'_1 schneidet, machen vom Durchschnittspunkte M der Geraden AB und A_1B_1 aus auf AB $MN = N'_1B$, sodann $BP'_1 \perp AB$, $P'_1P \parallel AB$, $P_1P \parallel P'_1B$, alsdann sind N und P diejenigen Punkte von AB, welche zu einander rechtwinkelige Polstrahlen besitzen. Nun legen wir durch N einen Normalstrahl, durch P einen Parallelstrahl zu $B_1N'_1$, diese Strahlen schneiden sich in dem verlangten Beschleunigungscentrum J. Diese Methode giebt dann ein genaues Resultat, wenn die Richtungen der Accelerationen AA_1 und BB_1 sich unter keinem zu spitzen Winkel schneiden. Ist das letztere nicht der Fall, dann bestimmen wir die Punkte N und P nach f).

k) Sind die Beschleunigungen AA_1, BB_1, CC_1 dreier nicht in einer geraden Linie liegender Systempunkte A, B, C (Fig. 139, S. 359) gegeben,



Figur 139.

verbinden wir die Systempunkte unter sich, die Endpunkte der Beschleunigungen unter sich durch gerade Linien, dann sind die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ einander ähnlich. Ziehen wir von den Punkten A, B, C, A_1, B_1, C_1 nach dem Beschleunigungspole J gerade Linien, dann ist aus bekannten Gründen $\triangle A_1AJ \sim \triangle B_1BJ \sim \triangle C_1CJ$, folglich $\sphericalangle AJA_1 = \sphericalangle BJB_1 = \sphericalangle CJC_1$; mithin ist $\sphericalangle A_1JB_1 = \sphericalangle AJB$, $\sphericalangle A_1JC_1 = \sphericalangle AJC$, $\sphericalangle B_1JC_1 = \sphericalangle BJC$, und weil $A_1J:AJ = B_1J:BJ = C_1J:CJ$, so ist $\triangle A_1B_1J \sim \triangle ABJ$, $\triangle A_1C_1J \sim \triangle ACJ$, $\triangle B_1C_1J \sim \triangle BCJ$. Daher bestehen die Proportionen $A_1B_1:AB = A_1J:AJ = B_1J:BJ$, $A_1C_1:AC = A_1J:AJ = C_1J:CJ$, $B_1C_1:BC = B_1J:BJ = C_1J:CJ$; woraus sich ergiebt:

$$A_1B_1:A_1C_1:B_1C_1 = AB:AC:BC, \text{ oder } \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

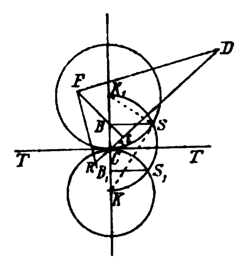
l) Aus dem vorhergehenden Satze resultiert sofort, dass beliebig viele Systempunkte und die Endpunkte ihrer Beschleunigungen die Eckpunkte ähnlicher Polygonzüge bilden. Ist der Polygonzug $ABCDE\ldots$ regulär, dann ist es auch der Polygonzug $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$ Liegen die Eckpunkte eines solchen Zuges $ABCDE\ldots$ unendlich nahe, so ist er ein Kreisbogen, folglich befinden sich die Endpunkte der Beschleunigungen der einzelnen Punkte einer Kreislinie ebenfalls auf einem Kreise. Hieraus lässt sich sofort schliessen, dass die Endpunkte der Beschleunigungen der einzelnen Punkte irgend einer Curve des Systemes auf einem dieser Curve ähnlichen Linienzuge liegen.

m) Sind die Beschleunigungen beliebig vieler Systempunkte $A, B, C, D\ldots$ gegeben, werden diese Punkte der Reihe nach durch gerade Linien, ebenso die Endpunkte der Beschleunigungen $A_1B_1C_1D_1\ldots$ durch gerade Linien verbunden, werden die Beschleunigungen AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$, ohne Änderung ihrer Richtungen so verschoben, dass ihre Anfangspunkte $A, B, C, \ldots$ mit irgend einem Punkte zusammenfallen, und die Endpunkte $A_2, B_2, C_2, \ldots$ dieser Strecken der Reihe nach durch gerade Linien verbunden, dann sind die Polygonzüge $ABCDE\ldots$, $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, $A_2B_2C_2D_2E_2\ldots$ einander ähnlich, d. h. die Punkte $A, B, C, D, E\ldots$, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, \ldots$ bilden einander ähnliche Punktsysteme. Befinden sich die Punkte $A, B, C, D, E, \ldots$ auf irgend einer gegebenen Curve, dann liegen die Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \ldots$, sowie die Punkte $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, \ldots$ auf dieser Curve ähnlichen Curven. Dasselbe ist mit den Geschwindigkeiten der Fall. Der Beweis bleibt zur Übung dem Studierenden überlassen.

II. Bestimmung des Verhältnisses $\frac{U}{\Omega}$ durch Konstruktion, wenn die

Krümmungshalbmesser Γ und Γ_1 der Curven (C) und (Γ) für ihren augenblicklichen Berührunsgpunkt gegeben sind.

a) Die Curven (C) und (Γ) liegen auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente TCT (Fig. 140). K sei der Krümmungsmittelpunkt der Curve (C), K_1 derjenige der Curve (Γ), so dass $KC = \Gamma$, $K_1 C = \Gamma_1$. Um $\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma}$ zu erhalten, verzeichnen wir mit den Halbmessern KC, $K_1 C$ und den Mittelpunkten K, K_1 die Krümmungskreise der Curven $(C), (\Gamma)$, sowie über KK_1 als Diameter einen Kreis, welcher die Krümmungskreise in den Punkten S und S_1 schneidet. Hierauf machen wir SB oder $S_1 B_1$ senkrecht zu KK_1, dann ist $\frac{U}{\Omega} = BC = B_1 C$. Zufolge der Konstruktion ist nämlich

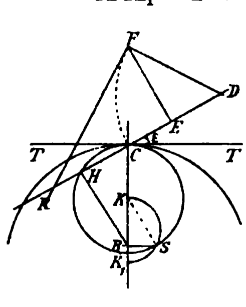


Figur 140.

$$K_1 B = \frac{\overline{K_1 S}^2}{KK_1} = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma + \Gamma_1} = \Gamma_1 - \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma + \Gamma_1} = \Gamma_1 - \frac{U}{\Omega},\ \frac{U}{\Omega} = \Gamma_1 - K_1 B = BC,$$

$$KB_1 = \frac{\overline{KS_1}^2}{KK_1} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma + \Gamma_1} = \Gamma - \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma + \Gamma_1} = \Gamma - \frac{U}{\Omega},\ \frac{U}{\Omega} = \Gamma - KB_1 = B_1 C.$$

b) Die Curven (C) und (Γ) liegen mit ihren benachbarten Teilen auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente TCT (Fig. 141). K sei der Krümmungsmittelpunkt der Curve (C), K_1 derjenige der Curve (Γ), so dass $KC = \Gamma$, $K_1 C = \Gamma_1$. Um $\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1 - \Gamma}$ zu erhalten, verzeichnen wir mit den Radien KC, $K_1 C$ und den Mittelpunkten K, K_1 die Krümmungskreise von (C) und (Γ), sowie über KK_1 als Durchmesser einen dritten Kreis, welcher den Krümmungskreis der Curve (C) in S schneidet. Mit $SB \perp KK_1$ ergiebt sich jetzt $\frac{U}{\Omega} = BC$, denn wir haben



Figur 141.

$$KB = \frac{\overline{KS}^2}{KK_1} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma_1 - \Gamma} = \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1 - \Gamma} - \Gamma = \frac{U}{\Omega} - \Gamma,\ \frac{U}{\Omega} = KB + \Gamma = BC.$$

III. Konstruktion des Krümmungshalbmessers ϱ der Bahn eines beliebigen Systempunktes, wenn die Krümmungsmittelpunkte der Curven (C) und (Γ) für ihren Berührungspunkt gegeben sind.

a) Die Curven (C) und (Γ) liegen mit ihren benachbarten Teilen auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente TCT (Fig. 140, Seite 360). Sind K, K_1 die Krümmungsmittelpunkte der Curven (C) und (Γ), ist D der fragliche Systempunkt, so bestimmen wir zunächst,

wie unter IIa, $\frac{U}{\Omega} = CB$. Der Krümmungshalbmesser ϱ der Bahn (D) fällt mit der Verbindungslinie der Punkte C und D zusammen, denn diese Linie ist die Richtung der Normalen von (D) in D. Nun machen wir den Strahl $BH \perp CD$, schneiden von D aus mit $CD = r$ in diesen Strahl ein, was im Punkte F geschieht, ziehen DF und zu dieser Linie FR senkrecht, alsdann ist $RD = \varrho$. Weil nämlich $CH = \frac{U}{\Omega} \sin\varepsilon$. also $\pm DH = \frac{U}{\Omega}\sin\varepsilon - r$, und auch $\frac{U}{\Omega}\sin\varepsilon = r + \frac{r^2}{\varrho}$, so folgt $\frac{r^2}{\varrho} = \pm DH$. Nun ist $DR.DH = \overline{DF^2}$, oder $DR = \frac{r^2}{DH}$, mithin $DR = \pm \varrho$.

b) Die Curven (C) und (Γ) liegen mit ihren benachbarten Teilen auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente TCT (Fig. 141, Seite 360). Sind K, K_1 die Krümmungsmittelpunkte der Curven (C), (Γ), ist D der fragliche Systempunkt, so bestimmen wir zunächst, wie unter IIb, $\frac{U}{\Omega} = CB$. Der Krümmungsradius ϱ der Bahn (D) fällt mit dem Strahle CD zusammen, auf diesen projizieren wir CB, dadurch wird $CH = CB \sin\varepsilon$, $DH = \frac{U}{\Omega}\sin\varepsilon + r$, mithin, weil $\frac{U}{\Omega}\sin\varepsilon = r + \frac{r^2}{\varrho}$, $DH = 2r + \frac{r^2}{\varrho}$, $\varrho = \pm \frac{r^2}{DH - 2r}$. Machen wir jetzt $DE = \pm (DH - 2.CD)$, $EF \perp CD$, schneiden von D aus mit $CD = r$ in EF ein, wodurch sich der Punkt F auf EF ergiebt, und ziehen $FR \perp DF$, so ist $DR = \pm \varrho$.

1. Ein ebenes unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene so, dass zwei seiner Punkte A, B, welche den unveränderlichen, wechselseitigen Abstand $AB = a$ besitzen, auf zwei festen, sich rechtwinkelig schneidenden Geraden OX, OY hingleiten.

a) Das Momentancentrum schreitet mit kontanter Geschwindigkeit c fort, oder — was dasselbe ist — die Systemgerade AB dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Bewegung des Systemes soll bezüglich der Beschleunigung untersucht werden.

Das Verhältnis der Geschwindigkeit des Momentancentrums zu der Winkelgeschwindigkeit des Systemes um dasselbe ist

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma . \Gamma_1}{\Gamma_1 - \Gamma} = \frac{a . \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} - a} = -a,$$

mithin $$U = c = a\omega, \qquad \Omega = -\frac{c}{a} = -\omega.$$

Ist r der Abstand eines beliebigen Systempunktes D vom Geschwindigkeitspole, so sind die Componenten der Beschleunigung φ dieses Punktes mit Beibehalt der früheren Bezeichnungen

$$r\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \Omega^2 r = \left(\frac{c}{a}\right)^2 r = \omega^2 \sqrt{\frac{a^2}{4} + \alpha^2 + \beta^2 - a(\alpha \cos 2\omega t + \beta \sin 2\omega t)},$$

$$\Omega U = -\frac{c^2}{a} = -\omega c,$$

so dass hier keine Beschleunigung in der Richtung der Tangente der Bahn (D) vorhanden ist.

Die Componenten der Acceleration φ des Punktes D in den Richtungen parallel zur Tangente und Normalen der Curve (C) sind, wenn C Coordinatenursprung, die Tangenten- und Normalenrichtung Coordinatenaxen und positiv in dem obengenannten Sinne (Fig. 142, S. 366),

$$X = -\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt} y = -\left(\frac{c}{a}\right)^2 x = -\omega^2 x,$$

$$Y = -\Omega^2 y - \frac{d\Omega}{dt} x + \Omega U = -\frac{c^2}{a}\left(1 + \frac{y}{a}\right) = -\omega(c + \omega y).$$

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zur Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden $-\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt} y = 0$, $-\left(\frac{c}{a}\right)^2 . x = 0$, d. i. $x = 0$, welche demnach mit der Ordinatenaxe CY zusammenfällt

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zur Tangente der Curve (C) ist, befinden sich auf der Geraden $-\Omega^2 y - \frac{d\Omega}{dt} x + \Omega U = 0$, $-\left(\frac{c}{a}\right)^2 y - \frac{c^2}{a} x = 0$, d. i. $y = -a$, welche demnach parallel zur Axe CX und durch den Mittelpunkt O der elliptischen Bahn (D) läuft. Die Coordinaten des Beschleunigungscentrums sind

$$x_1 = \frac{\Omega \frac{d\Omega}{dt} U}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = 0, \qquad y_1 = \frac{\Omega^3 U}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = \frac{U}{\Omega} = -a,$$

und der Abstand des Beschleunigungspoles vom Momentancentrum ist

$$\delta = \frac{\Omega U}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}} = \frac{U}{\Omega} = -a.$$

Das Beschleunigungscentrum fällt mithin hier stets mit dem Punkte O zusammen.

Der Ort aller Punkte des Systemes, welche gleiche Beschleunigung β besitzen, ist ein mit dem Halbmesser $\frac{\beta\,\delta}{\Omega\,U}=\frac{\beta}{\omega^2}$ um das Beschleunigungscentrum O als Mittelpunkt beschriebener Kreis.

Mit p als Poldistanz sind die Beschleunigung φ und deren Componenten φ_1, φ_2 des Punktes D

$$\varphi = p\sqrt{\Omega^4+\left(\frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)^2} = p\,\Omega^2 = p\left(\frac{c}{a}\right)^2 = p\,\omega^2,$$

$$\varphi_1 = \Omega^2 p = p\,\omega^2, \qquad \varphi_2 = p\frac{d\,\Omega}{d\,t} = 0.$$

Die Richtung der Acceleration φ fällt mithin mit der Poldistanz des Systempunktes zusammen. Nach dem ersten Teile ist die Gleichung der Bahn (D) für rechtwinkelige Coordinaten mit O als Ursprung $\varDelta^2 = \delta_1{}^2 X^2 + 2\,a\,\beta\,X\,Y + \delta_2{}^2\,Y^2$, woraus, zu Polarcoordinaten übergehend, mit O als Pol, ϑ als Polarwinkel, p als Radiusvektor folgt

$$p=\frac{\varDelta}{\sqrt{\delta_1{}^2\cos^2\vartheta - a\,\beta\sin 2\,\vartheta + \delta_2{}^2\sin^2\vartheta}},$$

womit die Länge der Poldistanz leicht berechnet werden kann, wenn der Winkel ϑ gegeben ist.

Die Normal- und Tangentialcomponente der Beschleunigung φ des Systempunktes D sind

$$\varphi_n = -\Omega^2 r + \Omega\,U\sin\varepsilon = -\frac{c}{a}\left(\frac{r}{a}+c\sin\varepsilon\right) = -\,\omega\left(\frac{r}{a}+c\sin\varepsilon\right),$$

$$\varphi_t = r\frac{d\,\Omega}{d\,t} - \Omega\,U\cos\varepsilon = \frac{c^2}{a}\cos\varepsilon = \omega\,c\cos\varepsilon.$$

Weil $r+\frac{r^2}{\varrho}=\frac{U}{\Omega}\sin\varepsilon = -\,a\sin\varepsilon$, ergiebt sich noch $\varrho = \pm\frac{r^2}{r+a\sin\varepsilon}$ für den Krümmungsradius der Bahn (D) in D, welcher nach III leicht konstruiert werden kann.

Der Ort aller Punkte des Systemes, deren Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist, hat die Gleichung

$$\Omega^2(x^2+y^2) - \Omega\,U y = 0, \qquad \text{d. i.} \qquad x^2+y^2-a\,y=0.$$

Der Durchmesser dieses Kreises ist gleich $\frac{U}{\Omega}=a$, die Coordinaten seines Mittelpunktes sind $x_0=0$, $y_0=-\frac{1}{2}a$.

Der Ort aller Systempunkte, für welche die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t=0$ ist, besitzt die Gleichung

$$r\frac{d\Omega}{dt} - \Omega U\frac{x}{r} = 0, \qquad \text{oder} \qquad x = 0,$$

er ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega U\frac{dt}{d\Omega} = \infty$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = \infty$, $y_0 = 0$, fällt also mit der Ordinatenaxe OCY zusammen.

Befindet sich der fragliche Systempunkt in O_1, dem Mittelpunkte der Strecke AB, dann ist $p = \frac{a}{2}$, $\varepsilon = 0$, so dass für denselben $\varphi = \frac{a}{2}\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{c^2}{a} = \frac{1}{2}a\omega^2$, $\varphi_n = -\frac{1}{2}a\omega^2$, $\varphi_t = 0$, wie dem sein muss, denn dieser Punkt bewegt sich auf einem Kreise vom Halbmesser $\frac{1}{2}a$.

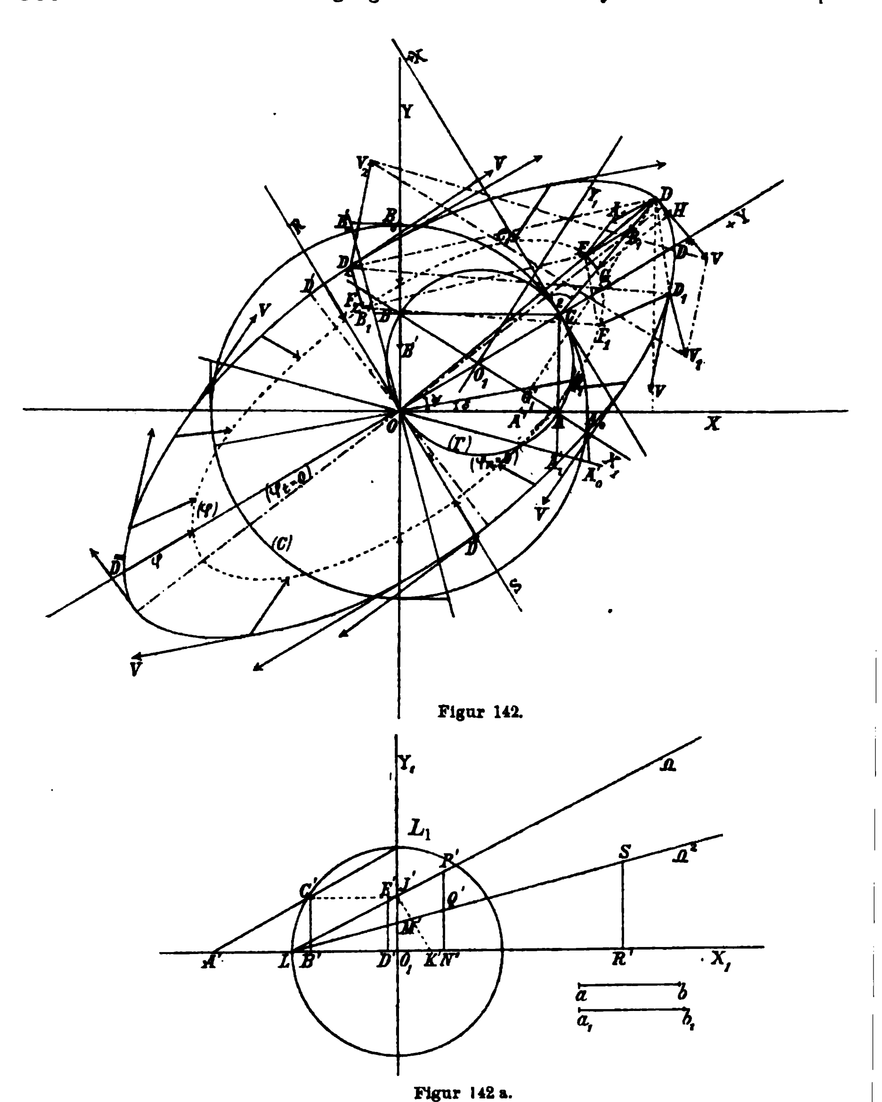
Für den Punkt A der Geraden AB, welcher sich auf der festen Geraden OA bewegt, ist $p = a\cos\psi = a\cos\omega t$, $\varepsilon = \psi = \omega t$, daher ist seine Beschleunigung $\varphi_A = \frac{c^2}{a}\cos\omega t = \omega^2 a\cos\omega t$, und die Componenten dieser Beschleunigung parallel und senkrecht zu OA sind $\varphi_t = -\omega^2 a\cos\omega t$, $\varphi_n = 0$. Für den Punkt B der Geraden AB, welcher sich auf der festen Geraden OB bewegt, ist $p = a\sin\psi$, $\varepsilon = \psi$, so dass $\varphi_B = \omega^2 a\sin\omega t$, und die Componenten dieser Beschleunigung parallel und senkrecht zur Bahn (B) sind $\varphi_t = -\omega^2 a\sin\omega t$, $\varphi_n = 0$. Mit $\psi = 0$, d. i. mit $t = 0$, ist $\varphi_A = \frac{c^2}{a}$, $\varphi_B = 0$, mit $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \frac{c^2}{a}$, mit $\psi = \pi$, $\varphi_A = -\frac{c^2}{a}$, $\varphi_B = 0$, mit $\psi = \frac{3}{2}\pi$, $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = -\frac{c^2}{a}$, mit $\psi = 2\pi$, $\varphi_A = \frac{c^2}{a}$, $\varphi_B = 0$, womit zugleich die Maxima und Minima der Beschleunigungen der Systempunkte A, B während eines Umlaufes des Momentancentrums bestimmt sind. Diese Beschleunigungen ändern sich, wie die Acceleration φ eines beliebigen Systempunktes, periodisch, sie sind am grössten, wenn die Punkte A, B ihre Maximalabstände vom Punkte O besitzen, am kleinsten, wenn sie mit diesem Punkte zusammenfallen. Bezeichnet x den Abstand des Punktes A von O zur Zeit t, so ist $x = a\cos\omega t$, mithin auch $\varphi_A = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$. Betrachten wir nun x als Abscisse, φ_A als Ordinate, so stellt die Gleichung $\varphi_A = -\omega^2 x$ die Beschleunigungscurve des Punktes A dar, welche demnach eine gerade, durch O gehende und zur Abscissenaxe unter dem Winkel $arc\,(tg = \omega^2)$ geneigte Linie ist. In gleicher Weise ist die Beschleunigungscurve des Punktes B mit OBY als Ordinatenaxe $\varphi_B = -\omega^2 y$.

Befindet sich der Systempunkt auf dem Kreise (Γ), so beschreibt

er eine durch den Punkt O gehende Gerade und ist $r = a \sin(\psi - \delta)$, wenn δ die Neigung dieser Geraden gegen die Axe OAX bezeichnet. Der Abstand dieses Punktes vom Beschleunigungspole O zur Zeit t ist daher $p = a \cos(\psi - \delta) = a(\cos \omega t - \delta)$, und es ist $\varepsilon = (\psi - \delta)$. Mithin erhalten wir als Beschleunigung dieses Systempunktes $\varphi_\Gamma = \omega^2 a \cos(\omega t - \delta)$, ihre Normal- und Tangentialcomponente sind $\varphi_n = 0$, $\varphi_t = \omega^2 a \cos(\omega t - \delta) = \varphi_\Gamma$. Die Bewegung dieses Punktes ist eine oszillierende, die Länge seiner Bahn gleich $2a$, die Zeit einer vollen Schwingung gleich der Zeit eines vollen Umlaufes des Momentancentrums $= \frac{2\pi}{\omega}$. Für die Endpunkte der Bahn ist $r = 0$, $(\psi - \delta) = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, so dass daselbst $V_\Gamma = 0$, $\varphi_\Gamma = \omega^2 a$. Befindet sich der Systempunkt in der Mitte O seiner Bahn, dann ist $r = a$, $(\psi - \delta) = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$, mithin $V_\Gamma = \pm c$, $\varphi_\Gamma = 0$, womit zugleich die ausgezeichneten Werte von V_Γ und φ_Γ gegeben sind. Mit $\delta = 0$ und $\delta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir die Systempunkte A und B, also ist für den Punkt A $V_A = -\omega a \sin \omega t$, $\varphi_A = -\omega^2 a \cos \omega t$, und für den Punkt B $V_B = \omega a \cos \omega t$, $\varphi_B = -\omega^2 a \sin \omega t$.

Geometrische Darstellung der Beschleunigung φ einzelner Systempunkte und ihrer Componenten.

Für die augenblickliche Lage des Systemes seien A, B (Fig. 142, Seite 366) die Punkte der Systemgeraden AB, welche auf den festen Geraden OAX, OBY geradlinig geführt werden, C sei das Momentancentrum, D ein beliebiger Systempunkt, welcher die elliptische Bahn (D) beschreibt, wenn das Momentancentrum C fortrückt. Die Tangente und die Normale in C an die Curven (C) und (Γ) geben die Richtungen der oben benutzten Coordinatenaxen CX, OCY, so dass mit $CD = r$, $\sphericalangle DCX = \varepsilon$ ist. Als Grösse der Geschwindigkeit U des Momentancentrums wählen wir die Strecke $ab = c$, als Masseinheit die Strecke $a_1 b_1 = \lambda$, (Fig. 142a, Seite 366). Die Strecke $CC_1 = ab$ auf CX giebt die Geschwindigkeit von C. Die graphischen Rechnungsoperationen führen wir mittelst des rechtwinkeligen Axenkreuzes O_1X_1, O_1Y_1 (Fig. 142a, S. 366) durch, und beschreiben mit $O_1L = O_1L_1 = a_1b_1 = \lambda$ als Radius um den Mittelpunkt O_1 den Basiskreis (λ), indem wir uns teilweise an die Methode von Eggers (Eggers, Grundzüge einer graphischen Arithmetik) halten. Für die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum besteht die Relation $\Omega = -\frac{c}{a} = -\omega$. Mit $O_1A' = OC = a$, $A'B' = ab = c$, dem Strahle $A'L_1$ und $B'C' \perp O_1X_1$ finden wir $\Omega = B'C' = \omega$, welche Grösse während der ganzen Bewegung des Systemes konstant ist.



Figur 142.

Figur 142 a.

Die Geschwindigkeit des Punktes D ist $V = \Omega r$. Mit $O_1 J' = B'C'$, $LN' = CD = r$, dem Strahle LJ' und $N'P' \perp O_1 X_1$ ist $V = N'P'$. Machen wir $DV \perp DC$ u. $= N'P'$, so ist durch DV die Geschwindigkeit des Punktes D vollständig gegeben. Die Beschleunigung φ des Systempunktes D können wir auf zweifache Weise erhalten. Die zur Ordinatenaxe CY parallele Beschleunigungscomponete ist $\Omega U = -\frac{c^2}{a} = -\omega . a$, eine für alle Systempunkte gleiche und während der ganzen Bewegung des Systemes konstante Grösse. Mit $LD' = U = ab$, $D'E' \perp O_1 X_1$ wird $\pm \Omega U = D'E'$. Die in die Gerade DC hineinfallende Beschleunigungscomponente ist

$\Omega^2 r = \omega^2 r$. Mit $J'K' \perp LJ'$ wird $O_1 K' = \omega^2$, wodurch mit $O_1 M' = O_1 K'$ und dem Strahle $L\, M'$ sich ergiebt $N'\, Q' = \Omega^2 r$. Machen wir jetzt DA_1 parallel $C\, Y$ und gleich $D'\, E'$, auf $D\, C$ $D\, B_1 = N'\, Q'$, so sind die Componenten von φ in der Richtung der Ordinatenaxe und in der Richtung $D\, C$ gefunden. Konstruieren wir nun mit den Seiten $D\, A_1$ und $D\, B_1$ das Parallelogramm $D\, A\, F\, B$, und dessen Diagonale DF, so ist $DF = \varphi$ die Beschleunigung des Systempunktes D, welche mit dem Polstrahle DO zusammenfällt. Weil aber auch $\varphi = \Omega^2 p = \omega^2 . D\, O$, so ergiebt sich diese Acceleration einfach dadurch, dass wir $L\, R' = D\, O$, $R'\, S' \perp O_1\, X_1$ (Fig. 142 a) machen, wodurch $R'\, S' = \varphi$ wird. Mit $D\, F = R'\, S'$ ist sodann die Beschleunigung von D vollständig gegeben. Zerlegen wir die Acceleration $\varphi = D\, F$ in ihre Componenten in paralleler und senkrechter Richtung zu $D\, C$, so finden wir $\varphi_n = D\, G$, $\varphi_t = D\, H$. Um nun die Beschleunigung des Systempunktes D_1 zu erhalten, welcher auf der Bahn (D) angenommen wurde, haben wir nur den Polstrahl $O\, D_1$ zu ziehen und auf demselben mittelst einer Parallelen zu DD_1 durch F die Strecke $D_1 F_1$ abzuschneiden, welche die verlangte Grösse giebt, denn es besteht mit $D_1\, F_1 = \varphi_1$ und $D_1\, O = p_1$ die Relation $\varphi_1 : \varphi = p_1 : p$. In gleicher Weise finden wir die Acceleration $D_2\, F_2$ des Punktes D_2 auf (D), wobei wir von $D\, F$ oder $D_1\, F_1$ ausgehen können, die dadurch entstehenden Dreiecke $D\, D_1\, D_2$ und $F\, F_1\, F_2$ sind einander ähnlich, was unter (I) allgemein dargethan wurde. Die Figur 142 (S. 366) zeigt auch die Geschwindigkeiten $D_1\, V_1$, $D_2\, V_2$ der Punkte D_1, D_2, welche folgen aus $V = \omega\, r$ und die Bahn (D) nicht berühren, denn sie stehen senkrecht auf den Linien $C\, D_1$, $C\, D_2$. Die Dreiecke $D\, D_1\, D_2$ und $V\, V_1\, V_2$ sind einander ähnlich.

Weil die Beschleunigung φ des Systempunktes D hier nach dem Beschleunigungspole gerichtet ist und dieser stets mit dem Punkte O zusammenfällt, so ist zugleich die Beschleunigung φ der Punkte D_1, D_2 diejenige des Punktes D, wenn er bei seiner Bewegung diese Punkte deckt. Verzeichnen wir daher die Beschleunigung φ einer Reihe von Punkten auf (D) mittelst der Beschleunigung $D\, F$ und verbinden die Punkte F durch einen stetigen Linienzug, so wird durch die zwischen diesem Linienzuge und (D) liegende Fläche die Änderung der Beschleunigung des Punktes D während seiner Bewegung deutlich charakterisiert. Das zwischen der Bahn (D) und dieser Curve liegende Vektorenstück giebt φ_D nach Grösse, Richtung und Lage. Die Polargleichung der die Endpunkte der Beschleunigungen φ der Systempunkte auf (D), oder den Endpunkt der Acceleration φ des sich bewegenden Systempunktes D enthaltenden Curve, welche ebenfalls eine Ellipse ist, lautet

$$p' = \frac{\Delta\, (a^2 - c^2)}{a^2 \sqrt{\delta_1{}^2 \cos^2 \vartheta - a\, \beta \sin 2\, \vartheta + \delta_2{}^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Der Ort aller Systempunkte, deren augenblickliche Beschleunigung parallel zur Axe CX, ist eine durch das Centrum O gehende, zu CX parallele Linie, sie schneidet die Bahn D in den Punkten D', D''. Die Systempunkte, deren augenblickliche Beschleunigung parallel zu der Normalen CY der Curve (C) ist, liegen auf dem Strahle CO, welcher die Bahn (D) in den Punkten D''', D'''' schneidet. Mit dem Kreise (Γ) fallen stets die Systempunkte zusammen, welche die Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ besitzen. Für alle Systempunkte, welche mit dem Strahle OC zusammenfallen, ist die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$. Die Punkte A und B besitzen daher keine Normalbeschleunigung, aber eine Tangentialbeschleunigung. Für den Punkt G_1 auf (Γ) erhalten wir mit $\varphi_G = \Omega^2 . OG_1$ die Strecke $G_1 G_1'$ als resultierende Beschleunigung, welcher Punkt keine Normalbeschleunigung besitzen kann, da CG_1 senkrecht auf OG_1 steht. Machen wir $A_0 A'_0 \perp OA$, $B_0 B'_0 \perp OB$, $A_0 A'_0 = B_0 B'_0 = \omega^2 a = O_1 M' . a$ und ziehen die Strahlen OA'_0, OB'_0, so stellen dieselben die Beschleunigungscurven der Punkte A und B dar, es sind mit $AA'_1 \perp OA$, $BB'_1 \perp OB$ die Strecken AA'_1, BB'_1 die augenblicklichen Beschleunigungen von A, B, welche für die äussersten Lagen von A, B zu $A_0 A'_0 = B_0 B'_0 = \omega^2 a$ werden.

Denken wir uns die Normalen der Bahn (D) für alle ihre Punkte gezogen, den Punkt D in Bewegung, auf diesen Linien von D aus die entsprechende Beschleunigung $\varphi, \varphi_n, \varphi_t$ und die entsprechende Geschwindigkeit V abgetragen, die Endpunkte der Grössen $\varphi, \varphi_n, \varphi_t, V$ je durch einen stetigen Linienzug verbunden, so erhalten wir die Curven $(\varphi), (\varphi_n), (\varphi_t), (V)$. Ziehen wir jetzt durch einen beliebigen Punkt von (D) eine Normale zur Bahn, so repräsentieren die Abschnitte dieser Normalen zwischen (D) einerseits und $(\varphi), (\varphi_n), (\varphi_t), (V)$ andererseits die Grössen $\varphi, \varphi_n, \varphi_t, V$ für diese Lage von D. Eine zweite Darstellung dieser Grössen ergiebt sich dadurch, dass wir sie von (D) aus auf den entsprechenden Fahrstrahlen DO abtragen und die Curven $(\varphi'), (\varphi'_n), (\varphi'_t), (V')$ verzeichnen, welche die Verbindungslinien der Endpunkte von $\varphi, \varphi_n, \varphi_t, V$ unter sich sind. Die Abschnitte des der augenblicklichen Lage von D zukommenden Polstrahles DO zwischen (D) einerseits, $(\varphi'), (\varphi'_n), (\varphi'_t), (V')$ andererseits geben die entsprechenden Grössen von $\varphi, \varphi_n, \varphi_t, V$. Die erste Darstellungsweise giebt φ_n, die zweite φ nach Grösse, Richtung und Lage. Die Figur 142 (S. 366) zeigt noch die Geschwindigkeit V des Punktes D für einige seiner Lagen während eines Umlaufes in seiner Bahn (D).

b) Die Bewegung des gegebenen Systemes ist so beschaffen, dass ein Systempunkt D auf einer durch den Punkt O gehenden festen geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit $\pm c$ fortschreitet. Die Beschleunigung einzelner Systempunkte soll untersucht werden, wenn die Bahn (D) unter einem Winkel δ gegen die Führungsgerade OA geneigt ist.

Weil hier $\frac{U}{\Omega} = -a$, der Abstand des Punktes D vom Momentancentrum $r = a \sin(\psi - \delta)$ (Fig. 143, S. 374), so ergiebt sich, c negativ nehmend,

$$\Omega = -\frac{c}{a}\, cosec\,(\psi - \delta), \quad U = c\, cosec\,(\psi - \delta).$$

Diese Geschwindigkeiten sind Funktionen des Winkels ψ, sie ändern sich während der Bewegung des Systemes periodisch und absolut genommen in gleicher Weise. Beide Geschwindigkeiten erlangen mit $cosec\,(\psi - \delta) = \pm \infty$ ihre absolut grössten Werte $\mp \infty$, dieses geschieht, wenn $(\psi - \delta) = 0$, π, 2π, $3\pi, \ldots$, wenn also der Punkt D in den Endpunkten seiner Bahn ankommt. Mit $cosec\,(\psi - \delta) = \pm 1$ erlangen dieselben ihre absolut kleinsten Werte, nämlich $\mp \frac{c}{a}$ und $\pm c$, welches geschieht mit $(\psi - \delta) = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$, also wenn der Punkt D die Mitte O seiner Bahn passiert. Im ersten Falle tritt das Momentancentrum in einen der Endpunkte der Bahn (D), im zweiten liegt es auf der durch O gehenden Normalen zu (D), abwechselnd links und rechts von (D) in einem Abstande a von O. Wie der Winkel ψ als Funktion der Zeit dargestellt werden kann, wurde im ersten Kapitel dieses Teiles gezeigt.

Die die Beschleunigung φ des Punktes D erzeugenden Beschleunigungen sind

$$\Omega\, U = -\frac{c}{a}\, cosec\,(\psi - \delta) \,.\, c\, cosec\,(\psi - \delta) = -\frac{c^2}{a}\, cosec^2\,(\psi - \delta),$$

$$\Omega^2 r = \frac{c^2}{a^2}\, cosec^2\,(\psi - \delta)\, a \sin\,(\psi - \delta) = \frac{c^2}{a}\, cosec\,(\psi - \delta),$$

$$r\frac{d\Omega}{dt} = a \sin\,(\psi - \delta)\, \frac{d}{dt}\left\{ -\frac{c}{a}\, cosec\,(\psi - \delta)\right\}.$$

Es ist

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{c}{a} \cos\,(\psi - \delta)\, cosec^2\,(\psi - \delta)\, \frac{d\psi}{dt}.$$

Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$ auch $\psi = 0$, bezeichnen mit s den in der Zeit t vom Momentancentrum zurückgelegten Weg, dann ist $s = a\psi$, folglich $\frac{ds}{dt} = a\frac{d\psi}{dt} = U = c\, cosec(\psi - \delta)$, wodurch $\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{a}\, cosec\,(\psi - \delta)$, mithin erhalten wir

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{c^2}{a^2} \cos\,(\psi - \delta)\, cosec^3\,(\psi - \delta) = \frac{c^2}{a^2}\, cotg\,(\psi - \delta)\, cosec^2\,(\psi - \delta)$$

und die zur Bahnnormalen senkrechte Beschleunigungscomponente ist

$$r\frac{d\Omega}{dt} = a \sin(\psi - \delta)\frac{c^2}{a^2}\cos(\psi - \delta)\, cosec^3(\psi - \delta) = \frac{c^2}{a} \cos\,(\psi - \delta)\, cosec^2\,(\psi - \delta)$$

$$= \frac{c^2}{a}\frac{cotg\,(\psi - \delta)}{\sin\,(\psi - \delta)}.$$

Diese Beschleunigungscomponenten sind sämtlich Funktionen des Winkels ψ,

sie ändern sich während der Oszillation des Punktes (D) in seiner Bahn periodisch. Ein Vergleich der beiden ersten zeigt, dass mit $(\psi - \delta) = 0$, $\pi, 2\pi, \ldots$, und mit $(\psi - \delta) = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$, ihre Werte absolut genommen einander gleich, nämlich $\mp \infty$ und $\mp \frac{c^2}{a}$ sind. Die Werte der dritten Componenten sind für diese ausgezeichneten Lagen ∞ und 0.

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zu der Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden $-\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt} y = 0$, das ist $y = -tg(\psi - \delta) x$; diese Linie steht mithin auf der Bahn (D) senkrecht und fällt mit der Geraden CD zusammen.

Die Systempunkte, deren Acceleration parallel zu der Tangente der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden $-\frac{d\Omega}{dt} x - \Omega^2 y + \Omega U = 0$, d. i. $y = cotg(\psi - \delta) x - a$, sie schneidet auf den Coordinatenaxen die Stücke $a\, tg(\psi - \delta)$ und $-a$ ab und fällt mit der Bahn (D) zusammen. Die Entfernung des Momentancentrums von dieser Geraden ist $= \frac{\Omega U}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}}$ $= a \sin(\psi - \delta)$, welches zugleich der wechselseitige Abstand des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungspoles ist.

Die Coordinaten des Beschleunigungscentrums sind

$$x_1 = -\frac{\Omega U \frac{d\Omega}{dt}}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = a \sin(\psi - \delta) \cos(\psi - \delta),$$

$$y_1 = \frac{\Omega^3 U}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = -a \sin^2(\psi - \delta),$$

womit $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = a \sin(\psi - \delta)$ ist.

Das Beschleunigungscentrum fällt mithin stets mit dem Systempunkte D zusammen. Dieses folgt auch ohne Rechnung daraus, dass die resultierende Beschleunigung φ des Punktes D gleich Null ist, weil er sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Für die resultierende Acceleration φ eines beliebigen Systempunktes D_1 im Abstande p vom Beschleunigungscentrum D und ihre Componenten φ_1, φ_2 ergiebt sich

$$\varphi = p \sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = p \left(\frac{c}{a}\right)^2 cosec^3 (\psi - \delta),$$

$$\varphi_1 = \Omega^2 p = p\left(\frac{c}{a}\right)^2 cosec^2(\psi - \delta),$$

$$\varphi_2 = p\frac{d\,\Omega}{d\,t} = p\left(\frac{c}{a}\right)^2 cotg\,(\psi - \delta)\, cosec^2(\psi - \delta).$$

Die Componenten $\Omega\, U$ und $\Omega^2 r$ schliessen einen Winkel $\frac{\pi}{2} + (\psi - \delta)$ mit einander ein, es ist

$Res\,(\Omega\, U, \Omega^2 r)$

$$= \sqrt{\left\{\frac{c^4}{a^2} cosec^4(\psi - \delta) + \frac{c^4}{a^2} cosec^2(\psi - \delta) + 2\frac{c^4}{a^2} cosec^3(\psi - \delta) cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi - \delta\right)\right\}}$$

$$= \pm \frac{c^2}{a} cotg\,(\psi - \delta)\, cosec\,(\psi - \delta).$$

Für den Winkel ν, welchen diese Resultate mit der Componente $\Omega\, U$ einschliesst, besteht die Relation

$$tg\,\nu = \frac{\Omega^2 r\, sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi - \delta\right)}{\Omega\, U + \Omega^2 r\, cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi - \delta\right)}, \text{ woraus folgt } tg\,\nu = tg\,(\psi - \delta),$$

d. i. $\nu = (\psi - \delta)$.

Die Resultante aus $\Omega\, U$ und $\Omega^2 r$ fällt also mit der Bahn (D) zusammen, sie ist gleich $-r\frac{d\,\Omega}{d\,t}$, so dass sich diese Accelerationen gegenseitig zerstören und $\varphi = Res\,(\Omega\, U, \Omega^2 r) + r\frac{d\,\Omega}{d\,t} = 0$, erscheint.

Ferner ist

$$Res\left(\Omega^2 r, r\frac{d\,\Omega}{d\,t}\right) = \sqrt{\left\{\frac{c^4}{a^2} cosec^2(\psi - \delta) + \frac{c^4}{a^2} cotg^2(\psi - \delta)\, cosec^2(\psi - \delta)\right\}}$$

$$= \pm \frac{c^2}{a} cosec^2(\psi - \delta).$$

Für den Winkel ν_1, welchen diese Resultante mit der Bahn D einschliesst, besteht die Relation

$$tg\,\nu_1 = \frac{\Omega^2 r}{r\frac{d\,\Omega}{d\,t}}, \text{ woraus folgt } tg\,\nu_1 = tg\,(\psi - \delta), \text{ d. i. } \nu_1 = (\psi - \delta).$$

Diese Resultante ist mithin von gleicher Grösse wie die Componente $\Omega\, U$, aber von entgegengesetzter Richtung, so dass $\varphi = Res\,(\Omega^2 r, r\frac{d\Omega}{dt}, \Omega\, U) = 0$, wie dem sein muss.

Die Beschleunigungen der gerade geführten Punkte A und B der Systemgeraden $A\,B$ lassen sich auf mehrfache Weise ableiten, am be-

quemsten ist es, von den Geschwindigkeiten dieser Punkte auszugehen. Die Abstände der Punkte A und B vom Geschwindigkeitspole sind $a\sin\psi$ und $a\cos\psi$, mithin die Geschwindigkeiten dieser Punkte

$$V_A = \Omega \,.\, a\sin\psi = \mp\, c\sin\psi\,\mathrm{cosec}\,(\psi-\delta),$$
$$V_B = \Omega \,.\, a\cos\psi\,\mathrm{cosec}\,(\psi-\delta) = \pm\, c\cos\psi\,\mathrm{cosec}\,(\psi-\delta).$$

Daraus folgt durch Differentiation nach t

$$\varphi_A = \frac{dV_A}{dt} = \mp\, c\,\mathrm{cosec}\,(\psi-\delta)\,\{\cos\psi - \sin\psi\,\mathrm{cotg}\,(\psi-\delta)\}\,\frac{d\psi}{dt}$$

und weil $\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{a}\,\mathrm{cosec}\,(\psi-\delta)$

$$\varphi_A = \mp\,\frac{c^2}{a}\,\mathrm{cosec}^2(\psi-\delta)\,\{\cos\psi - \sin\psi\,\mathrm{cotg}\,(\psi-\delta)\}.$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$\varphi_B = \mp\,\frac{c^2}{a}\,\mathrm{cosec}^2(\psi-\delta)\,\{\sin\psi + \cos\psi\,\mathrm{cotg}\,(\psi-\delta)\},$$

so dass weder die Geschwindigkeiten noch die Beschleunigungen der Punkte A und B von dem veränderlichen Winkel ψ unabhängig sind. Die nachstehende Tabelle charakterisiert die Bewegung der Punkte A und B, sie enthält für die ausgezeichneten Werte von ψ und $(\psi-\delta)$ diejenigen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der Punkte A und B.

$\psi = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$V_A = 0$	$-c\sec\delta$	0	$c\sec\delta$	0
$\varphi_A = -\frac{c^2}{a}\mathrm{cosec}^2\delta$	$+\frac{c^2}{a}\sin\delta\sec^3\delta$	$\mp\frac{c^2}{a}\mathrm{cosec}^2\delta$	$-\frac{c^2}{a}\sin\delta\sec^3\delta$	$-\frac{c^2}{a}\mathrm{cosec}^2\delta$
$V_B = c\,\mathrm{cosec}\,\delta$	0	$-c\,\mathrm{cosec}\,\delta$	0	$c\,\mathrm{cosec}\,\delta$
$\varphi_B = \frac{c^2}{a}\cos\delta\,\mathrm{cosec}^3\delta$	$-\frac{c^2}{a}\sec^2\delta$	$-\frac{c^2}{a}\cos\delta\sec^3\delta$	$\frac{c^2}{a}\sec^2\delta$	$\frac{c^2}{a}\cos\delta\,\mathrm{cosec}^3\delta$
↓	↓	↓	↓	↓
$(\psi-\delta) = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$V_A = -\infty$	$-c\cos\delta$	$+\infty$	$c\cos\delta$	$-\infty$
$\varphi_A = \mp\infty$	$+\frac{c^2}{a}\sin\delta$	$\pm\infty$	$-\frac{c^2}{a}\sin\delta$	$\mp\infty$
$V_B = +\infty$	$-c\sin\delta$	$-\infty$	$c\sin\delta$	$+\infty$
$\varphi_B = \pm\infty$	$-\frac{c^2}{a}\cos\delta$	$\mp\infty$	$\frac{c^2}{a}\cos\delta$	$\pm\infty$.

Mit $\delta = 0$ fällt die Bahn (D) mit der Geraden OAX, der Systempunkt D mit dem Punkte A der Geraden AB zusammen, in welchem Falle $V_A = \mp c$,

$$V_B = \pm\, c\,\mathrm{cotg}\,\psi,\ \ \Omega = -\frac{c}{a}\,\mathrm{cosec}\,\psi,\ \ U = c\,\mathrm{cosec}\,\psi,\ \ \frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{a}\,\mathrm{cosec}\,\psi,$$

$\varphi_B = \mp \frac{c^2}{a} cosec^3 \psi$, $\varphi = p \left(\frac{c}{a}\right)^2 cosec^3 \psi$, $\varphi_1 = p \left(\frac{c}{a}\right)^2 cosec^2 \psi$, $\varphi_2 = p \left(\frac{c}{a}\right)^2 cotg\, \psi\, cosec^2 \psi$, so dass mit

$\psi =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$V_B =$	∞	0	$-\infty$	0	∞
$\varphi_B =$	$\mp\infty$	$-\frac{c^2}{a}$	$\mp\infty$	$+\frac{c^2}{a}$	$\pm\infty$
$\Omega =$	$-\infty$	$-\frac{c}{a}$	$-\infty$	$-\frac{c}{a}$	$-\infty$
$U =$	∞	c	∞	$-c$	∞.

Mit $\delta = \frac{\pi}{2}$ fällt die Bahn (D) mit der Geraden OBY, der Systempunkt D mit dem Punkte B der Geraden AB zusammen, in welchem Falle $V_B = \pm c$, $V_A = \mp c\, tg\, \psi$ u. s. f.

Daraus geht hervor, dass wenn einer der Punkte A oder B mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet, die Bewegung des anderen eine periodisch veränderliche ist.

Der Ort aller Systempunkte, für welche die Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist, ist der Kreis (Γ), seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{1}{2} a$.

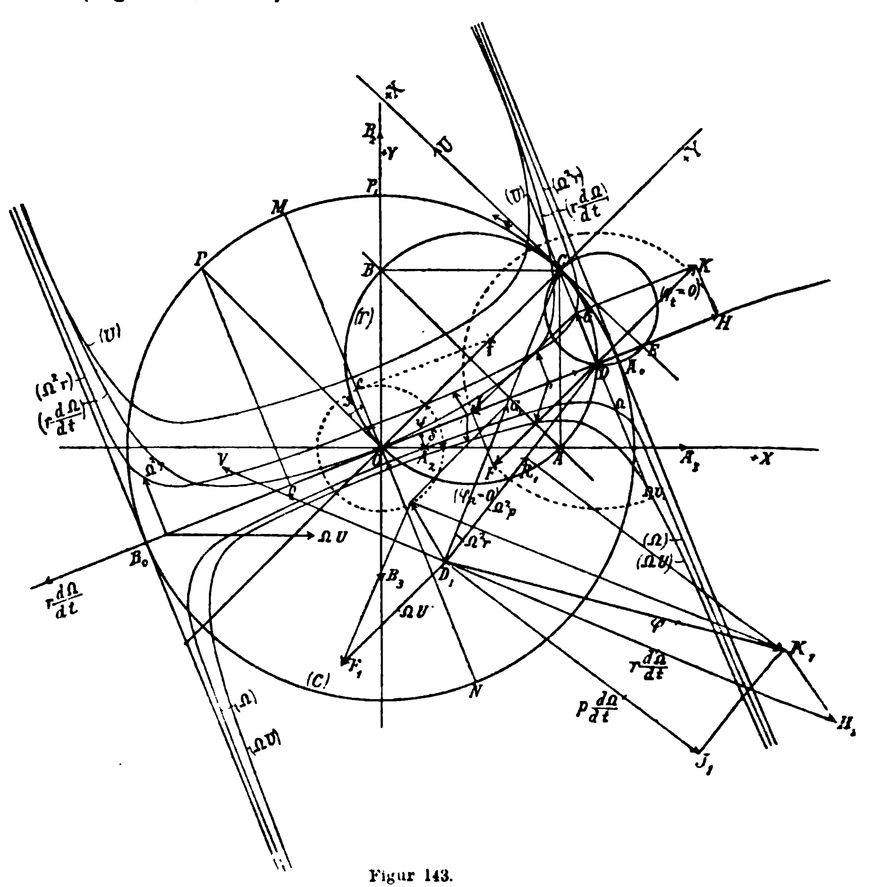
Der Ort sämtlicher Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung φ_t verschwindet, ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega U \frac{dt}{d\Omega} = a\, tg\, (\psi - \delta)$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = \frac{1}{2} a\, tg\, (\psi - \delta)$, $y_0 = 0$.

Befindet sich der Punkt D in der Mitte O seiner Bahn, dann ist $U = c$, $\Omega = -\frac{c}{a}$, $\Omega^2 r = \frac{c^2}{a} = -\Omega U$, $r \frac{d\Omega}{dt} = 0$. Legen wir durch O zur Bahn (D) eine Senkrechte, dann sind die Schnittpunkte M, N dieser Linie und der Curve (C) die Lagen des Momentancentrums, wenn der Punkt D seine Bahnmitte in der einen oder anderen Richtung passiert. Ist P eine beliebige Lage des Momentancentrums, Q der ihr entsprechende Ort von D, $OQ = s$, Bogen $MP = \sigma$, $\measuredangle MOP = \vartheta$, so bestehen die Relationen $s = a \sin \vartheta$, $\sigma = a \vartheta$, woraus folgt $\sigma : s = \vartheta : \sin \vartheta$. Dieses Verhältnis weicht um so weniger von der Einheit ab, je kleiner wir den Winkel ϑ nehmen. Beispielsweise erhalten wir mit $\vartheta = 24^0$ $\sin \vartheta = 0{\cdot}4067$, $\vartheta = 0{\cdot}41888$, daher $s = 0{\cdot}4067\, a$, $\sigma = 0{\cdot}41888\, a$, $\frac{\sigma}{s} = 1.029$. Befindet sich das Momentancentrum in P, dann ist $\Omega = -c : a \cos \vartheta = -1{,}094 \frac{c}{a}$, $U = 1{,}094\, c$.

Daraus lässt sich erkennen, wie wenig die Geschwindigkeit des Momentancentrums in der Nähe der Punkte M und N von der Geschwindigkeit des Punktes D abweicht. Lassen wir mithin umgekehrt den Kreis (Γ) auf dem kleinen Bogen PMP_1, wo $P_1M = PM$ ist, mit konstanter Geschwindigkeit rollen, so wird der Punkt D seine geradlinige Bahn mit fast konstanter Geschwindigkeit beschreiben. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um C, dann ergiebt sich mit $\vartheta = 24^0$ für den Punkt D in Q $V = 0{\cdot}9135\, a\, \omega$. Der Umstand, dass sich die Bahnellipse in zwei Gerade spaltet, wenn der Systempunkt auf dem Kreise (Γ) liegt, wurde zur Konstruktion einer Geradführung benützt, der Punkt D erscheint dann als der gerade zu führende Punkt.

Geometrische Darstellung der Beschleunigung φ und ihrer Componenten für einzelne Systempunkte.

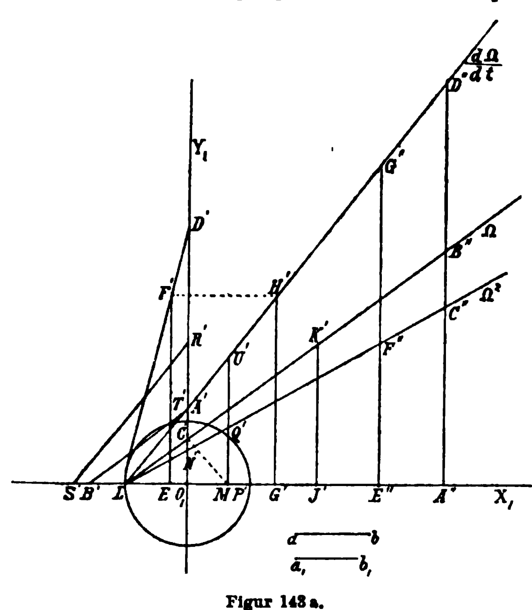
Dem graphischen Verfahren legen wir die Strecke $ab = c =$ der konstanten Geschwindigkeit des Punktes D und die Masseinheit $a_1 b_1 = \lambda$ zu Grunde (Fig. 143, 143a).



Figur 143.

Die augenblickliche Lage des mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegenden Punktes sei D, so dass die Gerade DO seine Bahn, ihr entspricht der Punkt C als Geschwindigkeitspol. Die Tangente und die Normale im Punkte C der Curve (C) sind die Geraden CX, OCY (Fig. 143, S. 374). Für das graphische Rechnen verwenden wir das rechtwinkelige Axenkreuz $O_1 X_1, O_1 Y_1$ mit dem um O_1 als Mittelpunkt beschriebenen Einheitskreise vom Radius

$$O_1 L = a_1 b_1 = \lambda.$$



Figur 143 a.

(Fig. 143a). Zunächst ist $\Omega = \pm \frac{c}{r} = \pm \frac{c}{CD}$. Mit $O_1 A' = ab = c, O_1 B' = CD = r$, $LC' \parallel B'A'$ wird $\Omega = O_1 C'$. Ferner ist $U = -\Omega . a$. Mit $O_1 D' = OC = a$, $LE' = O_1 C' = \Omega$, dem Strahle LD' und $E'F' \perp O_1 X_1$ wird $U = E'F'$. Dasselbe Resultat ergiebt sich mit der Formel $U = c \operatorname{cosec}(\psi - \delta)$. Verzeichnen wir den Einheitskreis (λ) um O als Mittelpunkt, machen $Oe \perp OD$, $ef \parallel OD$, dann ist $ef = \operatorname{cosec}(\psi - \delta)$. Nun ergiebt sich mit dem Strahle LA', $LG' = ef$, $G'H' \perp O_1 X_1$, $U = G'H' = E'F'$. Jetzt konstruieren wir die Componenten der resultierenden Beschleunigung φ des Punktes D. Die zur Ordinatenaxe CY parallele Beschleunigung ΩU ist das Produkt aus den Strecken $O_1 C'$ und $E'F'$. Mit dem Strahle LC', $LJ' = E'F'$, $J'K' \perp O_1 X_1$ wird $\Omega U = J'K'$. Die in die Gerade CD hineinfallende Beschleunigungscomponente ist $\Omega^2 r$. Mit $C'M' \perp LC'$ wird $OM' = \Omega^2$, mit dem Strahle LN', wobei $O_1 N' = O_1 M'$, $LP' = CD = r$, $P'Q' \perp LP'$ wird $\Omega^2 r = P'Q'$. Die in die Ordinatenaxe CY hineinfallende Beschleunigungscomponente $r \frac{d\Omega}{dt}$ ergiebt sich wie folgt. Der Durchmesser des Kreises, welcher der Ort aller Systempunkte mit der Beschleunigung $\varphi_t = 0$, ist gleich $\Omega U . \frac{dt}{d\Omega}$. Dieser Kreis geht durch die Punkte C und D, sein Mittelpunkt liegt auf der Abscissenaxe CX, welche die Bahn (D) in E schneidet. Weil hier $\measuredangle CDE = \frac{\pi}{2}$, ist offenbar die Strecke $CE = \Omega U . \frac{dt}{d\Omega}$ und der über CE

als Diameter beschriebene Kreis giebt den Ort aller Systempunkte mit der Beschleunigung $\varphi_t=0$. Nun ist $\frac{d\,\Omega}{d\,t}=\frac{\Omega\,U}{C\,E}$. Machen wir daher $O_1 K'=J'K'=\Omega\,U$, $O_1 S'=C\,E$, den Strahl $L\,T'$ parallel zum Strahle $S'K'$, so wird $O_1 T'=\frac{d\,\Omega}{d\,t}$. Jetzt ergiebt sich mit $LP'=CD=r$, $P'U'\perp O_1 X_1$, $r\frac{d\,\Omega}{d\,t}=P'U'$. Damit sind die Grössen der Beschleunigungscomponenten $\Omega\,U$, $\Omega^2 r$, $r\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ für den Punkt D gefunden. Ziehen wir nun durch D eine Parallele $D\,F$ zur Ordinatenaxe, beachten, dass $\Omega\,U$ negativ, $r\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ positiv, $\Omega^2 r$ nach C hin gerichtet ist, machen $D\,F=J'K'=\Omega\,U$, $D\,G=P'Q'=\Omega^2 r$, $D\,H=P'U'=r\frac{d\,\Omega}{d\,t}$, so erhalten wir die auf den Punkt D wirkenden Beschleunigungen nach Grösse, Richtung und Lage. Die Resultante aus diesen drei Beschleunigungen ist $\varphi=Res\left(\Omega\,U, \Omega^2 r, r\frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)=0$, wie dem sein muss. Die Resultante aus $D\,F$ und $D\,G$ ist die mit (D) zusammenfallende Strecke $D\,J$, welche gleich $D\,H$, aber von entgegengesetzter Richtung, so dass nach der Streckenrechnung $D\,F+D\,G+D\,H=0$. Die Resultante aus $D\,G$ und $D\,H$, nämlich $D\,K$, ist gleich und entgegengesetzt der Strecke $D\,F$, woraus wieder folgt $D\,F+D\,G+D\,H=0$, was sich auch mittelst des Summationspolygons ergiebt.

Darstellung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes D_1.

Mit $D_1 C=r_1$ ist $V=\Omega\,r_1$. Machen wir $L\,A''=D_1 C$, $A''B''\perp O_1 X_1$, welche Linie den Strahl $L\,C'$ in B'' schneidet, so wird $V=A''B''$. Nun ziehen wir $D_1 V\perp D_1 C$ und $=A''B''$, wodurch sich in $D_1 V$ die Geschwindigkeit des Punktes D_1 nach Grösse, Richtung und Lage ergiebt. Die auf den Punkt D_1 wirkenden Accelerationen sind $\Omega\,U$, $\Omega^2 r_1$, $r_1\frac{d\,\Omega}{d\,t}$. Mit $D_1 F_1 \,\underline{\parallel}\, D\,F$ erhalten wir $\Omega\,U$. Die Acceleration $\Omega^2 r_1$ fällt mit der Linie $D_1 C$ zusammen, ihre Grösse giebt die Strecke $A''C''$, wobei C'' auf dem Strahle $L\,N'$ liegt, so dass mit $D_1 G_1=A''C''$ diese Beschleunigung in ihrer wahren Lage erscheint. Endlich schneidet der Strahl $L\,T'$ auf der Ordinatenlinie durch A'' $(L\,A''=r_1)$ die Strecke $A''D''=r_1\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ ab. Machen wir daher auf der Normalen $D_1 H_1$ zu $D_1 C$ $D_1 H_1=A''D''$, beachtend den positiven Sinn von $r\frac{d\,\Omega}{d\,t}$, dann erhalten wir in $D_1 H_1$ die zu

$D_1 C$ senkrechte Acceleration. Die Resultante aus den drei Strecken $D_1 F_1$, $D_1 G_1$, $D_1 H_1$ ist die Linie $D_1 K_1 = \varphi =$ der resultierenden Beschleunigung des Punktes D_1. Es ist aber auch φ die Resultante aus $\Omega^2 p_1$ und $p_1 \frac{d\Omega}{dt}$, wenn $D_1 D = p_1$ gesetzt wird, die erste Componente fällt mit $D_1 D$ zusammen, die zweite steht senkrecht auf $D_1 D$ und hat ein der Winkelgeschwindigkeit Ω entgegengesetztes Drehungsbestreben. Mit $L E'' = D_1 D$, $E'' G'' \perp O_1 X_1$ wird $E'' F'' = \Omega^2 p_1$, $E'' G'' = p_1 \frac{d\Omega}{dt}$, der Grösse nach. Machen wir daher $D_1 R_1 = E'' F''$, $D_1 J_1 \perp D_1 D$ und $= E'' G''$, dann sind die Componenten φ_1 und φ_2 gefunden und die Resultante aus ihnen giebt wieder die Strecke $D_1 H_1 = \varphi$.

Die Geschwindigkeit des Punktes A ist $V_A = \Omega . A C = A A_2$, seine Beschleunigung ist $\varphi_A = A A_3$. Für den Systempunkt B ergiebt sich $V_B = \Omega . B C = B B_2$, $\varphi_B = B B_3$.

Die Beschleunigung aller auf der Geraden $D O$ liegenden Systempunkte ist parallel zur Tangente $C X$ an (C). Die Beschleunigung aller auf dem Strahle $C D$ liegenden Systempunkte ist parallel zur Normalen $C Y$ der (C). Mit dem Kreise (Γ) fällt der Ort aller Systempunkte zusammen, welche die Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ besitzen. Der Ort aller Systempunkte, welcher Tangentialbeschleunigung φ_t verschwindet, wurde bereits verzeichnet.

Es unterliegt nun keiner Schwierigkeit, die Grössen Ω, U, ΩU, $\Omega^2 r$, $r \frac{d\Omega}{dt}$ für irgend eine andere Lage des Systempunktes D graphisch zu bestimmen, insofern die Zeichnungsfläche dazu ausreicht. Diese Grössen sind für eine Reihe von Lagen des Punktes D berechnet worden. Hierauf wurden durch alle diese Punkte D zur Bahn $A_0 B_0$ Normale gezogen, auf denselben je die entsprechenden Grössen $\Omega, U, \Omega U \ldots$, von (D) aus mit Rücksicht auf ihr Zeichen abgetragen, die positiven nach oben, die negativen nach unten, die Endpunkte aller Ω, U, $\Omega U, \ldots$, je durch einen stetigen Linienzug verbunden, wodurch die Curven (Ω), (U), (ΩU), $(\Omega^2 r)$, $\left(r \frac{d\Omega}{dt}\right)$ für die Bewegung des Punktes D von A_0 nach B_0 entstanden, welche die Änderung der Geschwindigkeiten Ω, U und der Beschleunigungen ΩU, $\Omega^2 r$, $r \frac{d\Omega}{dt}$ vollständig veranschaulichen, Geschwindigkeits- resp. Beschleunigungscurven genannt werden. Lassen wir den Systempunkt D von A_0 nach B_0 sich bewegen, so sehen wir sämtliche Grössen, welche alle beim Beginn der Bewegung unendlich gross sind, um so kleiner werden, je näher der Punkt D der Bahnmitte O kommt. Für die Bahnmitte wird

$\Omega = -\frac{c}{a}$, $U = c$, $\Omega U = -\frac{c^2}{a}$, $\Omega^2 r = \frac{c^2}{a}$, $r\frac{d\Omega}{dt} = 0$. Bewegt sich von hier aus D weiter nach B_0 hin, dann wachsen alle diese Grössen (absolut genommen) wieder und werden unendlich gross, wenn der Punkt D im Endpunkte B_0 seiner Bahn ankommt, was nach der Zeit $\frac{a}{c}\pi$ geschieht. Die Curven sind in Beziehung auf die Gerade MN, welche in O die Bahn (D) rechtwinkelig schneidet, symmetrisch. Die durch A_0 und B_0 zu $A_0 B_0$ senkrecht gezogenen Strahlen sind Asymptoten für alle Curven. Bewegt sich jetzt der Punkt D rückwärts, von B_0 nach A_0, dann ändert seine Geschwindigkeit die Richtung, das Momentancentrum kann hierbei entweder vorwärts oder zurückschreiten, im ersten Falle durchläuft es den Bogen $B_0 N A_0$, im zweiten den Bogen $B_0 M A_0$. Durch diese Änderung von c variieren die Zeichen der Geschwindigkeiten Ω, U und der Beschleunigungen nicht, wenn ψ beständig wächst, es liegen aber dann die Accelerationen ΩU und $\Omega^2 r$ auf der entgegengesetzten Seite von $A_0 B_0$. Die gezeichneten Beschleunigungscurven können daher auch für die Bewegung von B_0 nach A_0 als massgebend angesehen werden. Bei einem Umlaufe des Momentancentrums oder einer vollen Schwingung des Punktes D geht in diesem Falle die Geschwindigkeit U des Momentancentrums scheinbar aus $+\infty$ nach c, $+\infty$, $-\infty$, $-c$, $-\infty$, $+\infty$, während sie in Wirklichkeit stets positiv ist; ähnlich verhält es sich mit den übrigen Grössen. Wandert das Momentancentrum bei der Bewegung des Punktes D von B_0 nach A_0 rückwärts, dann ist die Bewegung mit derjenigen von A_0 nach B_0 identisch, nur umgekehrt. Die Darstellung der Geschwindigkeitscurven (V_A), (V_B) und der Beschleunigungscurven (φ_A), (φ_B) für die Systempunkte A und B unterliegt keiner Schwierigkeit, sie mag dem Studierenden überlassen bleiben.

c) Ein beliebiger Systempunkt D schreitet mit der konstanten Geschwindigkeit c in seiner elliptischen Bahn (D) fort. Die Bewegung des Systemes soll bezüglich der Beschleunigung untersucht werden.

Alle früheren Bezeichnungen beibehaltend, ist $\frac{U}{\Omega} = -a$, daher

$$\Omega = -\frac{c}{r} = -\frac{c}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \alpha^2 + \beta^2 - a(\alpha\cos 2\psi + \beta\sin 2\psi)}},$$

$$U = \frac{ac}{r} = \frac{ac}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \alpha^2 + \beta^2 - a(\alpha\cos 2\psi + \beta\sin 2\psi)}}.$$

Für die Accelerationen, welche die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D erzeugen, erhalten wir

$$\Omega U = -\frac{c}{r}\cdot\frac{ac}{r} = -\frac{ac^2}{r^2} = -\frac{ac^2}{\frac{a^2}{4}+\alpha^2+\beta^2-a(\alpha\cos 2\psi+\beta\sin 2\psi)},$$

$$\Omega^2 r = \left(\frac{c}{r}\right)^2 r = \frac{c^2}{r} = \frac{c^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\alpha^2+\beta^2-a(\alpha\cos 2\psi+\beta\sin 2\psi)}},$$

$$r\frac{d\Omega}{dt} = r\frac{d}{dt}\left(-\frac{c}{r}\right) = \frac{c\,dr}{r\,dt} = \frac{ac(\alpha\sin 2\psi-\beta\cos 2\psi)}{\frac{a^2}{4}+\alpha^2+\beta^2-a(\alpha\cos 2\psi+\beta\sin 2\psi)}\cdot\frac{d\psi}{dt}.$$

Weil aber der in der Zeit t von dem Momentancentrum durchlaufene Bogen $s = a\psi$, so ist

$$U = \frac{ds}{dt} = a\frac{d\psi}{dt} = \frac{ac}{r},\ \text{folglich}\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{r},\ \text{mithin}$$

$$r\frac{d\Omega}{dt} = \frac{ac^2}{r^3}(\alpha\sin 2\psi-\beta\cos 2\psi) = \frac{ac^2(\alpha\sin 2\psi-\beta\cos 2\psi)}{\left\{\frac{a^2}{4}+\alpha^2+\beta^2-a(\alpha\cos 2\psi+\beta\sin 2\psi)\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind sämtlich Funktionen des veränderlichen Winkels ψ, sie ändern sich daher während eines Umlaufes des Punktes D periodisch und lassen sich ihre Werte für die ausgezeichneten Lagen des Radiusvektor OC, also für $\psi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$ leicht anschreiben.

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zur Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden

$$-\Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt}y = 0,\quad \text{d. i.}\quad y = \frac{r^2}{a(\alpha\sin 2\psi-\beta\cos 2\psi)}x,$$

sie geht durch das Momentancentrum und bildet mit der Abscissenaxe einen Winkel

$$arc\left\{tg = \frac{\frac{a^2}{4}+\alpha^2+\beta^2-a(\alpha\cos 2\psi+\beta\sin 2\psi)}{a(\alpha\sin 2\psi-\beta\cos 2\psi)}\right\}.$$

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zur Tangente der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden

$$-\frac{d\Omega}{dt}x - \Omega^2 y + \Omega U = 0,\quad \text{d. i.}\quad y = \frac{a}{r^2}(\beta\cos 2\psi-\alpha\sin 2\psi)x - a,$$

ihre Coordinatenaxenstücke sind

$$\frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}} = \frac{r^2}{\beta\cos 2\psi-\alpha\sin 2\psi},\qquad \frac{U}{\Omega} = -a,$$

und ihr Abstand vom Momentancentrum, welcher zugleich die Entfernung des Beschleunigungspoles von C, ist

$$\delta = \frac{\Omega U}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}} = \frac{a r^2}{\sqrt{r^4 + a^2(\alpha \sin 2\psi - \beta \cos 2\psi)^2}}.$$

Die Coordinaten des Beschleunigungscentrums J sind

$$x_1 = \frac{\Omega U \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = \frac{a^2 r^2 (\beta \cos 2\psi - \alpha \sin 2\psi)}{r^4 + a^2(\alpha \sin 2\psi - \beta \cos 2\psi)^2},$$

$$y_1 = \frac{\Omega^3 U}{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = -\frac{a r^4}{r^4 + a^2(\alpha \sin 2\psi - \beta \cos 2\psi)^2}.$$

Diese Werte zeigen, dass das Beschleunigungscentrum im allgemeinen seine Lage bei der Bewegung des Punktes D ändert.

Für die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D und ihre Componenten φ_1, φ_2 erhalten wir, wenn p die Entfernung des Systempunktes vom Beschleunigungscentrum bezeichnet

$$\varphi = p\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2} = p\frac{c^2}{r^4}\sqrt{r^4 + (\alpha \sin 2\psi - \beta \cos 2\psi)^2},$$

$$\varphi_1 = \Omega^2 p = p\left(\frac{c}{r}\right)^2, \quad \varphi_2 = p\frac{d\Omega}{dt} = p\frac{a c^2}{r^4}(\alpha \sin 2\psi - \beta \cos 2\psi).$$

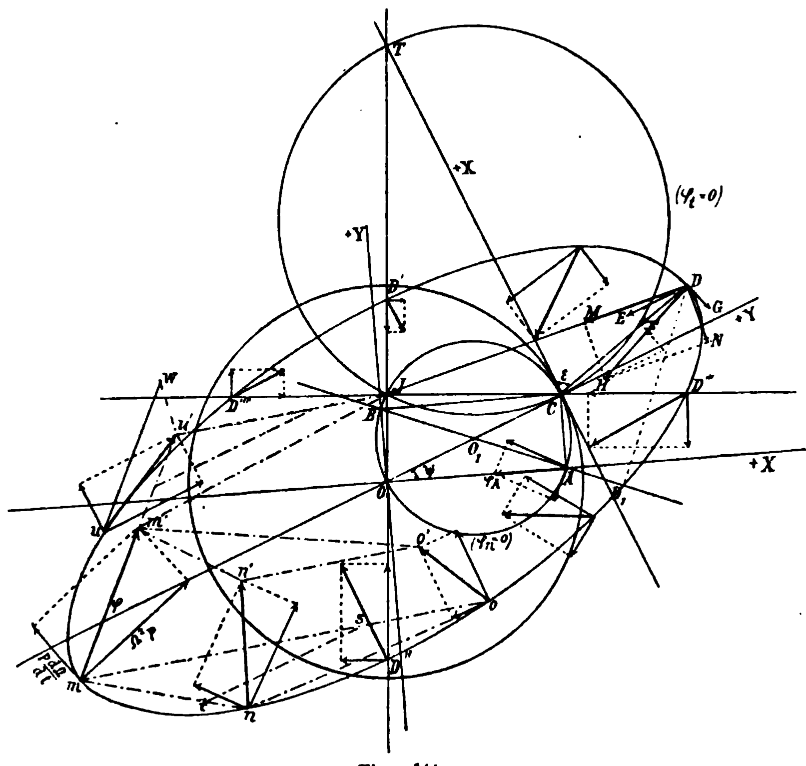
Der Ort aller Systempunkte, welche gleiche Beschleunigung μ besitzen, ist ein um den Beschleunigungspol als Mittelpunkt beschriebener Kreis vom Halbmesser

$$\frac{\mu}{\sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2}} = \frac{\mu r^4}{c^2\sqrt{r^4 + a^2(\alpha \sin 2\psi - \beta \cos 2\psi)^2}}.$$

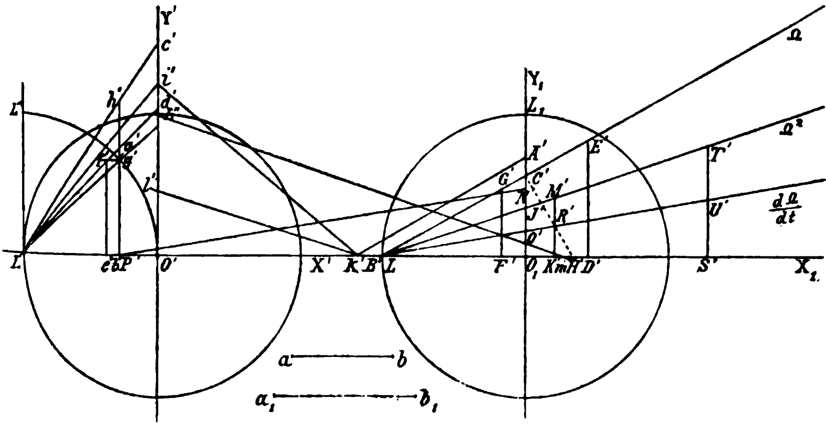
Der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\frac{U}{\Omega} = a$, seine Mittelpunktscoordinaten (x_0, y_0) sind $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{1}{2}a$, er fällt mit der Curve (Γ) zusammen. Der Ort aller Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung φ_t verschwindet, ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega U \frac{dt}{d\Omega} = \frac{r^2}{\beta \cos 2\psi - \alpha \sin 2\psi}$, seine Mittelpunktscoordinaten (x_0, y_0) sind $x_0 = \frac{r^2}{2(\beta \cos 2\psi - \alpha \sin 2\psi)}$, $y_0 = 0$.

Damit sind allgemein die Beschleunigungen sämtlicher Systempunkte analytisch ermittelt.

Die graphische Darstellung der Beschleunigungen lässt sich hier ebenso wie in den beiden vorhergehenden Fällen durchführen, sie ist durch die Figur 144 gegeben. Diese Figur zeigt zunächst die elliptische Bahn eines beliebigen Systempunktes. Der Lage D dieses Punktes entspricht



Figur 144.



Figur 144 b. Figur 144 a.

der Punkt C als Momentancentrum, so dass $CD = r$, CX die Tangente, CY die Normale der Curven (C) und (Γ) ist. Wir wählen für die Grösse der Geschwindigkeit des Punktes D die Strecke $ab = c$, als Massbasis die Strecke $a_1 b_1 = \lambda$ (Fig. 144 a). Zur Konstruktion der Grösse der Geschwindigkeiten und der Accelerationen verwenden wir das rechtwinkelige Axenkreuz $O_1 X_1$, $O_1 Y_1$ mit dem um O_1 als Mittelpunkt beschriebenen Kreise (λ) vom Halbmesser $O_1 L = O_1 L_1 = a_1 b_1$.

Weil $\Omega = -\frac{c}{r}$, so wird mit $O_1 A' = ab$, $O_1 B' = CD = r$, dem Strahle LC' parallel zur Linie $B'A'$, $O_1 C' = \Omega$. Weil $U = -a\Omega$, so wird mit $LD' = OC = a$, $D'E' \perp O_1 X_1$, $D'E' = U$. Mit $LF' = D'E'$, $F'G' \perp O_1 X_1$ erhalten wir $\Omega U = F'G'$. Die in der Richtung DC auf den Punkt D wirkende Beschleunigung ist $\Omega^2 r$. Mit $C'H' \perp LC'$ wird $O_1 H' = \Omega^2$, daher durch $O_1 J' = O_1 H'$, den Strahl LJ', $LK' = CD = r$, $K'M' \perp O_1 X_1$, $K'M' = \Omega^2 r$. Um die Beschleunigung $r\frac{d\Omega}{dt}$ senkrecht zu CD zu erhalten, können wir den für dieselbe gefundenen Ausdruck nach dem gewöhnlichen arithmographischen Verfahren durch eine Strecke darstellen, jedoch ist es einfacher, diese Strecke in anderer Weise zu bestimmen. Der Durchmesser des Kreises, welcher der Ort aller Systempunkte mit der Beschleunigung $\varphi_t = 0$, ist $\Omega U \frac{dt}{d\Omega} = \frac{r^2}{\beta \cos 2\psi - \alpha \sin 2\psi}$. Wir wählen das rechtwinkelige Axenkreuz $O'X'$, $O'Y'$ (Fig. 144 b) mit dem Basiskreise (λ), sein Radius ist $O'L' = O'L'' = \lambda$. Machen wir Bogen $O'a' =$ Bogen 2ψ mit λ als Radius, $a'b' \perp L'O'$, dann ist $a'b' = \sin 2\psi$, $L'b' = \cos 2\psi$. Die Coordinaten des Systempunktes D für die beweglichen Axen sind $O_1 D_1 = \alpha$, $D_1 D = \beta$. Zeichnen wir daher $O'c' = D_1 D$, $O'd' = O_1 D_1$, die Strahlen $L'c'$, $L'd'$, verlängern $b'a'$ bis zum Strahle $L'c'$, machen $L'e' = b'a'$, $e'f' \perp L'O'$, $f'g' \parallel L'O'$, so ist $g'h' = \beta \cos 2\psi - \alpha \sin 2\psi$. Nun machen wir $O'i' = CD = r$, $i'k' \perp L'i'$, wodurch $O'k' = r^2$ wird, $O'l' = g'h'$, $L''m' \parallel l'k'$, so ist $O'm' = \Omega U . \frac{dt}{d\Omega}$, welche Grösse die Formel als positiv giebt, da $\beta \cos 2\psi - \alpha \sin 2\psi > 0$ ist. Tragen wir jetzt auf der Abscissenaxe CX (Fig. 144, S. 381) die Strecke $CT = O'm'$ ab und verzeichnen über derselben als Durchmesser einen Kreis, so ist derselbe der Ort aller Systempunkte mit der Beschleunigung $\varphi_t = 0$. Dieser Kreis schneidet den Kreis (Γ), welcher der Ort aller Systempunkte mit der Beschleunigung $\varphi_n = 0$, in dem Punkte J, dem Beschleunigungspole. Weil nun $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega U}{CT} = \frac{F'G'}{O'm'}$, so machen wir $O_1 N' = F'G'$ (Fig. 144a, S. 381),

$O_1P' = O'm'$, $L'Q' \| P'N'$, dann ist $O_1Q' = \frac{d\Omega}{dt}$. Mit $LK' = CD$, $K'R' \perp O_1X_1$, folgt $r\frac{d\Omega}{dt} = K'R'$. Jetzt sind wir in der Lage, die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D darzustellen. Zu dem Ende machen wir, ΩU ist negativ, $r\frac{d\Omega}{dt}$ positiv, $DE \| CY$ u. $= F'G' = \Omega U$, $DF = K'M' = \Omega^2 r$ auf CD, $DG \perp DC$ u. $= K'R' = r\frac{d\Omega}{dt}$, wodurch nun die die Beschleunigung φ des Punktes D erzeugenden Accelerationen in ihrer wahren Lage gegeben sind. Die geometrische Summe dieser drei Strecken ist die Linie DH, mithin $\varphi = DH$. Zerlegen wir die Beschleunigung φ in ihre Componenten, deren Richtungen senkrecht und parallel zu CD sind, dann ergeben sich φ_t und φ_n. Weil die Lage des Beschleunigungspoles J bekannt ist, so lässt sich φ auch mittelst der Componenten $\varphi_1 = \Omega^2 p$, $\varphi_2 = p\frac{d\Omega}{dt}$ bestimmen, deren Richtungen parallel und senkrecht zum Polstrahle DJ sind. Mit $LS' = DJ = p$, $S'T' \perp O_1X_1$ wird $\Omega^2 p = S'T'$ (Fig. 144a, S. 381), $p\frac{d\Omega}{dt} = S'U'$, der Grösse nach. Machen wir nun auf DJ und der zu ihr normalen durch D $DM = S'T'$, $DN = S'U'$, dann sind die Componenten φ_1 und φ_2 auch der Lage nach bekannt und die Diagonale DH des mit ihnen als Seiten konstruierten Parallelogrammes giebt die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D.

Für mehrere Systempunkte, welche augenblicklich auf der Bahn des Punktes D liegen, wurde die Beschleunigung φ mittelst ihrer vorher bestimmten Componenten φ_1 und φ_2 dargestellt, um zu zeigen, wie die Richtung und Grösse dieser Accelerationen in einer Phase des Systemes wechselt.

Auf der Geraden CT liegen diejenigen Systempunkte, welche eine zur Tangente CX an die Curven (C), (Γ) parallele Beschleunigung besitzen, es sind darunter die Punkte D', D''. Auf dem Strahle CJ befinden sich diejenigen Systempunkte, welche eine zur Normalen CY der Curven (C), (Γ) parallele Beschleunigung besitzen, es sind darunter die Punkte D''', D''''.

Es ist zweckmässig, sich hier von der Richtigkeit einiger unter (I) angeführten Sätze zu überzeugen. Verbinden wir die Systempunkte m, n, o und die Endpunkte m', n', o' ihrer Beschleunigungen unter sich durch gerade Linien, dann sind die Dreiecke mno und $m'n'o'$ einander ähnlich. Machen wir nämlich auf mo die Strecke $ms = m'o'$, auf mn die Strecke $mt = m'n'$, und ziehen st, so zeigt sich, dass $st \| no$ ist, woraus die Ähn-

lichkeit der genannten Dreiecke folgt. Sind $m m'$, $n n'$ die Beschleunigungen der Systempunkte m, n und soll die Beschleunigung des Systempunktes o gefunden werden, so verzeichnen wir das Dreieck $m n o$, die Gerade $m'n'$, machen $\sphericalangle n'm'o' = \sphericalangle n m o$, $\sphericalangle m'n'o' = \sphericalangle m n o$, alsdann schneiden sich die gefundenen Winkelschenkel in dem Endpunkte o' der Beschleunigung $o o'$ des Punktes o. Verbinden wir die Eckpunkte zweier Beschleunigungen unter sich und mit dem Pole J durch gerade Linien, bilden aus den gegebenen Beschleunigungen und dem Winkel, unter welchem sich ihre Richtungen schneiden, ein Dreieck, dann zeigt es sich, dass dieses Dreieck ähnlich dem Dreiecke ist, dessen Eckpunkte die Endpunkte der Beschleunigungen und der Pol J sind. In der Figur wurden die Beschleunigungen $m m'$, $u u'$ der Systempunkte m, u gewählt. Das Centraldreieck ist das Dreieck $m'u'J$. Mit $u w \parallel m m'$ ergiebt sich das Dreieck $u u'w$, welches dem Dreiecke $m'u'J$ ähnlich ist, denn wir finden $\sphericalangle u u'w = \sphericalangle u m'J$, $\sphericalangle u'u w = \sphericalangle m'J u'$. Sind daher die Beschleunigungen $m m'$, $u u'$ gegeben und soll der Beschleunigungspol J gefunden werden, so konstruieren wir aus $m m'$, $u u'$ mit $u w \underline{\parallel} m m'$ das Dreieck $u u'w$, ziehen $m'u'$, machen $\sphericalangle u'm'J = \sphericalangle w u u'$, $\sphericalangle m'u'J = \sphericalangle u'w u$, dann schneiden sich die gefundenen Winkelschenkel in dem Beschleunigungspole J.

Die Beschleunigung des Punktes A der Systemgeraden $A B$ ist $A\varphi_A$, sie fällt mit $A O$ zusammen. Mittelst des unter (I) gegebenen Verfahrens ist es leicht, für jeden beliebigen Punkt dieser Geraden die Beschleunigung φ zu finden, wenn φ_A und φ_B bekannt sind.

Fällt der Systempunkt D mit der Mitte O_1 der Geraden $A B$ zusammen, dann ist $\alpha = \beta = 0$, $r = \frac{a}{2}$, wodurch in diesem Falle $\Omega = -\frac{2c}{a}$, $U = 2c$, $\Omega U = -\frac{4c^2}{a}$, $\Omega^2 r = \frac{2c^2}{a}$, $r\frac{d\Omega}{dt} = 0$, $\varphi = \varphi_1 = \frac{2c^2}{a}$, $\varphi_2 = 0$. Die Beschleunigung φ ist während der ganzen Bewegung des Systemes konstant, der Beschleunigungspol fällt stets mit dem Durchschnittspunkte O der Führungsgeraden der Punkte A und B zusammen. Befindet sich der mit konstanter Geschwindigkeit c fortschreitende Systempunkt D auf dem Kreise (Γ), so ist seine Bahn eine durch den Punkt O gehende gerade Linie. In diesem Falle ist $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{4}$, womit aus den allgemeinen Formeln die Werte der Beschleunigungscomponenten etc. leicht abgeleitet werden können. Die eingehende Untersuchung dieses Spezialfalles wurde bereits unter b) gegeben.

Ist die Hypocycloidenbewegung so beschaffen, dass die Führungsgeraden der Punkte A und B sich unter einem beliebigen Winkel γ schneiden, dann lässt sich die Bewegung des Systemes unter obigen Ver-

hältnissen mit derselben Leichtigkeit untersuchen, was aber dem Studierenden zur Übung überlassen bleiben muss.

2. **Ein unveränderliches, ebenes System schreitet in seiner Ebene so fort, dass die eine der zwei unter rechtem Winkel fest miteinander verbundenen Systemgeraden OP, PS immer durch den festen Punkt O geht, die andere, PS, an einem in dieser Ebene festliegenden Kreise vom Halbmesser a, dessen Mittelpunkt M von O um die Strecke e entfernt ist, hingeleitet.** (Figur 145, Seite 387.)

a) Das Momentancentrum C bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c in seiner kreisförmigen Bahn. Wie ist die Bewegung des Systemes rücksichtlich der Beschleunigung beschaffen?

Die konstanten Krümmungshalbmesser der Curven (C) und (Γ) sind $\Gamma = \frac{e}{2}$, $\Gamma_1 = e$, womit, weil beide Curven auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen, sich ergiebt $\frac{U}{\Omega} = e$. Nun ist $U = c$, daher $\Omega = \frac{c}{e} = \omega$. Der von dem Momentancentrum C in der Zeit t durchlaufene Bogen ist mit den früheren Bezeichnungen, wenn zur Zeit $t = 0$, $\psi = 0$, $OC = s = ct = \frac{e}{2}\psi$, so dass $\frac{d\psi}{dt} = 2\frac{c}{e} = 2\omega$, also die Winkelgeschwindigkeit der Geraden NC um C gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist. Für den Abstand r eines beliebigen Systempunktes D vom Geschwindigkeitspole C besteht die Gleichung

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e\left(\alpha \cos\frac{\psi}{2} + \beta \sin\frac{\psi}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)},$$

für welchen Ausdruck jedoch in der Folge der Kürze halber r beibehalten werden soll.

Die Accelerationen, welche die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D erzeugen, sind

$$\Omega U = \frac{c^2}{e} = \omega c, \quad \Omega^2 r = \left(\frac{c}{e}\right)^2 r = \omega^2 r, \quad r\frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zur Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden $x = 0$, welche demnach mit der Ordinatenaxe CY zusammenfällt. Die Beschleunigung derjenigen Systempunkte,

welche auf der Geraden $y = e$, einer im Abstande e von der Axe CX zu dieser parallel laufenden Linie liegen, ist parallel zur Abscissenaxe CX.

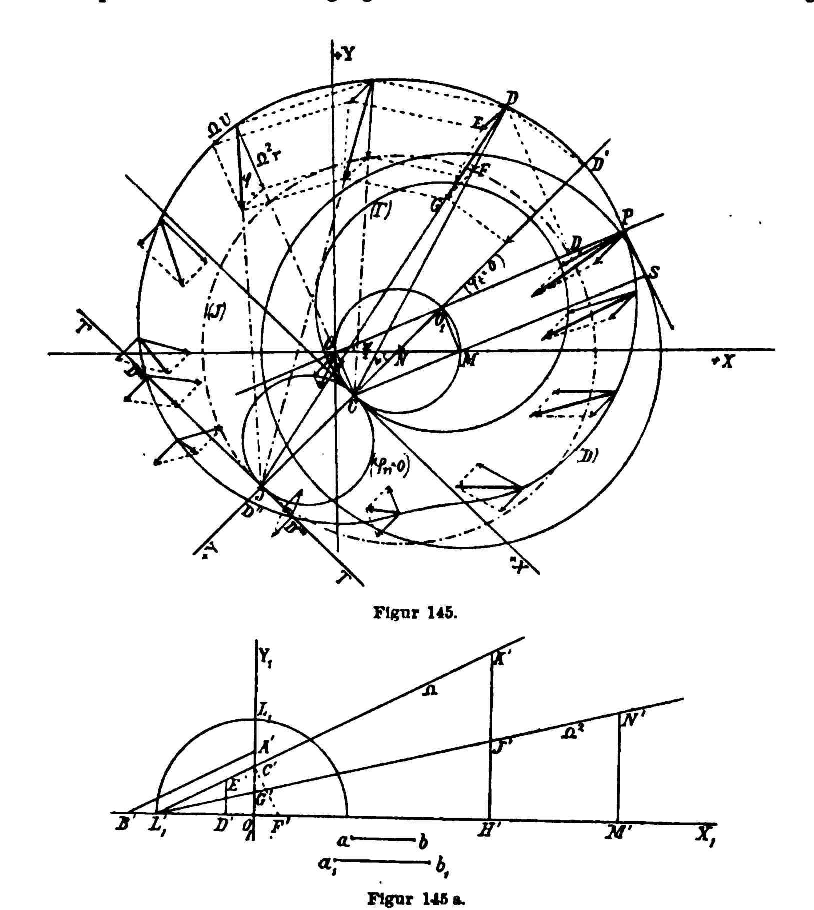
Die Coordinaten des Beschleunigungspoles sind $x_1 = 0$, $y_1 = \frac{U}{\Omega} = e$, seine Entfernung vom Momentancentrum ist $\delta = \frac{U}{\Omega} = e$. Demnach ist das Beschleunigungscentrum J von dem Mittelpunkte N der Curve (C) um die Strecke $\frac{3}{2}e$ entfernt, so dass dasselbe bei der Bewegung des Systemes einen mit der Curve (C) koncentrischen Kreis vom Radius $\frac{3}{2}e$ beschreibt. Beide Pole durchlaufen ihre Bahnen gleichzeitig und zwar zweimal, wenn der Systempunkt D seine Bahn einmal zurücklegt, wobei der Beschleunigungspol J die dreifache Geschwindigkeit des Momentancentrums besitzt.

Der Ort aller Systempunkte mit gleicher Beschleunigung μ ist ein um J als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{\mu}{\Omega^2} = \mu\left(\frac{e}{c}\right)^2 = \frac{\mu}{\omega^2}$ beschriebener Kreis.

Die resultierende Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes ist $\varphi = p\,\Omega^2 = p\,\omega^2$, ihre Componenten in den Richtungen parallel und senkrecht zu dem Polstrahle DJ sind $\varphi_1 = p\,\omega^2$, $\varphi_2 = 0$, sie ist stets nach dem Beschleunigungspole J gerichtet.

Der Kreis, auf welchem die Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ liegen, besitzt den Halbmesser $\frac{1}{2}e$, die Mittelpunktscoordinaten $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}e$, er liegt zwischen den Curven (C) und (J). Der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$ ist ein Kreis von unendlich grossem Halbmesser, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = \infty$, $y_0 = 0$, er fällt mit der Ordinatenaxe CY zusammen.

Die geometrische Darstellung der Beschleunigung φ einzelner Systempunkte ist durch die Figur 145 (S. 387) gegeben. Die Geraden OP, PS repräsentieren die augenblickliche Lage der beiden unter rechtem Winkel fest miteinander verbundenen Geraden, M ist der Mittelpunkt des Führungskreises vom Halbmesser $MS = a$. Dieser Lage des Systemes entspricht das Momentancentrum C. Die in C an die Kreise (C) und (Γ) gezogene Tangente giebt die Abscissenaxe CX, die Centrale dieser Curven die Ordinatenaxe CY. Machen wir auf der Ordinatenaxe $CJ = e$, so ist der Punkt J Beschleunigungspol. Der über CJ als Diameter beschriebene Kreis ist der Ort aller Systempunkte, welche die Normalbe-



Figur 145.

Figur 145 a.

schleunigung $\varphi_n = 0$ besitzen. Auf der Centralen $N O_1$ der Curven (C) und (Γ) liegen alle Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$, sie ist zugleich der Ort aller Punkte, welche eine zur Ordinatenaxe $C Y$ parallele Beschleunigung besitzen. Der durch J zur Abscissenaxe $C X$ parallel gezogene Strahl $J T$ enthält alle Systempunkte mit einer zur Abscissenaxe $C X$ parallelen Beschleunigung. Der um N als Mittelpunkt mit dem Radius $N J$ beschriebene Kreis ist die Bahn des Beschleunigungspoles. (D) ist die Bahn eines beliebig gewählten Systempunktes D.

Das Momentancentrum bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $a b = c$, bezogen auf die Masseinheit $a_1 b_1 = \lambda$. Für das graphische Rechnen verwenden wir das rechtwinkelige Axenkreuz $O'X'$, $O'Y'$ mit dem Einheitskreise (λ) vom Halbmesser $O'L = O'L_1 = a_1 b_1$ (Figur 145 a). Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist $\Omega = \frac{c}{e}$. Mit $O'A' = a b = c$, $O'B' = OM = e$, $LC' \parallel B'A'$, wird $\Omega \doteq O'C'$.

Die zur Ordinatenaxe CY parallele Beschleunigung irgend eines Systempunktes ist ΩU. Mit $LD' = O'C'$, $D'E' \perp O'X'$ wird $\Omega U = D'E'$. Die nach dem Momentancentrum C gerichtete Beschleunigung des Punktes D ist $\Omega^2 r = \Omega^2 . CD$. Mit $C'F' \perp LC'$ ergiebt sich $O'F' = \Omega^2$. Machen wir daher $O'G' = O'F'$, ziehen den Strahl LG', zeichnen $LH' = CD$, $H'K' \perp O'X'$, so wird $\Omega^2 r = H'J'$, und gleichzeitig $V = \Omega r = H'K' =$ der Geschwindigkeit des Systempunktes D, der Grösse nach. Um nun zur resultierenden Beschleunigung φ des Systempunktes D zu gelangen, machen wir $DE \parallel CY$ und $= D'E'$, auf der Linie DC die Strecke $DF = H'J'$, konstruieren das Parallelogramm $DEGF$ mit der Diagonale DG, welche die gesuchte Beschleunigung φ ist, ihre Richtung geht durch den Beschleunigungspol J. Es ist aber auch $\varphi = p . \Omega^2 = DJ . \Omega^2$. Machen wir deshalb $LM' = DJ$, $M'N' \perp O'X'$, $DG = M'N'$, so ist φ ebenfalls bestimmt. Die Figur 145, S. 387 zeigt für mehrere Punkte auf der Bahn (D) die Beschleunigung φ und ihre Componenten ΩU, $\Omega^2 r$, welche aber andere Bahnen wie der Systempunkt D besitzen. Die resultierende Beschleunigung φ der Punkte D', D'' ist parallel zu der Ordinatenaxe CY, diejenige der Punkte D''', D'''' parallel zur Abscissenaxe CX. Ferner wurde die Acceleration φ des Punktes P mit ihren Componenten, sowie diejenige der Systempunkte O_1 und O dargestellt. Da die Beschleunigung φ hier nach dem Beschleunigungspole, die Beschleunigung $\Omega^2 r$ nach dem Momentancentrum gerichtet ist, sind diese Grössen für jeden beliebigen Systempunkt sofort von den entsprechenden Grössen für den Systempunkt D ableitbar, denn für die Punkte D und D_1 haben wir die Relationen $\varphi' = \frac{p_1}{p} \varphi$, $\varphi_{r_1} = \frac{r_1}{r} \varphi_r$, wenn φ_r und φ_{r_1} die Accelerationen in den Richtungen nach dem Momentancentrum bedeuten.

b) Ein beliebiger Systempunkt D bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c in seiner Bahn. Das System soll bezüglich der Beschleunigung untersucht werden.

Wir haben hier wieder $\frac{U}{\Omega} = e$, so dass

$$\Omega = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e\left(\alpha \cos\frac{\psi}{2} + \beta \sin\frac{\psi}{2}\right)}}$$

$$U = \frac{ce}{r} = \frac{ce}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + e^2 + 2e\left(\alpha \cos\frac{\psi}{2} + \beta \sin\frac{\psi}{2}\right)}}.$$

Die Accelerationen, welche die resultierende Beschleunigung φ des System-

punktes D erzeugen, sind, weil die Winkelbeschleunigung des Systemes um das Momentancentrum

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{r}\right)=-\frac{c}{r}\frac{dr}{dt}=\frac{ce}{2}r^{-3}\left(\alpha \sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)\frac{d\psi}{dt},$$

oder, wenn wir beachten, dass der in der Zeit t vom Momentancentrum zurückgelegte Weg $s=OC=\frac{e}{2}\psi$, mit O als seiner Anfangslage, also auch $U=\frac{ds}{dt}$, mithin $\frac{e}{2}\frac{d\psi}{dt}=\frac{ce}{r}$, d. i. $\frac{d\psi}{dt}=\frac{2c}{r}$,

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{c^2e}{r^4}\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)=\frac{c^2e\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)}{\left\{\alpha^2+\beta^2+e^2+2e\left(\alpha\cos\frac{\psi}{2}+\beta\sin\frac{\psi}{2}\right)\right\}^2},$$

$$\Omega U=\frac{c^2e}{r^2}=\frac{c^2e}{\alpha^2+\beta^2+e^2+2e\left(\alpha\cos\frac{\psi}{2}+\beta\sin\frac{\psi}{2}\right)},$$

$$\Omega^2 r=\frac{c^2}{r}=\frac{c^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+e^2+2e\left(\alpha\cos\frac{\psi}{2}+\beta\sin\frac{\psi}{2}\right)}},$$

$$r\frac{d\Omega}{dt}=\frac{c^2e}{r^3}\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)=\frac{c^2e\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)}{\left\{\alpha^2+\beta^2+e^2+2e\left(\alpha\cos\frac{\psi}{2}+\beta\sin\frac{\psi}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die bisher berechneten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind Funktionen des veränderlichen Winkels ψ, daher während eines Umlaufes des Systempunktes D in seiner Bahn periodisch veränderlich.

Die Systempunkte, welche eine zur Ordinatenaxe CY parallele Beschleunigung besitzen, liegen auf der Geraden

$$y=\frac{r^2}{e\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)}x,$$

dieselbe läuft durch das Momentancentrum und schliesst mit der Abscissenaxe CX den Winkel $arc\left\{tg=\frac{r^2}{e\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)}\right\}$ ein.

Die Systempunkte mit einer zur Abscissenaxe CX parallelen Beschleunigung befinden sich auf der Geraden

$$y=\frac{e}{r^2}\left(\beta\cos\frac{\psi}{2}-\alpha\sin\frac{\psi}{2}\right)x+e,$$

ihre Coordinatenaxenstücke und ihr Abstand vom Momentancentrum sind

$$\Omega U\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r^2}{\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}},\quad \frac{U}{\Omega}=e,\quad \delta=\frac{e r^2}{\sqrt{r^4+e^2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}}.$$

Für die Coordinaten des Beschleunigungspoles ergiebt sich

$$x_1=\frac{e^2r^2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)}{r^4+e^2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)^2},\quad y_1=\frac{e r^4}{r^4+e^2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}.$$

Diese Werte zeigen, dass das Beschleunigungscentrum seine Lage während der Bewegung des Systemes ändert.

Der Ort aller Systempunkte mit gleicher Beschleunigung μ ist ein um den Beschleunigungspol als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $\frac{\mu\delta}{\Omega U}$ $=\frac{\mu r^4}{c^2\sqrt{r^4+e^2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}}$ beschriebener Kreis. Der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n=0$ ist ein Kreis vom Halbmesser $\frac{e}{2}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0=0$, $y_0=\frac{e}{2}$. Der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t=0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega U\frac{dt}{d\Omega}=\frac{r^2}{\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0=\frac{r^2}{2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)}$, $y_0=0$.

Für die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D und ihre Componenten φ_1,φ_2 ergiebt sich

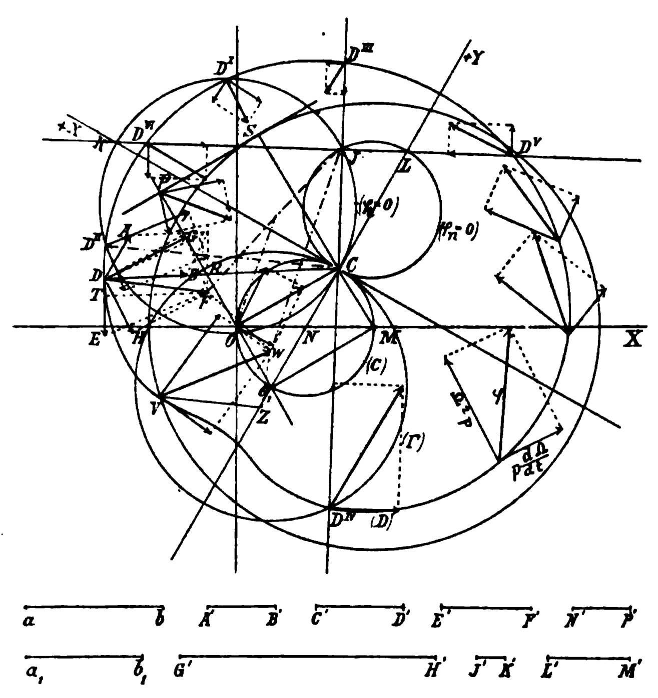
$$\varphi=p\left(\frac{c}{r^2}\right)^2\sqrt{r^4+e^2\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)^2},\qquad \varphi_1=p\left(\frac{c}{r}\right)^2,$$

$$\varphi_2=p\left(\frac{c}{r^2}\right)^2e\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right),$$

und schliesst die Beschleunigung φ mit dem Polstrahle DJ den Winkel $arc\left\{tg=\frac{e}{r^2}\left(\alpha\sin\frac{\psi}{2}-\beta\cos\frac{\psi}{2}\right)\right\}$ ein.

Die geometrische Darstellung der Beschleunigung φ und ihrer Componenten kann ganz in derselben Weise bewirkt werden, wie dieses unter c) für die Hypocycloidenbewegung angegeben wurde, wodurch hier die graphische Berechnung übergangen werden soll.

Durch die Figur 146 (S. 391) sind die Beschleunigungen einzelner Systempunkte veranschaulicht. Die augenblickliche Lage der die Bewegung des Systemes bedingenden Geraden geben die Geraden OP, PS, C ist das



Figur 146.

entsprechende Momentancentrum. D ist der beliebig gewählte Systempunkt, welcher mit konstanter Geschwindigkeit c die Bahn (D) beschreibt. Die der analytischen Rechnung zugrunde liegenden Coordinatenaxen sind die Geraden CX, CY, die Tangential- und Normallinie der Curven (C), (Γ). Im vorliegenden Falle ist $\sphericalangle \frac{\psi}{2} = \sphericalangle SMX$ ein stumpfer Winkel, sein Cosinus ist negativ, wodurch $\frac{d\Omega}{dt}$ und $\frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}$ positiv ausfallen. Wir wählten die Geschwindigkeit c des Systempunktes D gleich der Strecke $a'b$, die Masseinheit gleich der Strecke $a_1 b_1$. Hiermit ergab sich $\Omega = A'B'$, $U = C'D'$, $\Omega U = E'F'$. $\Omega U . \frac{dt}{d\Omega} = G'H'$, $\frac{d\Omega}{dt} = J'K'$ aus $E'F'$ und $G'H'$, $\Omega^2 r = L'M'$, $r\frac{d\Omega}{dt} = N'P'$, der Grösse nach. Machen wir auf den Coordinatenaxen CX, CY $CK = G'H' = \Omega U . \frac{dt}{d\Omega}$, $CL = OM = e = \frac{U}{\Omega}$, beschreiben über diesen Strecken als Durchmesser Kreise, so ergeben sich die Orte derjenigen Systempunkte, welche die Beschleunigungen $\varphi_t = 0$, $\varphi_n = 0$ besitzen. Der Durchschnittspunkt J dieser Kreise giebt die Lage des

Beschleunigungspoles, welcher um die Strecke $CJ = \delta$ vom Momentancentrum entfernt ist. Mit dem Strahle CJ fallen diejenigen Systempunkte zusammen, welchen eine zur Ordinatenaxe CY parallele Beschleunigung zukommt. Auf dem Strahle JK befinden sich die Systempunkte mit einer zur Abscissenaxe CX parallelen Beschleunigung. Um aus den Componenten ΩU, $\Omega^2 r, r\frac{d\Omega}{dt}$ die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D zu erhalten, machen wir $DA \parallel CY$ und $= C'F'$, $DB = L'M'$ auf DC, $DE \perp CD$ und $= N'P'$, womit nun auch die Beschleunigungscomponenten in ihrer wahren Lage erscheinen. Hieraufbilden wir die Summe DF aus den drei Richtungsstrecken, welche die Beschleunigung φ des Punktes D nach Grösse und Lage giebt. Ferner sind die Componenten φ_1 und φ_2 von φ $\varphi_1 = \Omega^2 p = \Omega^2 . DJ = DG, \varphi_2 = p\frac{d\Omega}{dt} = DJ.J'K' = DH.$ Die geometrische Summe der Strecken DG und DH giebt wieder $DF = \varphi$. Durch Zerlegung von $\varphi = DF$ in ihre Componenten parallel und senkrecht zur Bahntangente folgt $\varphi_t = DT$, $\varphi_n = DR$. Weiter wurden die Beschleunigungscomponenten φ_1 und φ_2 mehrerer auf der Bahn (D) gelegener Systempunkte ermittelt und aus ihnen die resultierende Beschleunigung φ dieser Punkte abgeleitet, wodurch sich erkennen lässt, wie die Grösse und Richtung von φ für verschiedene Systempunkte augenblicklich beschaffen ist. Auf der Bahn (D) befindet sich zur Zeit kein Systempunkt mit der Beschleunigung $\varphi_n = 0$. Der Kreis $CK(\varphi_t = 0)$ schneidet die Bahn (D) in den Punkten D^{I}, D^{II}, ihre Beschleunigung φ ist nach dem Momentancentrum C gerichtet. Die Systempunkte D^{III}, D^{IV} auf (D) fallen mit dem Strahle CJ zusammen, ihre Beschleunigung φ ist parallel zur Normalen der Curve (C). Die Systempunkte D^{V}, D^{VI} liegen auf der Geraden JK, ihre Beschleunigung ist parallel zur Tangente der Curve (C) in C. Verbinden wir die Endpunkte F, W der Beschleunigungen φ der Systempunkte D, V unter sich und mit dem Pole J durch gerade Linien, machen $VZ \stackrel{\parallel}{=} DF$ und ziehen ZW, dann ist $\triangle FJW \sim \triangle ZVW$. Die Accelerationen der Systempunkte P, O sind ebenfalls verzeichnet, durch sie sind die Beschleunigungen sämtlicher Punkte der Systemgeraden OP gegeben.

Die Lösung der Aufgabe bleibt ganz dieselbe unter der Annahme, dass der Systempunkt P mit konstanter Geschwindigkeit seine Bahn beschreibt, es vereinfachen sich dann die oben erhaltenen Resultate mit denen, weil in diesem Falle $\alpha = a$, $\beta = 0$, sich auch sofort ergiebt

$$\Omega = \frac{c}{\sqrt{a^2 + e^2 + 2ae\cos\frac{\psi}{2}}}, \quad U = \frac{ce}{\sqrt{a^2 + e^2 + 2ae\cos\frac{\psi}{2}}},$$

$$\Omega U = \frac{c^2 e}{a^2 + e^2 + 2ae\cos\frac{\psi}{2}}, \quad \Omega^2 r = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + e^2 + 2ae\cos\frac{\psi}{2}}},$$

$$r\frac{d\Omega}{dt} = ac^2 e\sin\frac{\psi}{2}\left(a^2+e^2+2ae\cos\frac{\psi}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}, \quad \Omega U.\frac{dt}{d\Omega} = -\frac{a^2+e^2+2ae\cos\frac{\psi}{2}}{a\sin\frac{\psi}{2}}.$$

$$x_1 = \frac{ae^2 r^2 \sin\frac{\psi}{2}}{r^4 + a^2 e^2 \sin^2\frac{\psi}{2}}, \quad y_1 = \frac{er^4}{r^4 + a^2 e^2 \sin^2\frac{\psi}{2}}, \quad \delta = \frac{er^2}{\sqrt{r^4 + a^2 e^2 \sin^2\frac{\psi}{2}}},$$

$$\varphi = p\frac{c^2}{r^4}\sqrt{r^4 + a^2 e^2 \sin^2\frac{\psi}{2}}, \quad \varphi_1 = p\left(\frac{c}{r}\right)^2, \quad \varphi_2 = p\frac{c^2 e}{r^4}\sin\frac{\psi}{2}.$$

Fällt der Systempunkt D mit dem Punkte O_1 zusammen, dann beschreibt er einen Kreis vom Durchmesser e, seine Bahn ist mit derjenigen des Momentancentrums identisch, es ist $r = e$, $\Omega = \frac{c}{e}$, $U = c$, $\Omega U = \frac{c^2}{e}$, $\Omega^2 r = \frac{c^2}{e}$, $r\frac{d\Omega}{dt} = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = e$, $\varphi = 2\frac{c^2}{e} = \varphi_1$. Das System bewegt sich in derselben Weise wie unter a).

Schneiden sich die Systemgeraden OP, PS unter einem beliebigen Winkel γ, so ist die Untersuchung ganz dieselbe, welche dem Studierenden zur selbständigen Übung dienen mag.

3. **Ein unveränderliches, ebenes System schreitet in seiner Ebene so fort, dass eine seiner Geraden stets durch einen festen Punkt O geht und ein Punkt B dieser Linie auf einer festen Geraden (G) hingleitet. Das System soll bezüglich der Beschleunigung untersucht werden.**

a) Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist eine konstante Grösse ω.

Unter Beibehalt der früheren Anordnung der Coordinatensysteme und Bezeichnung sind die Gleichungen der Curven (C) und (Γ)

$$\varrho = a\sin\psi\sec\psi, \qquad \varrho' = a\sec^2\psi,$$

aus denen für die Krümmungshalbmesser dieser Curven folgt

$$\Gamma = \pm\frac{a}{2}(1 + 4tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}, \quad \Gamma_1 = \pm\frac{a\sec^2\psi(1 + 4tg^2\psi)}{2tg^2\psi - 1}.$$

Damit ergiebt sich

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1 - \Gamma} = a\sec^2\psi\sqrt{1 + 4tg^2\psi},$$

so dass im vorliegenden Falle

$$\Omega = \omega. \qquad U = a\,\omega\,sec^2\,\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi}.$$

Die Geschwindigkeit des auf der Geraden (G) fortrückenden Punktes B der Systemgeraden OB ist, wenn s den Weg B_0B dieses Punktes in der Zeit t bezeichnet, also zur Zeit $t = 0$, $\psi = 0$, zur Zeit $t = t$, $\psi = \psi$ ist,

$$V_B = a\,\omega\,sec^2\,\psi = \frac{ds}{dt} = a\,sec^2\,\psi\,\frac{d\psi}{dt}, \text{ weil } s = a\,tg\,\psi, \text{ so dass } \frac{d\psi}{dt} = \omega.$$

$\psi = \omega t$, mithin auch

$$U = a\,\omega\,sec^2\,\omega t\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\omega t}.$$

Die Accelerationen, welche die resultierende Beschleunigung φ eines beliebigen Systempunktes D erzeugen, sind

$$\Omega\,U = a\,\omega^2\,sec^2\,\omega t\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\omega t},$$

$$\Omega^2 r = \omega^2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + a^2\,sec^4\,\omega t + 2\,a\,sec\,\omega t\,(\alpha + \beta\,tg\,\omega t)}, \qquad r\frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Die Systempunkte mit einer zur Normalen der Curve (C) parallelen Beschleunigung liegen auf der Geraden $x = 0$, d. h. sie fallen mit der Ordinatenaxe CY zusammen. Die Systempunkte mit einer zur Tangente der Curve (C) parallelen Beschleunigung befinden sich auf der Geraden $y = \frac{U}{\Omega} = a\,sec^2\,\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi}$, d. i. auf einer Linie, welche in einem Abstande $\frac{U}{\Omega}$ parallel zur Abscissenaxe CX läuft.

Die Coordinaten des Beschleunigungscentrums J sind

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = a\,sec^2\,\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi} = \delta.$$

Der Radius des Kreises um das Beschleunigungscentrum als Mittelpunkt, auf dem alle Systempunkte mit gleicher Beschleunigung μ liegen, ist gleich $\frac{\mu}{\omega^2}$.

Der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist ein Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}\,a\,sec^2\,\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}\,a\,sec^2\,\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi}$. Der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$ fällt mit der Ordinatenaxe CY zusammen, er ist ein Kreis von unendlich grossem Halbmesser, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = \infty$, $y_0 = 0$.

Die Lage des Beschleunigungspoles J lässt sich in diesem Falle sehr leicht bestimmen. Weil der Systempunkt B eine geradlinige Bewegung besitzt, so muss offenbar dessen Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ sein, d. h. der Kreis ($\varphi_n = 0$) muss durch diesen Punkt laufen, mithin muss dieser Kreis

die auf CB senkrecht stehende Gerade (G) (Fig. 147, S. 397) und die Ordinatenaxe CY gleichzeitig schneiden. Verlängern wir daher die Normallinie der Curve (C) für den Punkt C bis zum Schnittpunkte J mit der Geraden (G), so ist CJ ein Durchmesser des Kreises $(\varphi_n = 0)$, und weil das Beschleunigungscentrum um den Durchmesser dieses Kreises von dem Momentancentrum entfernt ist, so ergiebt sich, dass dasselbe mit dem Punkte J zusammenfällt. Hierzu gelangen wir auch infolge einer Eigenschaft der parabolischen Bahn des Geschwindigkeitspoles. Die Subnormale der Curve (C) ist hier konstant $= \frac{1}{2} O B_0 = \frac{1}{2} a$. Machen wir daher $CE \perp OB_0$, $EF = \frac{1}{2} O B_0$ und ziehen den Strahl CF, so ergiebt sich in ihm die Normallinie der Curve (C) für den Punkt C, welche die Gerade (G) im Punkte J schneidet. Mit $OH = OE$ wird der Strahl CH zur Tangente an die Curve (C) in C. Dadurch sind die Coordinatenaxen CY und CX bestimmt. Die Länge der Parabelnormalen ist $CF = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a x}$ $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 (sec^2 \psi - 1)} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + 4 tg^2 \psi}$, daher der Abstand des Punktes J von C infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke BCJ und EFC,

$$CJ = \frac{CF}{EF} \cdot BC = \frac{a}{2} \sqrt{1 + 4 tg^2 \psi} \, \frac{a \, sec^2 \psi}{\frac{a}{2}} = a \, sec^2 \psi \sqrt{1 + 4 tg^2 \psi} = \frac{U}{\Omega}.$$

Die Länge der Normallinie der Bahn (C) zwischen dem Momentancentrum und ihrem Schnittpunkte mit der Führungsgeraden (G) ist daher gleich dem Verhältnisse aus der Geschwindigkeit U des Momentancentrums und der Winkelgeschwindigkeit Ω des Systemes um dasselbe, sie ist ein Durchmesser des Kreises $(\varphi_n = 0)$. Weil das Dreieck BJC ein bei B rechtwinkeliges ist, so geht der Kreis $(\varphi_n = 0)$ auch durch den Punkt B, welcher mithin keine Acceleration in senkrechter Richtung zu seiner Bahn (G) besitzt. Die Ordinatenaxe CY ist der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$, sie schneidet den Kreis $(\varphi_n = 0)$ im Punkte J, daher ist dieser Punkt J auf (G) der Beschleunigungspol, welcher während der Bewegung des Systemes die geradlinige Bahn (G) besitzt.

Zur Zeit $t = 0$ fällt das Beschleunigungscentrum mit dem Punkte B_0 zusammen, der von ihm in der Zeit $t = t$ zurückgelegte Weg ist $s = B_0 J$

$$= B_0 B + BJ = B_0 B + \frac{CE}{EF} \cdot BC = a \, tg \, \psi + \frac{a \, tg \, \psi}{\frac{a}{2}} a \, sec^2 \psi = a \, tg \, \psi \times$$

$(1 + 2 \, sec^2 \psi) = a \, tg \, \omega t \, (1 + 2 \, sec^2 \omega t)$. Daraus ergiebt sich als Geschwin-

digkeit des Beschleunigungspoles $\frac{ds}{dt} = a\,sec^2\omega t\{1 + 2 sec\,\omega t(sec\,\omega t + sin^2\omega t)\}$. Für die resultierende Beschleunigung φ eines beliebigen Systempunktes D und deren Componenten φ_1, φ_2 erhalten wir

$$\varphi = \omega^2 p = \varphi_1, \qquad \varphi_2 = 0,$$

was zeigt, dass die Acceleration φ mit dem Polstrahle DJ zusammenfällt. Im gegenwärtigen Falle lässt sich leicht die Poldistanz p als Funktion des Winkels ψ, mithin auch als Funktion der Zeit darstellen. Wählen wir B_0 als Ursprung, die Geraden OB_0, B_0B als Axen eines festen rechtwinkeligen Coordinatensystemes, dann sind die Coordinaten (X, Y) des Punktes D $X = \alpha\,cos\,\psi - \beta\,sin\,\psi$, $Y = a\,tg\,\psi + \alpha\,sin\,\psi + \beta\,cos\,\psi$, diejenigen (x,y) des Beschleunigungspoles $x = 0, y = B_0J = a\,tg\,\psi\,(1 + 2 sin 2\psi)$ womit sich ergiebt

$$p^2 = X^2 + (y - Y)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4a^2 tg^2\psi\,sec^4\psi - 2a\,tg\,\psi\,sec^2\psi(\alpha\,sin\,\psi + \beta\,cos\,\psi)$$

und nun p auch als Funktion der Zeit bekannt ist, weil $\psi = \omega t$ ist.

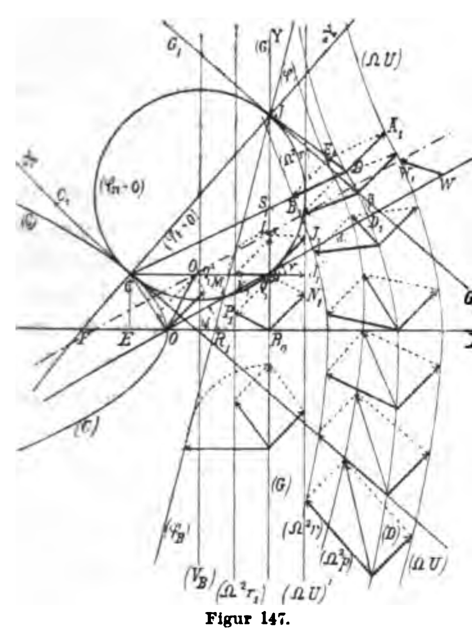
Von besonderem Interesse ist die Bewegung des Punktes B der Systemgeraden OB auf der Führungslinie (G). Die Componenten der Beschleunigung φ_B dieses Punktes sind $\Omega U = a\,\omega^2 sec^2\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\psi}$ und $\Omega^2 r = a\,\omega^2 sec^2\psi$. Bezeichnet ν den von der Ordinatenaxe CY und der Parabelaxe eingeschlossenen Winkel, dann sind die Componenten von ΩU in den Richtungen senkrecht und parallel zu (G) $\Omega U\,cos\,\nu$ und $\Omega U\,sin\,\nu$. Nun ist $tg\,\nu = 2\,tg\,\psi$, womit sich und dem Werte von ΩU ergiebt $\Omega U\,cos\,\nu = a\,\omega^2 sec^2\psi$, $\Omega U\,sin\,\nu = 2a\,\omega^2 tg\,\psi\,sec^2\psi$. Die Componente $\Omega U\,cos\,\nu$ ist gleich der Componente $\Omega^2 r$, aber von entgegengesetzter Richtung, so dass der Punkt B keine Normalbeschleunigung besitzt und die resultierende Beschleunigung

$$\varphi_B = \Omega U\,sin\,\nu = 2a\,\omega^2 tg\,\omega t\,sec^2\omega t$$

ist, welche als Strecke mit der Geraden (G) zusammenfällt. Dasselbe Resultat giebt die Relation $\varphi = \omega^2 p$. Wir erkennen hieraus, dass φ_B zur Zeit $t = 0$ den Wert Null besitzt, dass diese Acceleration mit der Zeit wächst und unendlich gross wird, wenn t den Wert ∞ annimmt.

Geometrische Darstellung der Beschleunigung φ und deren Componenten einzelner Systempunkte. Den Ort aller Systempunkte mit der Beschleunigung $\varphi_n = 0$ haben wir bereits konstruiert, (Fig. 147, S. 397) auch das Beschleunigungscentrum J für die augenblickliche Lage des Systemes bestimmt. Der durch J laufende, zu CX parallele Strahl G_1G_2 giebt den Ort aller Systempunkte mit einer zur Tangente CX der Curve (C) parallelen Beschleunigung. Der Strahl CJ enthält alle Systempunkte, welche eine zur Normalen CY der Curve (C) parallele Acceleration besitzen.

Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum sei gegeben durch die Strecke $ab = \omega$, bezogen auf die Masseinheit $a_1b_1 = \lambda$.



Figur 147.

Figur 147 a.

Die Geschwindigkeit des Momentancentrums C ist $U = \frac{U}{\Omega}\omega$. Mit dem rechtwinkeligen Axenkreuze $O'X'$, $O'Y'$ (Fig. 147a) $O'L = a_1 b_1 = \lambda$, $O'A' = a\,b = \omega$, dem Strahle LA', $LB' = CJ = \frac{U}{\Omega}$, $B'C' \perp O'X'$ wird $U = B'C'$. Machen wir daher auf der Parabeltangente in C die Strecke $CC_1 = B'C'$, so repräsentiert diese Strecke die Fortschrittsgeschwindigkeit des Momentancentrums. Um die für jeden Systempunkt gleiche Beschleunigung $\Omega\,U$ zu erhalten, welche parallel zur Ordinatenaxe CY ist, machen wir $LD' = B'C'$, $D'E' \perp O'X'$, dann ist $\Omega\,U = D'E'$. Die Beschleunigung $\Omega^2 r$ eines beliebigen Systempunktes D ergiebt sich wie folgt. Mit $A'F' \perp LA'$ wird $O'F' = \Omega^2$, mit $O'G' = O'F'$, dem Strahle LG', $LH' = CD, H'K' \perp O'X'$ erhalten wir $\Omega^2 r = H'J'$, $\Omega r = V = H'K'$. Zeichnen wir jetzt DA_1 CY und $= D'E'$, auf DC ferner $DB_1 = H'J'$, so erhalten wir in DA_1 und DB_1 die Componenten $\Omega\,U$ und $\Omega^2 r$ in ihrer wahren Lage und giebt ihre Resultante die Beschleunigung $\varphi = DE_1$ des Systempunktes D. Es ist aber auch $\varphi = \Omega^2 p$, wodurch mit $LM' = DJ$, $M'N' \perp O'X'$, $DE_1 = M'N'$ in DE_1 diese Beschleunigung ebenfalls erscheint. Die Componentalaccelerationen des Systempunktes B sind $\Omega\,U$ und $\Omega^2 . BC = \Omega^2 . r_1$. Mit $BJ_1 \underline{\parallel} DA_1$ wird $BJ_1 = \Omega\,U$, mit $LP' = BC$, $P'R' \perp O'X'$, $P'Q' = \Omega^2 r_1$, $P'R' = \Omega r_1$, der Grösse nach. Machen wir jetzt auf BC die Strecke $BK_1 = P'Q'$, dann ist $\Omega^2 r_1$ vollständig gegeben. Die Resultante aus BJ_1 und BK_1 ist die mit (G) zusammenfallende Strecke BL_1, daher $\varphi_B = BL_1$. Weil auch $\varphi_B = \Omega^2 . BJ$, so wird mit $LS' = BJ$, $S'T' \perp O'X'$, $BL_1 = S'T'$, $\varphi = BL_1$, wie vorher. Zerlegen wir die Beschleunigungscomponente $BJ_1 = \Omega\,U$ in senkrechter und paralleler Richtung zu (G), dann finden wir $\Omega\,U \cos\nu = BJ'_1 = -\Omega^2 r$, womit sich zeigt, dass die senkrecht zu (G) auf den Punkt B wirkenden Beschleunigungen

sich gegenseitig zerstören, und $\Omega\, U \sin v = B L_1 = \varphi_B$ ist. Jetzt können wir leicht die Beschleunigung φ und ihre Componenten für alle auf der Geraden (G) gelegenen Systempunkte konstruieren. Die Endpunkte der Beschleunigung $\Omega\, U$ aller Systempunkte auf (G) befinden sich auf der zu ihr parallelen Geraden $J_1\,(\Omega\, U)'$. Die Endpunkte der Acceleration $\Omega^2 r_1$ dieser Punkte liegen auf dem zu (G) parallelen Strahle $K_1(\Omega^2 r_1)$. Machen wir auf $B\,C$ die Strecke $B M_1 = B L_1$ und ziehen den Strahl $J M_1\,(\varphi_B)$, so befinden sich auf diesem die Endpunkte der um 90° gedrehten Beschleunigungen φ_B der Systempunkte auf (G). Hierdurch ergiebt sich beispielsweise für den mit B_0 coincidierenden Systempunkt $\Omega\, U$ durch die Parallele $B_0\, N_1$ zu $J\,C$, $\Omega^2 r_1 = B_0\, P_1$ auf dem Strahle $B_0\, C$, der Grösse und Lage nach, $\varphi_{B_0} = B_0 R_1$ durch die Senkrechte in B_0 auf (G), der Grösse nach, und mit $B_0 Q_1 = B_0 R_1$ in $B_0 Q_1$ die Resultante φ_B der Grösse und Lage nach. Die Strecke $B\,S_1 = P'\,R'$ giebt die Geschwindigkeit des Punktes B. Machen wir auf $B\,C$ die Strecke $B\,T_1 = B\,S_1$ und ziehen durch S_1 einen Parallelstrahl zu (G), dann liegen auf diesem die Endpunkte der um 90° gedrehten Geschwindigkeiten der mit (G) zusammenfallenden Systempunkte; die Richtungen der gedrehten Geschwindigkeiten fallen mit den vom Momentancentrum nach diesen Punkten gezogenen Strahlen zusammen. Die Figur 147 (S. 397) zeigt ferner die Beschleunigung $\varphi_O = O\,O_1$ und deren Componenten $\Omega\, U$, $\Omega^2 r$ des mit dem festen Punkte O coincidierenden Systempunktes, sowie die Beschleunigung φ einiger Punkte der Systemgeraden OB, der Endpunkt dieser Acceleration befindet sich offenbar stets auf dem Strahle $O_1 L_1$ und erhalten wir die Beschleunigung $W W_1$ eines beliebigen Punktes von $O\,B$ aus den Accelerationen $B\,L_1$, $O\,O_1$ in der unter (I) angegebenen Weise.

Der Systempunkt D beschreibt die Bahn (D). Für mehrere auf (D) gelegene Systempunkte, welche andere Bahnen wie D durchlaufen, wurden die Accelerationen ΩU, $\Omega^2 r$ und φ konstruiert, um einen Einblick in die Beschaffenheit von φ bezüglich verschiedener Systempunkte zu erlangen. Verbinden wir die Endpunkte der gleichnamigen Beschleunigungen je durch einen stetigen Linienzug $(\Omega\, U)$, $(\Omega^2 r)$, $(\Omega^2 p) = (\varphi)$, so lassen sich sofort die Grössen $\Omega\, U$, $\Omega^2 r$, φ für jeden auf (D) gelegenen Systempunkt in ihrer wahren Lage angeben, was keiner weiteren Erörterung bedarf.

b) Der Punkt B der Systemgeraden $O\,B$ bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c von B_0 aus in der Richtung $B_0\,B$ auf der festen Geraden (G). (Fig. 148, S. 402).

Wie vorhin ist

$$\frac{U}{\Omega} = a \sec^2 \psi \sqrt{1 + 4\, tg^2\, \psi},$$

daher erhalten wir, weil der Abstand des Systempunktes B vom Geschwindigkeitspole gleich $a\,sec^2\psi$ ist,

$$\Omega = \frac{c}{a} cos^2\psi, \qquad U = c\sqrt{1 + 4\,tg^2\psi}.$$

Die Winkelbeschleunigung des Systemes um das Momentancentrum ist

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{a} cos^2\psi\right) = -\frac{c}{a} sin\,2\psi \frac{d\psi}{dt}.$$

Aber es ist der Weg des Punktes B in der Zeit t $s = B_0 B = ct = a\,tg\,\psi$, woraus folgt $\psi = arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)$, $\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{a} cos^2\psi = \Omega$, mithin

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\left(\frac{c}{a}\right)^2 sin\,2\psi\,cos^2\psi.$$

Nun sind die Accelerationen, welche die resultierende Beschleunigungen φ eines beliebigen Systempunktes D in einem Abstande r vom Momentancentrum erzeugen,

$$\Omega U = \frac{c^2}{a} cos^2\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\psi},$$

$$\Omega^2 r = \left(\frac{c}{a} cos^2\psi\right)^2 . r = \frac{c^2}{a^2} cos^4\psi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + a^2 sec^4\psi + 2\,a\,sec\,\psi\,(\alpha - \beta\,tg\,\psi)}$$

$$r\frac{d\Omega}{dt} = -\left(\frac{c}{a}\right)^2 sin\,2\psi\,cos^2\psi\,.\,r =$$

$$-\frac{c^2}{a^2} sin\,2\psi\,cos^2\psi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + a^2 sec^4\psi + 2\,a\,sec\,\psi\,(\alpha - \beta\,tg\,\psi)},$$

so dass die letztere in einer der Geschwindigkeit V des Punktes D entgegengesetzten Richtung thätig ist. Weil der Winkel ψ als Funktion der Zeit bekannt ist, so sind wir in der Lage, die bisher berechneten Grössen ebenfalls als Funktionen der Zeit darzustellen, was giebt

$$\Omega = \frac{c}{a} cos^2\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}, \quad U = c\sqrt{1 + 4\,tg^2\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}},$$

$$\Omega U = \frac{c^2}{a} cos^4\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\sqrt{1 + 4\,tg^2\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}},$$

$$\Omega^2 r = \frac{c^2}{a^2} cos^4\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\sqrt{\left[\alpha^2 + \beta^2 + a^2 sec^4\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\right.}$$
$$\overline{\left. + 2\,a\,sec\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\left[\alpha - \beta\,tg\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\right]\right]},$$

$$r\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{c^2}{a^2} sin\left\{2\,arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\} cos^2\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\sqrt{\left[\alpha^2 + \beta^2\right.}$$
$$\overline{\left. + a^2 sec^4\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\} + 2\,a\,sec\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\left[\alpha + \beta\,tg\left\{arc\left(tg = \frac{ct}{a}\right)\right\}\right]\right]}.$$

Der Kürze halber soll jedoch die erstere Darstellungsweise beibehalten werden.

Die Systempunkte, deren Beschleunigung parallel zur Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden

$$y = -\frac{1}{2} cotg\, \psi . x.$$

Der Winkel μ, welchen diese Linie mit der Abscissenaxe CX einschliesst, ist demnach ein stumpfer Winkel. Mit $\mu' = \pi - \mu$ ist $tg\, \mu' = -tg\, \mu = \frac{1}{2\, tg\, \psi} = \frac{1}{tg\, \nu}$, wenn ν den von der Normalen der Curve (C) und ihrer Axe eingeschlossenen Winkel bedeutet, folglich ist $tg\, \mu' = tg\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right)$, womit sich ergiebt $\mu = \pi - \mu' = \frac{\pi}{2} + \nu$. Die Gerade ist daher eine zur Axe der Parabel (C) parallele Linie, d. h. sie fällt mit der Verbindungslinie der Punkte B und C zusammen.

Die Systempunkte, welche eine zur Tangente der Curve (C) parallele Beschleunigung besitzen, befinden sich auf der Geraden

$$sin\, 2\, \psi . x - cos^2 \psi . y + a \sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi} = 0,$$

ihre Coordinatenaxenstücke und ihr Abstand vom Geschwindigkeitspole C sind

$$\frac{\Omega U}{\frac{d \Omega}{d t}} = -a \frac{\sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi}}{2\, sin\, \psi\, cos\, \psi}, \quad \frac{U}{\Omega} = a\, sec^2 \psi \sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi}, \quad \delta = a\, sec^2 \psi,$$

sie schliesst mit der Abscissenaxe CX einen Winkel η ein, für welchen die Relation besteht $tg\, \eta = 2\, tg\, \psi = tg\, \nu$, d. h. sie fällt mit der Geraden (G) zusammen.

Die Coordinaten des Beschleunigungscentrums J sind

$$x_1 = -\frac{2\, a\, tg\, \psi}{cos^2 \psi \sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi}}, \quad y_1 = \frac{a}{cos^2 \psi \sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi}},$$

aus ihnen folgt $\delta = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} = a\, sec^2 \psi$. Daher fällt der Beschleunigungspol mit dem Punkte B zusammen. Der geometrische Ort aller Systempunkte mit gleicher Acceleration ζ ist ein mit dem Halbmesser $\frac{\zeta a^2}{c^2 cos^4 \psi \sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi}}$ um J als Mittelpunkt beschriebener Kreis.

Bezeichnet p den Abstand des Systempunktes D vom Beschleunigungspole J resp. B, dann ist $p^2 = \alpha^2 + \beta^2$, wenn — wie immer — α und β die Coordinaten dieses Punktes für die beweglichen Axen, mit dem Ursprunge in B, bedeuten. Daher sind die resultierende Acceleration φ und ihre Componenten φ_1, φ_2

$$\varphi = p \sqrt{\Omega^4 + \left(\frac{d \Omega}{d t}\right)^2} = \frac{c^2}{a^2} cos^3 \psi \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(1 + 4\, tg^2 \psi)},$$

$$\varphi_1 = \Omega^2 p = \frac{c^2}{a^2} \cos^4\psi \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \varphi_2 = p\frac{d\,\Omega}{d\,t} = -\frac{c^2}{a^2}\sin 2\psi \cos^2\psi \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

und für die Neigung η der Beschleunigung φ gegen den Polstrahl DB besteht die Relation $tg\,\eta = -2\,tg\,\psi = -tg\,\nu$, woraus folgt $\eta = \pi - \nu$. Weil der Winkel ψ während der Bewegung des Systemes variabel ist, so ist die Beschleunigung φ des Punktes D eine periodisch veränderliche Grösse. Der grösste Wert von φ tritt ein mit $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$, es ist $\varphi_{max} = \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ihr kleinster Wert erscheint mit $\psi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, es ist $\varphi_{min} = 0$.

Auf den Systempunkt B wirken die Accelerationen

$$\Omega\,U = \frac{c^2}{a}\cos^2\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi},\ \Omega^2 r = \frac{c^2}{a}\cos^2\psi,\ r\frac{d\Omega}{dt} = -2\frac{c^2}{a}\sin\psi\cos\psi,$$

Die Resultanten aus diesen drei Beschleunigungen in den Richtungen senkrecht und parallel zur Geraden (G) sind

$$\Omega\,U\sin\nu - r\frac{d\,\Omega}{d\,t} = 0, \qquad \Omega\,U\cos\nu - \Omega^2 r = 0,$$

folglich ist die resultierende Beschleunigung φ_B des Systempunktes B gleich Null, wie dem sein muss.

Der Abstand des Punktes O von C ist gleich $a\sec\psi\sqrt{\sec^2\psi - 1} = a\,cosec\,\psi$, daher sind die auf den Systempunkt O wirkenden Beschleunigungen

$$\Omega\,U = \frac{c^2}{a}\cos^2\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi}, \qquad \Omega^2 r = \frac{c^2}{a}\cos^3\psi\,cotg\,\psi,$$

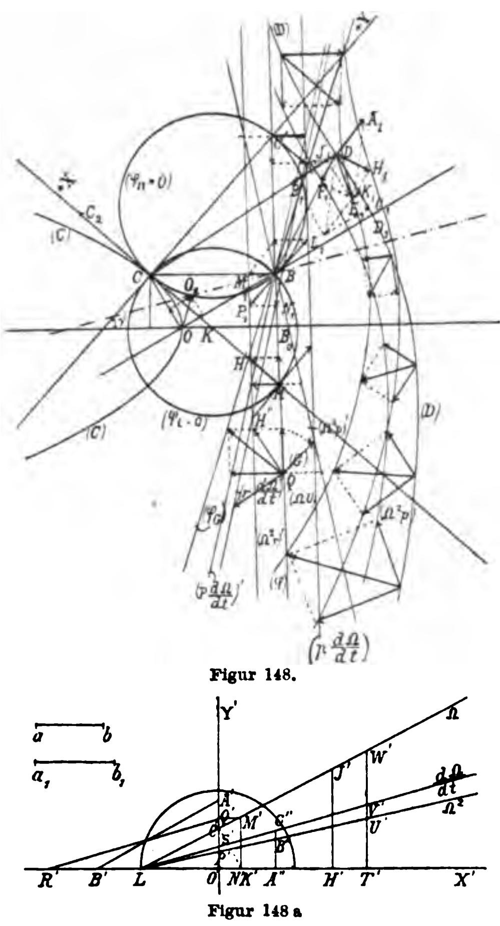
$$r\frac{d\,\Omega}{d\,t} = -2\frac{c^2}{a}\cos^3\psi;$$

weil ferner der Abstand dieses Punktes vom Beschleunigungspole B gleich $a\sec\psi$ ist, so folgt

$$\varphi_O = \frac{c^2}{a}\cos^3\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi},\ \varphi_{1O} = \frac{c^2}{a}\cos^3\psi,\ \varphi_{2O} = -\frac{c^2}{a}\sin 2\psi\cos\psi.$$

Der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\frac{U}{\Omega} = a\sec^2\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}a\sec^2\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi}$. Der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega\,U\frac{d\,t}{d\,\Omega} = a\ cosec\ 2\ \psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = -\frac{1}{2}a\,cosec 2\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi}$, $\quad y_0 = 0$.

Geometrische Darstellung der Beschleunigung φ und deren Componenten für einzelne Systempunkte. (Fig. 148, 148a.)



Figur 148.

Figur 148 a.

Wir haben gefunden, dass der Beschleunigungspol mit dem Systempunkte B stets zusammenfällt. Dieses folgt auch aus der gleichförmigen Bewegung des Punktes B. Der Beschleunigungspol liegt gleichzeitig auf den Kreisen $(\varphi_n = 0)$ und $(\varphi_t = 0)$. Die Normallinie CC' der Curve (C) schneidet die Führungsgerade (G) im Punkte C', es ist, was bereits dargethan wurde, $CC' = \frac{U}{\Omega} =$ einem Durchmesser des Kreises $(\varphi_n = 0)$, wodurch der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$, welcher auch den Punkt B enthält, sofort verzeichnet werden kann. Der Mittelpunkt des Kreises $(\varphi_t = 0)$ befindet sich auf der Tangente der Curve (C), welche die Gerade (G) im Punkte H, die Axe der Curve (C) im Punkte K schneidet. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBH und KB_0H folgt leicht, dass $CH = a \operatorname{cosec} 2\psi \times \sqrt{1 + 4\, tg^2 \psi} = \Omega\, U \frac{dt}{d\Omega}$ ist. Mithin ist die Strecke CH ein Durchmesser des Kreises $(\varphi_t = 0)$, und es kann jetzt sofort der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$, welcher ebenfalls den Punkt B enthält, verzeichnet werden. Beide Kreise schneiden sich im Punkte B, mit welchem demnach das Beschleunigungscentrum zusammenfällt. Gehen wir davon aus, dass der Beschleunigungspol mit dem Systempunkte B coincidieren muss, was aber weniger scharf ist, so ist sofort klar, dass die Strecke CH ein Durchmesser des Kreises $(\varphi_t = 0)$ ist, denn die durch B gehende zweite Sehne dieses Kreises muss auf der Sehne BC senkrecht stehen. Die Beschleunigung derjenigen Systempunkte, welche sich

auf dem Strahle BC befinden, ist parallel zur Normalen der Curve (C). Die Accelerationen derjenigen Systempunkte, welche auf dem Strahle BH, d. i. auf (G) liegen, sind parallel zur Tangente der Curve (C).

Als Geschwindigkeit des Punktes B wählen wir die Strecke $ab=c$, die Masseinheit $a_1 b_1 = \lambda$ zugrunde legend. Wir benutzen wieder für das graphische Rechnen ein rechtwinkeliges Axenkreuz $O'X'$, $O'Y'$ mit dem um O' als Mittelpunkt beschriebenen Einheitskreise vom Radius $O'L = O'L_1 = a_1 b_1$. (Figur 148a, S. 402.) Es ist $\Omega = \frac{c}{BC}$. Machen wir daher $O'A' = ab$, $O'B' = BC$, ziehen den Strahl $L'C' \parallel B'A'$, so ist $O'C' = \Omega$. Weiter haben wir $U = \frac{U}{\Omega} . \Omega$. Mit $LH' = CC' = \frac{U}{\Omega}$, $H'J' \perp O'X'$ wird $H'J' = U$, so dass, wenn wir auf der Tangente der Curve (C) die Strecke $CC_2 = H'J'$ abtragen, durch CC_2 die Geschwindigkeit des Momentancentrums vollständig gegeben ist. Um die auf den beliebig gewählten Systempunkt D, im Abstande $CD = r$ vom Geschwindigkeitspole C, wirkenden Beschleunigungen ΩU, $\Omega^2 r$, $r\frac{d\Omega}{dt}$ zu erhalten, verfahren wir folgendermassen. Mit $LK' = H'J'$, $K'M' \perp LX'$ ergiebt sich $\Omega U = K'M'$. Die durch C' zu LC' gezogene Senkrechte schneidet auf $O'X'$ die Strecke $O'N' = \Omega^2$ ab, deshalb machen wir $O'P' = O'N'$ und ziehen den Strahl LP', den Ω^2-Strahl. Es ist $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega U}{CH}$. Mit $LO' = K'M'$, $O'R' = CH$, dem Strahle $LS' \parallel$ zur Geraden $R'Q'$ ergiebt sich $O'S' = \frac{d\Omega}{dt}$. Zeichnen wir jetzt $LT' = CD = r$, legen durch T' eine Parallele zu $O'X'$, so folgt $T'U' = \Omega^2 r$, $T'V' = r\frac{d\Omega}{dt}$, $T'W' = \Omega r = V =$ der Geschwindigkeit von D. Nun können wir die auf den Punkt D wirkenden Beschleunigungen in ihrer wahren Lage darstellen. Wir machen (Fig. 148, S. 402) $DA_1 \parallel CY$ und $= K'M'$, $DB_1 = T'U'$ auf DC, $DC_1 \perp DC$ und $= T'V'$, beachtend, dass $r\frac{d\Omega}{dt}$ negativ ist, wodurch $DA_1 = \Omega U$, $DB_1 = \Omega^2 r$, $DC_1 = r\frac{d\Omega}{dt}$. Die Resultante aus diesen drei Accelerationen ist die resultierende Beschleunigung $\varphi = DE_1$ des Systempunktes D, welche mit dem Polstrahle DB den Winkel ν einschliesst. Es ist aber auch $\varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$. Mit $LA'' = BD = p$, $A''C'' \perp O'X'$ wird $A''B'' = \varphi_1 = \Omega^2 p$, $A''C'' = \varphi_2 = p\frac{d\Omega}{dt}$, der Grösse nach. Machen wir daher auf DB die Strecke $DF_1 = A''B'' = \varphi_1$, $DH_1 \perp DB$ und $= A''C'' = \varphi_2$, bilden

aus DF_1 und DH_1 die geometrische Summe DE_1, so ist wieder $\varphi = DE_1$. Wie die entsprechenden Grössen für irgend einen anderen Systempunkt zu bestimmen sind, ist ohne Weiteres klar. Für den Systempunkt B erhalten wir $BL_1 = \Omega U$, $BM_1 = \Omega^2 . BC$, $BN_1 = BC . \frac{d\Omega}{dt}$. Die Resultante aus diesen drei Accelerationen ist $\varphi_B = 0$, denn die geometrische Summe BP_1 aus BM_1 und BN_1 ist gleich und entgegengesetzt gerichtet BL_1. Die resultierende Beschleunigung HH' des Systempunktes H ist parallel zur Abscissenaxe CX, ebenso diejenige des Punktes C', nämlich $C'C''$, denn die Beschleunigung aller Systempunkte auf (G) ist parallel zur Tangente an die Curve (C). Für die Systempunkte auf (G) ergiebt sich noch folgendes. Die Endpunkte der resultierenden Beschleunigungen φ liegen auf dem Strahle BH' (φ_G). Auf den zu (G) parallelen Strahlen durch L_1 und M_1 liegen die Endpunkte der Accelerationen $\Omega\, U$ und $\Omega^2 r$. Auf dem Strahle $N_1 H''$ befinden sich die Endpunkte der Accelerationen $r \frac{d\Omega}{dt}$. Der Strahl $B\,(\Omega^2 p)'$ enthält die Endpunkte der φ_1, der Strahl $B \left(p \frac{d\Omega}{dt}\right)'$ diejenigen der $p \frac{d\Omega}{dt}$. Für den Systempunkt Q auf (G) sind sämtliche Beschleunigungen mit Hilfe dieser Strahlen verzeichnet worden. In gleicher Weise kann für die Systemgerade OB verfahren werden. Der Deutlichkeit halber sind nur die Accelerationen des Punktes O dargestellt. Die Grösse und Richtung der Beschleunigungen von auf der Bahn (D) liegenden Systempunkten giebt die Figur ebenfalls. Mit Hilfe der verzeichneten Curven, welche die Endpunkte gleichnamiger Beschleunigungen der Systempunkte auf (D) enthalten, sind wir in der Lage für jeden beliebigen Systempunkt auf (D) die fragliche Acceleration leicht anzugeben.

c) Der Bewegungszustand des Systemes ist so beschaffen, dass das Momentancentrum mit konstanter Geschwindigkeit c fortschreitet.

Weil
$$\frac{U}{\Omega} = a \sec^2 \psi \sqrt{1 + 4 \, tg^2 \psi},$$
so ist
$$U = c, \qquad \Omega = \frac{c \cos^2 \psi}{a \sqrt{1 + 4 \, tg^2 \psi}} = \frac{c \cos^3 \psi}{a \sqrt{1 + 3 \sin^2 \psi}}.$$
Mithin ist die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum, weil sie eine Funktion des Winkels ψ ist, eine periodisch veränderliche Grösse bei kontinuierlich veränderlichem Winkel ψ. Mit $\psi = 0$,

$\pi, 2\pi, \ldots$ ist $\Omega = \frac{c}{a}$, mit $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$ wird $\Omega = 0$, welche Werte das Maximum und Minimum von Ω sind.

Die Winkelbeschleunigung des Systemes um das Momentancentrum ist

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{c}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos^2\psi}{\sqrt{1+4\,tg^2\psi}}\right)$$
$$= -\frac{2c}{a\sqrt{1+4\,tg^2\psi}}\left\{\sin\psi\cos\psi + \frac{2\,tg\,\psi}{1+4\,tg^2\psi}\right\}\frac{d\psi}{dt}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ der Geraden OB um O kann auf zweierlei Weise als Funktion des Winkels ψ vermittelt werden. Das Bogenelement ds der Parabel (C), welche die Polargleichung $\varrho = a \sin\psi \sec^2\psi$ besitzt, ist $ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2} = a \sec^2\psi\sqrt{1+4\,tg^2\psi}\,d\psi$, mithin $\frac{ds}{dt} = a\sec^2\psi\frac{d\psi}{dt}\sqrt{1+4\,tg^2\psi} = U = c$, so dass $\frac{d\psi}{dt} = \frac{c\cos^2\psi}{a\sqrt{1+4\,tg^2\psi}} = \Omega$. Die Geschwindigkeit des Systempunktes B ist, wenn s_1 den Weg B_0B desselben in der Zeit von $t=0$ bis $t=t$ bezeichnet, $V_B = \Omega\,.\,BC = \frac{c}{\sqrt{1+4\,tg^2\psi}} = \frac{ds_1}{dt}$. Ferner ist $s_1 = a\,tg\,\psi$, also $\frac{ds_1}{dt} = a\sec^2\psi\frac{d\psi}{dt}$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt $\frac{d\psi}{dt} = \frac{c\cos^2\psi}{a\sqrt{1+4\,tg^2\psi}} = \Omega$, wie vorhin. Die Substitution dieses Wertes von $\frac{d\psi}{dt}$ in die Gleichung für $\frac{d\Omega}{dt}$ giebt

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2c^2}{a^2}\frac{\cos^2\psi}{1+4\,tg^2\psi}\left\{\sin\psi\cos\psi + \frac{2\,tg\,\psi}{1+4\,tg^2\psi}\right\}$$
$$= -\frac{3c^2\sin 2\psi\cos^4\psi(1+\sin^2\psi)}{a^2(1+3\sin^2\psi)}.$$

Nun sind die Componentalbeschleunigungen, welche die resultierende Acceleration φ eines beliebigen Systempunktes D im Abstande r vom Momentancentrum C hervorbringen,

$$\Omega U = \frac{c^2\cos^2\psi}{a\sqrt{1+4\,tg^2\psi}} = \frac{c^2\cos^3\psi}{a\sqrt{1+3\sin^2\psi}},$$
$$\Omega^2 r = \frac{c^2\cos^4\psi}{a^2(1+4\,tg^2\psi)}r = \frac{c^2\cos^6\psi}{a^2(1+3\sin^2\psi)} \times \sqrt{\alpha^2+\beta^2+a^2\sec^4\psi + 2a\sec\psi(\alpha - \beta\,tg\,\psi)},$$
$$r\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3c^2\sin 2\psi\cos^4\psi(1+\sin^2\psi)}{a^2(1+3\sin^2\psi)} \times \sqrt{\alpha^2+\beta^2+a^2\sec^4\psi + 2a\sec\psi(\alpha-\beta\,tg\,\psi)}.$$

Diese Accelerationen ändern sich mit wachsendem Winkel ψ in derselben Weise wie die Winkelgeschwindigkeit Ω.

Die Systempunkte mit einer zur Normalen der Curve (C) parallelen Beschleunigung φ liegen auf der Geraden

$$y = -\frac{1 + 4\,tg^2\psi}{2\,tg\,\psi\,(5 + 8\,tg^2\psi)}\,x.$$

Die Systempunkte mit einer zur Tangente der Curve (C) parallelen Beschleunigung φ befinden sich auf der Geraden

$$y = \frac{6\,tg\,\psi\,(1 + 2\,tg^2\psi)}{1 + 4\,tg^2\psi}\,x + a\,sec^2\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\psi},$$

dieselbe besitzt Coordinatenaxenstücke

$$\frac{U}{\Omega} = a\,sec^2\psi\sqrt{1 + 4\,tg^2\psi},$$

$$\frac{\Omega\,U}{\frac{d\,\Omega}{d\,t}} = -\frac{a\,sec^2\psi\,(1 + 4\,tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{6\,tg\,\psi\,(1 + 2\,tg^2\psi)} = -\frac{a\,(1 + 4\,tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{6\,tg\,\psi\,(1 + sin^2\psi)},$$

und ihr senkrechter Abstand vom Momentancentrum ist

$$\delta = \frac{a\,(1 + 4\,tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1 + 4\,tg^2\psi)^3\,cos^4\psi + 16\,tg^2\psi\,(2 + 3\,sin^2\psi)}}$$

$$= \frac{a\,(1 + 3\,sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{cos^2\psi\sqrt{1 + 25\,sin^2\psi + 75\,sin^4\psi + 27\,sin^6\psi}}.$$

Für die Coordinaten des Beschleunigungscentrums ergiebt sich

$$x_1 = -\frac{2\,a\,(1 + 4\,tg^2\psi)^{\frac{3}{2}}\,\{sin\,\psi\,cos\,\psi\,(1 + 4\,tg^2\psi) + 2\,tg\,\psi\}}{(1 + 4\,tg^2\psi)^3\,cos^4\psi + 16\,tg^2\psi\,(2 + 3\,sin^2\psi)},$$

$$y_1 = \frac{a\,cos^2\psi\,(1 + 4\,tg^2\psi)^{\frac{5}{2}}}{(1 + 4\,tg^2\psi)^3\,cos^4\psi + 16\,tg^2\psi\,(2 + 3\,sin^2\psi)};$$

oder

$$x_1 = -\frac{6\,a\,sin\,\psi\,(1 + 2\,sin^2\psi)\,(1 + 3\,sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{cos^2\psi\,\{1 + 25\,sin^2\psi + 75\,sin^4\psi + 27\,sin^6\psi\}},$$

$$y_1 = \frac{a\,(1 + 3\,sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}}{cos^2\psi\,\{1 + 25\,sin^2\psi + 75\,sin^4\psi + 27\,sin^6\psi\}}.$$

Der Ort aller Systempunkte mit der gleichen Beschleunigung ζ ist ein um den Beschleunigungspol als Mittelpunkt beschriebener Kreis vom Halbmesser

$$\frac{\zeta a^2 (1 + 4\,tg^2\,\psi)^2}{c\,cos^2\,\psi \sqrt{(1 + 4\,tg^2\,\psi)^3\,cos^4\,\psi + 16\,tg^2\,\psi\,(2 + 3\,sin^2\,\psi)}}$$
$$= \frac{\zeta a^2 (1 + 3\,sin^2\,\psi)^2}{c\,cos^5\,\psi \sqrt{(1 + 3\,sin^2\,\psi)^3 + 16\,sin^2\,\psi\,(1 + 3\,sin^2\,\psi)}}.$$

Für die resultierende Beschleunigung φ und ihre Componenten φ_1, φ_2 eines beliebigen Systempunktes D im Abstande p vom Beschleunigungspole ergiebt sich

$$\varphi = p\,\frac{c^2\,cos^2\,\psi}{a^2 (1 + 4\,tg^2\,\psi)^2} \sqrt{(1 + 4\,tg^2\,\psi)^3\,cos^4\,\psi + 16\,tg^2\,\psi\,(2 + 3\,sin^2\,\psi)}$$
$$= p\,\frac{c^2\,cos^5\,\psi}{a^2 (1 + 3\,sin^2\,\psi)^2} \sqrt{(1 + 3\,sin^2\,\psi)^3 + 16\,sin^2\,\psi\,(2 + 3\,sin^2\,\psi)},$$
$$\varphi_1 = p\,\frac{c^2}{a^2}\,\frac{cos^4\,\psi}{1 + 4\,tg^2\,\psi} = p\,\frac{c^2}{a^2}\,\frac{cos^6\,\psi}{1 + 3\,sin^2\,\psi},$$
$$\varphi_2 = -p\,\frac{2c^2}{a^2}\,\frac{cos^2\,\psi}{1 + 4\,tg^2\,\psi}\left(sin\psi\,cos\psi + \frac{2\,tg\,\psi}{1 + 4\,tg^2\,\psi}\right)$$
$$= -6p\,\frac{c^2}{a^2}\,\frac{sin\,\psi\,cos^5\,\psi\,(1 + sin^2\,\psi)}{(1 + 3\,sin^2\,\psi)^2}.$$

Der Winkel η, welchen die Acceleration φ mit dem Polstrahle DJ einschliesst, folgt aus der Relation

$$tg\,\eta = -6\,tg\,\psi\,\frac{1 + sin^2\,\psi}{1 + 3\,sin^2\,\psi}.$$

Der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\frac{U}{\Omega} = a\,sec^2\,\psi \sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}\,a\,sec^2\,\psi \sqrt{1 + 4\,tg^2\,\psi}$. Sämtliche Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$ befinden sich auf einem Kreise vom Durchmesser

$$\Omega\,U\,\frac{dt}{d\Omega} = \frac{a\,(1 + 4\,tg^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}}{6\,tg\,\psi\,(1 + sin^2\,\psi)} = a\,\frac{(1 + 3\,sin^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}}{6\,sin\,\psi\,cos^2\,\psi\,(1 + sin^2\,\psi)},$$

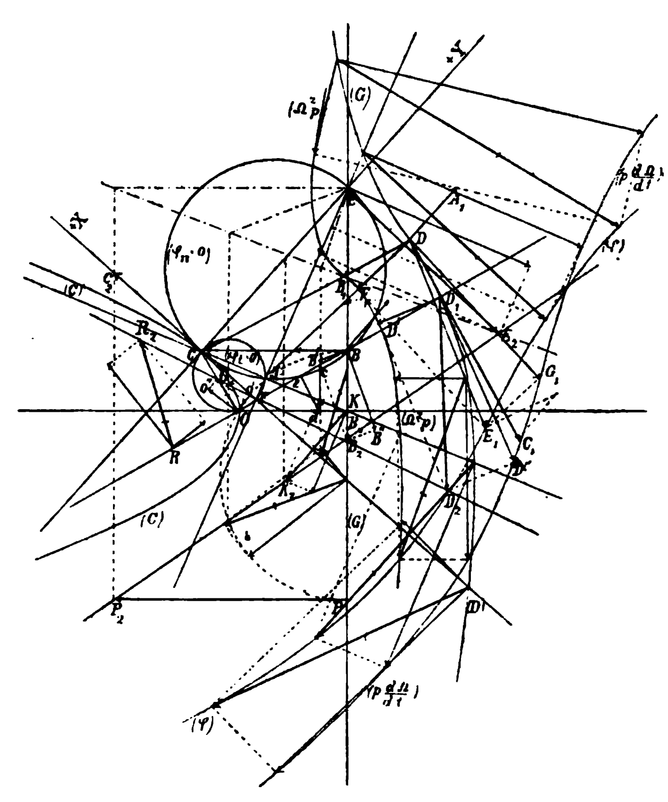
seine Mittelpunktscoordinaten sind

$$x_0 = -a\,\frac{(1 + 3\,sin^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}}{12\,sin\,\psi\,cos^2\,\psi\,(1 + sin^2\,\psi)}, \quad y_0 = 0.$$

Zufolge der vorstehenden Resultate ist es leicht, die Werte der Beschleunigung φ und ihrer Componenten für jeden anderen Systempunkt anzuschreiben, wenn seine Poldistanz gegeben ist.

Geometrische Darstellung der Beschleunigung φ und ihrer Componenten einzelner Punkte des Systemes (Fig. 149, S. 408, Fig. 149a und 149b, S. 409).

Die Geschwindigkeit des Momentancentrums C sei durch die Strecke



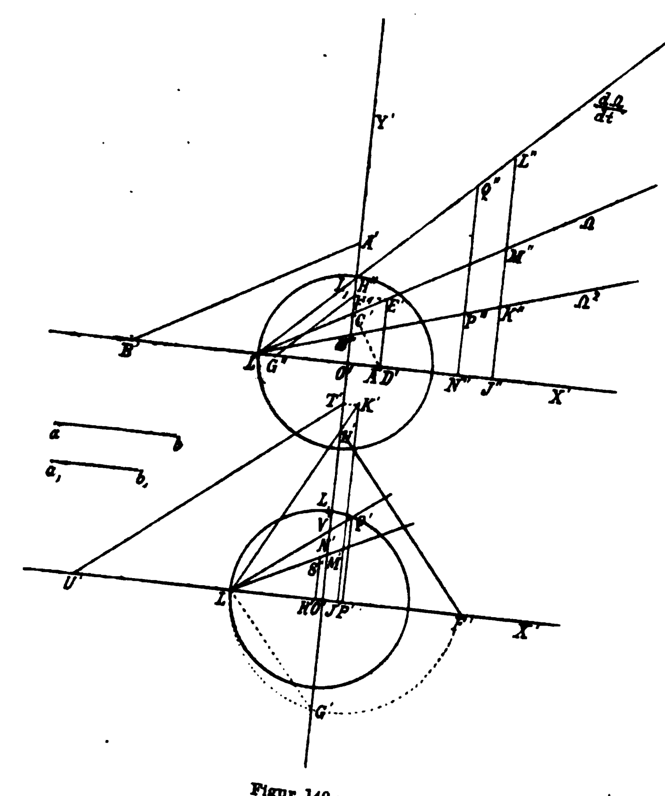
Figur 149.

$a\,b$ gegeben, die Strecke $a_1 b_1$ sei die Längeneinheit. Die arithmographischen Operationen führen wir wieder mit Hilfe eines rechtwinkeligen Axenkreuzes $O'X'$, $O'Y'$ aus, um dessen Kreuzungspunkt O' als Centrum mit dem Radius $O'L = a_1 b_1$ der Einheitskreis (λ) beschrieben ist. (Fig. 149a, S. 409).

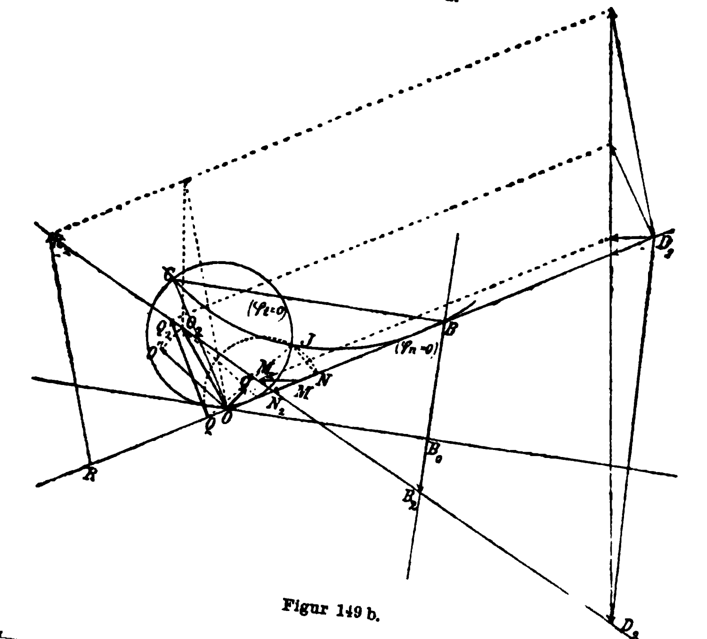
Zunächst ist $\Omega = \frac{\Omega}{U}\, U = \frac{U}{CE} = \frac{a\,b}{CE}$, wenn E den Schnittpunkt der Normallinie der Curve C und der Führungsgeraden (G) bezeichnet. Machen wir daher $O'A' = a\,b$, $O'B' = CE$, ziehen den Strahl $L\,C'$ parallel zur Geraden $B'A'$, so ergiebt sich $O'C' = \Omega$. Mit $L'D' = a\,b$, $D'E' \perp O'X'$ folgt $D'E' = \Omega\, U$. Für die weiteren Operationen ist es am bequemsten, jetzt den Wert der Grösse $\Omega\, U \frac{d\,t}{d\,\Omega}$

$$= \frac{a\,(1 + 3\,sin^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}}{6\,sin\,\psi\,cos^2\,\psi\,(1 + sin^2\,\psi)}$$

zu berechnen. Mit $O\,c = a_1 b_1$ (Fig. 149, S. 408) $o\,d \perp O\,B_0$, $d\,e \perp OB$ wird $c\,d = sin\,\psi$, $O\,e = cos\,\psi$, $c\,e = sin^2\,\psi$, $O\,e = cos^2\,\psi$. Nun machen wir (Fig. 149a, S. 409) $O'F' = a_1 b_1 + 3\,.\,c\,e = 1 + 3\,sin^2\,\psi$, schlagen



Figur 149 a.



Figur 149 b.

über LF' als Diameter einen Halbkreis, womit $OG' = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \psi}$ folgt, ziehen $F'H' \parallel LG'$, wodurch $O'H' = (1 + 3 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}$ wird, ziehen den Strahl LH', zeichnen $LJ' = B_0 O = a$, $J'K' \perp O'X'$, dann ist $J'K' = a(1 + 3 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}$. Ferner machen wir $O'M' = cd = \sin \psi$, $O'N' = Oe = \cos^2 \psi$, ziehen die Strahlen LM', LN', zeichnen $LP' = a_1 b_1 + ce = 1 + \sin^2 \psi$, $P'Q' \perp O'X'$, $LR' = P'Q'$, $R'S' \perp O'X'$, dann ist $R'S' = \sin \psi \cos^2 \psi \times (1 + \sin^2 \psi)$. Mit $O'T' = J'K' = a(1 + 3 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}$, $O'U' = 6 . R'S' = 6 \sin \psi \cos^2 \psi (1 + \sin^2 \psi)$, dem Strahle LV' parallel zur Geraden $U'T'$ ergiebt sich schliesslich $O'V' = \Omega U \frac{dt}{d\Omega}$. Jetzt sind bereits die Durchmesser der Kreise $(\varphi_n = 0)$ und $(\varphi_t = 0)$ bekannt. Verzeichnen wir über $CE = \frac{U}{\Omega}$ (Fig. 149, S. 408) als Durchmesser einen Kreis, so ist derselbe der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$. Machen wir auf der Abscissenaxe CX die Strecke $CF = O'V' = \Omega U \frac{dt}{d\Omega}$, beachtend den negativen Wert der Abscisse des Mittelpunktes des Kreises $(\varphi_t = 0)$, konstruieren über CF als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$. Diese Kreise schneiden sich, ausser in C, in dem Punkte J, welcher der Beschleunigungspol des Systemes ist. Auf dem Strahle CJ befinden sich alle Systempunkte mit einer zur Ordinatenaxe CY parallelen Beschleunigung. Der Strahl FJE enthält alle Systempunkte mit einer zur Abscissenaxe CX parallelen Beschleunigung. Um nun die Accelerationen $\Omega^2 r$ und $r \frac{d\Omega}{dt}$, welche auf einen beliebigen Systempunkt D, im Abstande r vom Geschwindigkeitspole C, wirken, zu erhalten, berechnen wir zunächst die Faktoren Ω^2 und $\frac{d\Omega}{dt}$. Mit $C'A'' \perp LC'$ (Fig. 149a, S. 409) wird $O'A'' = \Omega^2$, wir machen $O'B'' = O'A''$, wodurch der Ω^2-Strahl LB'' eine bequeme Lage bekommt. Ferner ist $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega U}{CF} = \frac{D'E'}{O'V'}$. Mit $O'F'' = D'E'$, $O'G'' = O'V'$, $LH'' \parallel G''F''$ wird der Strahl LH'' zum Multiplikationsstrahle $\frac{d\Omega}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt} = O'H''$, wodurch auch die Winkelbeschleunigung des Systemes um das Momentancentrum gefunden ist. Machen wir jetzt $LJ'' = CD = r$, $J''L'' \perp O'X'$, so ergiebt sich $J''K'' = \Omega^2 r$, $J''L'' = r \frac{d\Omega}{dt}$, $J''M'' = \Omega r =$ der Geschwindigkeit V des Systempunktes

D. Nachdem wir die Grösse der auf den Punkt D wirkenden Accelerationen bestimmt haben, sind wir nun imstande, dieselben auch in der richtigen Lage zu verzeichnen und die resultierende Beschleunigung φ dieses Systempunktes aus ihnen abzuleiten, wobei wir zu beachten haben, dass ΩU positiv, $r\frac{d\Omega}{dt}$ negativ ist. Mit $DA_1 \parallel CY$ und $= D'E'$, $DB_1 = J''K''$ auf DC, $DC_1 \perp DC$ und $= J''L''$ ergeben sich $\Omega U = DA_1$, $\Omega^2 r = DB_1$, $r\frac{d\Omega}{dt} = DC_1$ in wahrer Lage. Die geometrische Summe DE_1 aus den Strecken DA_1, DB_1, DC_1 ist die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D. Weil auch $\varphi = \sqrt{\varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2}$, so ergiebt sich noch mit $LN'' = DJ = p$, $N''Q'' \perp O'X'$, $D_1F_1 = N''P''$ auf DJ, $D_1G_1 \perp DJ$ und $= N''Q''$, $D_1F_1 = \Omega^2 p$, $DG_1 = p\frac{d\Omega}{dt}$, und die Resultante aus den beiden letzten Strecken ist $\varphi = DE_1$, wie vorhin. Der Systempunkt B bewegt sich auf der Führungsgeraden (G), durch ihn läuft stets der Kreis $(\varphi_n = 0)$, er besitzt keine Normalbeschleunigung; für denselben ergiebt sich $\underset{B}{\varphi_1} = BB'$, $\underset{B}{\varphi_2} = BB''$, und damit $\varphi_B = BB_2$, welche Acceleration mit der Führungsgeraden (G) zusammenfällt. Der Strahl FJ schneidet die Gerade (G) im Punkte E, dessen Beschleunigung EE_2 ist parallel zur Abscissenaxe CX. Der Strahl CJ schneidet (G) in K, die Beschleunigung KK_2 dieses Punktes ist parallel zur Ordinatenaxe CY. Auf (G) befindet sich zur Zeit kein Systempunkt mit der Beschleunigung $\varphi_t = 0$. Ziehen wir den Strahl B_2E_2, so liegen auf ihm die Endpunkte der Beschleunigungen φ aller Punkte der Systemgeraden (G). In bekannter Weise ergiebt sich, dass die Beschleunigung PP_2 des Punktes P dieser Linie senkrecht auf ihr steht, und der über BP als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch das Beschleunigungscentrum J. Von besonderem Interesse ist die Systemgerade OB. Für den Punkt D_1 dieser Linie (Fig. 149, 149b, S. 409) ergiebt sich $\varphi_1 = \Omega^2 . D_1J = D_1D'$, $\varphi_2 = D_1J . \frac{d\Omega}{dt} = D_1D''$, $\varphi_{D_1} = D_1D_2$. Für den Systempunkt O ist $\varphi_1 = OO'$, $\varphi_2 = OO''$, $\varphi_O = OO_2$. Es liegen mithin die Endpunkte der Beschleunigungen φ der einzelnen Punkte der Systemgeraden OB auf dem Strahle $O_2B_2D_2$. In bekannter Weise finden wir, dass die Beschleunigung NN_2 des Punktes N mit OB zusammenfällt, die Beschleunigung QQ_2 des Punktes Q senkrecht auf OB steht, ein über NQ als Diameter beschriebener Kreis den Beschleunigungspol J enthält. Der Punkt M von OB besitzt die kleinste Beschleunigung MM_2.

Ganz in derselben Weise wie unter b) lassen sich auch hier die

Accelerationen ΩU, $\Omega^2 r$, $r\frac{d\Omega}{dt}$, $\Omega^2 p$, $p\frac{d\Omega}{dt}$, φ derjenigen Systempunkte bestimmen, welche augenblicklich mit der Bahn (D) des Systempunktes D zusammenfallen, was keiner Schwierigkeit unterliegt. Der Studierende mag dieses zur eigenen Übung durchführen. Die sich ergebenden Curven (ΩU), $(\Omega^2 r)$.... wurden nur deshalb weggelassen, um bei der Kleinheit der Figur das Erläuterte möglichst übersichtlich zu geben.

Jede der bisher gegebenen graphischen Darstellungen kann jetzt mit Leichtigkeit von dem Studierenden vervollständigt werden. Da durch eine weitere Eintragung von Linien die Deutlichkeit der Figuren beeinträchtigt worden wäre, ist jede Darstellung nur Bruchstückweise durchgeführt worden.

4. Ein ebenes, unveränderliches System bewegt sich in seiner Ebene in der Weise, dass ein Punkt A desselben einen festen Kreis vom Halbmesser r beschreibt, ein zweiter Systempunkt B auf einer durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehenden festen Geraden fortrückt. Der wechselseitige Abstand a der Systempunkte A und B ist grösser als r. Der Punkt A besitzt eine konstante Geschwindigkeit und es sei seine Winkelgeschwindigkeit um den Mittelpunkt O seiner Bahn gleich ω. (Fig. 150, S. 427.) Die Bewegung des Systemes soll bezüglich der Beschleunigung unter Beibehalt der für diesen Fall bereits gebrauchten Bezeichnungen und mit Verwendung der bereits bekannten Resultate (I. Teil, S. 10, III. Teil, S. 321) untersucht werden.

Die Gleichungen der Curven (C) und (Γ) sind

$$\varrho^2 - 2\varrho r = (a^2 - r^2)\sec^2\vartheta,$$

$$(\varrho'^2 - 2\varrho' a\cos\vartheta')(r^2 - a^2\cos^2\vartheta') = a^2(a^2 - r^2)\cos^2\vartheta'.$$

Nach der bekannten Formel $\frac{U}{\Omega} = \frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1 \pm \Gamma}$ das Verhältnis $\frac{U}{\Omega}$ zu ermitteln, ist hier nicht bequem, weil ein anderer Weg rascher zum Ziele führt.

Die Richtungen der Normalen und der Tangente der Curve (C) für einen beliebigen Punkt C sind bekannt, wenn die Subnormale gegeben ist, womit dann die Coordinatenaxen CX und CY konstruiert werden können. Für die Polarsubnormale erhalten wir

$$S_n = \frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{a^2 - r^2}{\varrho - r}\,tg\,\vartheta\sec^2\vartheta = \frac{\varrho^2 - 2\varrho r}{\varrho - r}\,tg\,\vartheta = \frac{a^2 - r^2}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}}\,tg\,\vartheta\sec\vartheta.$$

Für das Bogenelement ds der Curve (C) ergiebt sich mit N als Polarnormalen

$$ds^2 = (\varrho^2 + S_n^2)\,d\vartheta^2 = N^2 . d\vartheta^2 = \frac{1}{(\varrho - r)^2}\left\{\varrho^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta\sec^4\vartheta\right\}d\vartheta^2$$

$$= \left\{ r^2 + 2\, r \sec\vartheta\, (a^2 - r^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}} + \sec^2\vartheta\, (a^2 - r^2 \sin^2\vartheta) \right.$$
$$\left. + (a^2 - r^2)^2\, tg^2\vartheta \sec^2\vartheta\, (a^2 - r^2) \sin^2\vartheta)^{-1} \right\} d\vartheta^2.$$

Nun haben wir für die Geschwindigkeit des Momentancentrums $U = \frac{ds}{dt}$, mithin ist, weil $\vartheta = \omega t$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$,

$$U = N \frac{d\vartheta}{dt} = \omega . N = \omega \left\{ (r + \sec\vartheta \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\vartheta})^2 \right.$$
$$\left. + (a^2 - r^2)^2\, tg^2\vartheta \sec^2\vartheta\, (a^2 - r^2 \sin^2\vartheta)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \omega \left\{ (r + \sec\omega t \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\omega t})^2 \right.$$
$$\left. + (a^2 - r^2)^2\, tg^2\omega t \sec^2\omega t\, (a^2 - r^2 \sin^2\omega t)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Fassen wir die Bewegung eines beliebigen Systempunktes D (Fig. 150, S. 427), etwa eines solchen, dessen Abscisse $\alpha > \frac{a}{2}$ ist, ins Auge, verfolgen die gleichzeitige Bewegung der Linie CD und des Momentancentrums C, dann erkennen wir, dass die Winkelgeschwindigkeit Ω der Geraden CD um C eine andere Richtung besitzt als die Geschwindigkeit des Momentancentrums, dass mithin, wenn U als positiv vorausgesetzt wird, Ω eine negative Grösse ist. Für die Winkelgeschwindigkeit Ω erhalten wir daher

$$\Omega = - \frac{r\omega}{\varrho - r} = - \frac{r\omega \cos\vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\vartheta}} = - \frac{r\omega \cos\omega t}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\omega t}}.$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten U und Ω wird dadurch

$$\frac{U}{\Omega} = - \frac{\varrho - r}{r} N = - \frac{1}{r} \sqrt{\varrho^2 (\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2\, tg^2\vartheta \sec^2\vartheta},$$
$$= - \frac{1}{r \cos\vartheta} \left\{ (r + \sec\vartheta \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\vartheta})^2 (a^2 - r^2 \sin^2\vartheta) \right.$$
$$\left. + (a^2 - r^2)\, tg^2\vartheta \sec^2\vartheta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $U : \Omega$ eine Funktion des Winkels ϑ resp. der Zeit ist, dass sich der Wert dieses Verhältnisses periodisch ändert, wenn ϑ von Null bis ins Unendliche wächst, was auch mit den Werten von U und Ω der Fall ist.

Die Winkelbeschleunigung des Systemes um das Momentancentrum ist

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(- \frac{r\omega}{\varrho - r} \right) = r\omega (\varrho - r)^{-2} \frac{d\varrho}{dt},$$

oder, weil $\frac{d\varrho}{dt} = \frac{a^2 - r^2}{\varrho - r}\, tg\vartheta \sec^2\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{a^2 - r^2}{\varrho - r}\, \omega\, tg\vartheta \sec^2\vartheta$,

$$\frac{d\Omega}{dt} = r\omega^2 \frac{a^2 - r^2}{(\varrho - r)^3}\, tg\vartheta \sec^2\vartheta = \frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2} S_n = r\omega^2 \frac{(a^2 - r^2) \sin\vartheta}{(a^2 - r^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Accelerationen, welche die resultierende Beschleunigung φ eines beliebigen Systempunktes D mit den beweglichen Coordinaten α, β und in einem Abstande $\mathfrak{r}$ vom Momentancentrum C erzeugen, sind ΩU, $\Omega^2 \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}$.

Wir erhalten

$$\Omega U = -\frac{r\omega^2}{\varrho - r} N = \frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2}\sqrt{\varrho^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta\, sec^4\vartheta}$$

$$= \frac{r\omega^2 cos\vartheta}{a^2 - r^2 sin^2\vartheta}\Big\{(r + sec\vartheta\sqrt{a^2 - r^2 sin^2\vartheta})^2(a^2 - r^2 sin^2\vartheta)$$

$$+ (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta\, sec^2\vartheta\Big\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\Omega^2\mathfrak{r} = \left(\frac{r\omega}{\varrho - r}\right)^2\mathfrak{r} = \frac{r^2\omega^2 cos^2\vartheta}{a^2 - r^2 sin^2\vartheta}\mathfrak{r}.$$

Im ersten Teile wurde gefunden, dass

$$\mathfrak{r}^2 = \Big\{\alpha \pm \Big[\frac{a}{2} - \frac{r}{a}sin^2\vartheta(r + sec\vartheta\sqrt{a^2 - r^2 sin^2\vartheta})\Big]\Big\}^2$$

$$+ \Big\{\beta \pm \Big[\frac{1}{a}sin\vartheta\sqrt{a^2 - r^2 sin^2\vartheta}(r + sec\vartheta\sqrt{a^2 - r^2 sin^2\vartheta})\Big]\Big\}^2,$$

d. i. $$\mathfrak{r}^2 = \Big\{\alpha \pm \Big[\frac{a}{2} - \frac{\varrho r}{a}sin^2\vartheta\Big]\Big\}^2 + \Big\{\beta \pm \frac{\varrho(\varrho - r)}{2a}sin 2\vartheta\Big\}^2.$$

Mithin ist

$$\Omega^2\mathfrak{r} = \left(\frac{r\omega}{\varrho - r}\right)^2\Big[\Big\{\alpha \pm \Big[\frac{a}{2} - \frac{\varrho r}{a}sin^2\vartheta\Big]\Big\}^2 + \Big\{\beta \pm \frac{\varrho(\varrho - r)}{2a}sin 2\vartheta\Big\}^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

und für die dritte Acceleration ergiebt sich

$$\mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2}S_n\mathfrak{r} = \frac{r\omega^2(a^2 - r^2)sin\vartheta}{(a^2 - r^2 sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{r}$$

$$= \frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2}S_n\Big[\Big\{\alpha \pm \Big[\frac{a}{2} - \frac{\varrho r}{a}sin^2\vartheta\Big]\Big\}^2 + \Big\{\beta \pm \frac{\varrho(\varrho - r)}{2a}sin 2\vartheta\Big\}^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Damit sind die Componentalbeschleunigungen des Systempunktes D als Funktionen des Winkels $\vartheta = \omega t$, mithin auch als Funktionen der Zeit bekannt, denn diese Formeln für $\Omega^2\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}$ kann der Leser sofort anschreiben.

Die Systempunkte mit einer zur Normalen der Curve (C) parallelen Beschleunigung φ liegen auf der Geraden

$$y = \frac{S_n}{r}x, \quad \text{oder} \quad y = \frac{a^2 - r^2}{\varrho - r}tg\vartheta\, sec^2\vartheta\,.\,x,$$

oder

$$y = \frac{a^2 - r^2}{\sqrt{a^2 - r^2 sin^2\vartheta}}tg\vartheta\, sec\vartheta.$$

Die Systempunkte mit einer zur Tangente der Curve (C) parallelen Beschleunigung φ liegen auf der Geraden

$$y = -\frac{S_n}{r}x - \frac{\varrho - r}{r}N,$$

$$y = -\frac{a^2 - r^2}{r(\varrho - r)} tg\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\,.\,x - \frac{\varrho - r}{r}\left\{\varrho^2 + \left(\frac{a^2 - r^2}{\varrho - r}\right)^2 tg^2\,\vartheta\, sec^4\,\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$y = -\frac{(a^2 - r^2)\,tg\,\vartheta}{r\cos\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}}\cdot x$$

$$-\frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\left\{r + sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}\right\}^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\right]^{\frac{1}{2}},$$

ihre Coordinatenaxenstücke sind

$$\frac{U}{\Omega} = -\frac{\varrho - r}{r}N =$$

$$-\frac{1}{r\cos\vartheta}\left[(r + sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta})^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)\,tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}} = -\frac{\varrho - r}{S_n}N = -\frac{\varrho - r}{(a^2 - r^2)^2 tg\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta}\left[\varrho^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\,\vartheta\, sec^4\,\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}}{(a^2 - r^2)\,tg\,\vartheta}\left[(r + sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta})^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta)\right.$$

$$\left. + (a^2 - r^2)^2\,tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\right]^{\frac{1}{2}},$$

und für ihren Abstand vom Geschwindigkeitspole C ergiebt sich

$$\delta = \frac{\varrho - r}{\sqrt{r^2 + S_n^2}}N = (\varrho - r)\sqrt{\frac{\varrho^2 + S_n^2}{r^2 + S_n^2}}$$

$$= (\varrho - r)\left[\frac{\varrho^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\,\vartheta\, sec^4\,\vartheta}{r^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\,\vartheta\, sec^4\,\vartheta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}\times$$

$$\left[\frac{(r + sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta})^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2\,tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta}{r^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2\,tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Für die Coordinaten des Beschleunigungscentrums erhalten wir die Relationen

$$x_1 = -\frac{(\varrho - r)\,S_n}{r^2 + S_n^2}N = -\frac{(\varrho - r)\,S_n\sqrt{\varrho^2 + S_n^2}}{r^2 + S_n^2}$$

$$= -\left[(\varrho - r)(a^2 - r^2)\,tg\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\sqrt{\varrho^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\,\vartheta\, sec^4\,\vartheta}\right]:$$

$$\left[r^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2\,tg^2\,\vartheta\, sec^4\,\vartheta\right]$$

$$= -\left[(a^2 - r^2)\,tg\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}\left\{(r + sec\,\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta})^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2\,tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}\right]:$$

$$\left[r^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2\,tg^2\,\vartheta\, sec^2\,\vartheta\right];$$

$$y_1 = -\frac{r(\varrho - r)}{r^2 + S_n^2} N = -\frac{r(\varrho - r)\sqrt{\varrho^2 + S_n^2}}{r^2 + S_n^2}$$
$$= -\left[r(\varrho - r)^2 \sqrt{\varrho^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2 \vartheta \sec^4 \vartheta}\right] :$$
$$\left[r^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2 \vartheta \sec^4 \vartheta\right]$$
$$= -\left[r \sec\vartheta (a^2 - r^2 \sin^2\vartheta)\left\{(r + \sec\vartheta\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta})^2 (a^2 - r^2 \sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2 tg^2 \vartheta \sec^2 \vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}\right] :$$
$$\left[r^2(a^2 - r^2 \sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2 tg^2 \vartheta \sec^2 \vartheta\right].$$

Diejenigen Systempunkte mit gleicher Beschleunigung μ liegen auf einem um den Beschleunigungspol als Mittelpunkt beschriebenen Kreise von dem Halbmesser

$$\frac{\mu(\varrho - r)^2}{r\omega^2\sqrt{r^2 + S_n^2}} = \frac{\mu(\varrho - r)^3}{r\omega^2\sqrt{r^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta \sec^4\vartheta}}$$
$$= \frac{\mu \sec^2\vartheta (a^2 - r^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{r\omega^2\sqrt{r^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta \sec^2\vartheta}}.$$

Bezeichnet, wie immer, p die Entfernung eines beliebigen Systempunktes D von dem Beschleunigungspole J, dann ergiebt sich für die resultierende Beschleunigung φ dieses Punktes und ihre Componenten φ_1, φ_2

$$\varphi = p\frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2}\sqrt{r^2 + S_n^2} = p\frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^3}\sqrt{r^2(\varrho - r)^2 + (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta \sec^4\vartheta}$$
$$= p\frac{r\omega^2\cos^2\vartheta}{(a^2 - r^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left\{r^2(a^2 - r^2\sin^2\vartheta) + (a^2 - r^2)^2 tg^2\vartheta \sec^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\varphi_1 = \left(\frac{r\omega}{\varrho - r}\right)^2 p = \frac{r^2\omega^2}{\sec^2\vartheta(a^2 - r^2\sin^2\vartheta)} p,$$
$$\varphi_2 = \frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2} S_n p = \frac{r\omega^2(a^2 - r^2)\sin\vartheta}{(a^2 - r^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} p.$$

Bezeichnet γ den von der Richtung der resultierenden Beschleunigung φ und dem Polstrahle DJ eingeschlossenen Winkel, dann ist

$$tg\gamma = \frac{1}{\Omega^2}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{S_n}{r} = \frac{a^2 - r^2}{r(\varrho - r)} tg\vartheta \sec^2\vartheta = \frac{(a^2 - r^2) tg\vartheta \sec\vartheta}{r\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}}.$$

Der Ort sämtlicher Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\frac{U}{\Omega} = \frac{\varrho - r}{r} N$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{\varrho - r}{2r} N$.

Der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$

ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega\, U \frac{dt}{d\,\Omega} = (\varrho - r)\frac{N}{S_n}$, seine Mittelpunktscoordinaten sind $x_0 = -\frac{1}{2}(\varrho - r)\frac{N}{S_n}$, $\quad y_0 = 0$.

Von besonderem Interesse sind die einzelnen Punkte der Systemgeraden AB, namentlich ist die Bewegung des eine gerade Linie beschreibenden Punktes B von praktischer Wichtigkeit.

Die auf den Systempunkt B wirkende resultierende Beschleunigung φ_B lässt sich mittelst der erlangten Resultate wie folgt bestimmen. Die Componenten dieser Beschleunigung sind $\Omega\, U = -\frac{r\,\omega^2}{\varrho - r} N$, parallel zur Normalen der Curve (C) gerichtet, $\Omega^2 \mathfrak{r} = \Omega^2 \varrho' = \Omega^2 \varrho \sin\vartheta = \left(\frac{r\omega}{\varrho - r}\right)^2 \varrho \sin\vartheta$, in der Richtung der Verbindungslinie des Systempunktes B mit dem Momentancentrum C, $\mathfrak{r}\frac{d\,\Omega}{dt} = \varrho'\frac{d\,\Omega}{dt} = \frac{r\,\omega^2}{(\varrho - r)^2} S_n \varrho \sin\vartheta$, senkrecht zur Linie BC gerichtet.

Zerlegen wir diese Componenten in zu der Führungsgeraden BO senkrechter und paralleler Richtung, bezeichnen mit ν den Winkel, welchen die Normale der Curve (C) mit dem zugehörigen Fahrstrahle ϱ einschliesst, mit ζ den Winkel, welchen sie mit der Polaraxe macht, dann ist die Beschleunigung des Punktes B in zu der Führungsgeraden BO senkrechten Richtung $\Omega^2 \mathfrak{r} + \Omega\, U \sin\zeta$, seine Acceleration in zu dieser Linie paralleler Richtung $\mathfrak{r}\frac{d\,\Omega}{dt} + \Omega\, U \cos\zeta$.

Nun ist $\zeta = \vartheta - \nu$, $\sin\nu = \frac{S_n}{N}$, $\cos\nu = \frac{\varrho}{N}$, so dass $\sin\zeta = \sin(\vartheta - \nu)$ $= \frac{\varrho \sin\vartheta - S_n \cos\vartheta}{N}$, $\cos\zeta = \cos(\vartheta - \nu) = \frac{\varrho\cos\vartheta + S_n \sin\vartheta}{N}$. Damit ergiebt sich durch eine kleine Rechnung $\Omega^2 \mathfrak{r} + \Omega\, U \sin\zeta = 0$,

$$\mathfrak{r}\frac{d\,\Omega}{dt} + \Omega\, U\cos\zeta = -\frac{r\,\omega^2}{\varrho - r}\left\{\varrho\cos\vartheta - \frac{r\, S_n \sin\vartheta}{\varrho - r}\right\}$$

$$= -r\omega^2\left\{\cos\vartheta - \frac{r\sin^2\vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}} + \frac{a^2 r\cos^2\vartheta}{\sqrt{(a^2 - r^2\sin^2\vartheta)^3}}\right\}.$$

Demnach besitzt der Punkt B in senkrechter Richtung zur Führungsgeraden keine Beschleunigung, d. h. es geht durch ihn stets der Kreis $(\varphi_n = 0)$. Die Resultante aus den beiden vorstehenden Accelerationen ist die letztere und erhalten wir mit $\frac{r}{a} = \lambda$

$$\varphi_B = -r\,\omega^2\left\{\cos\vartheta - \lambda\frac{\sin^2\vartheta}{(1 - \lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \lambda\frac{\cos^2\vartheta}{(1 - \lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Von dem Umstande ausgehend, dass der Punkt B die geradlinige Bahn BO beschreibt, also nur eine Acceleration besitzen kann, deren Richtung mit BO zusammenfällt, erhalten wir die Beschleunigung φ_B einfacher. Die Geschwindigkeit des Systempunktes B ist

$$V_B = \pm r\,\omega\,(\sin\vartheta + \cos\vartheta\, tg\,\psi),$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn dieser Punkt in der Richtung OB das untere, wenn er sich in entgegengesetzter Richtung bewegt, den letzteren Fall nehmen wir hier an. Daher ist die Beschleunigung

$$\varphi_B = \frac{d\,V_B}{d\,t} = -r\,\omega\left(\cos\vartheta - \sin\vartheta\, tg\,\psi + \frac{\cos\vartheta}{\cos^2\psi}\frac{d\,\psi}{d\,\vartheta}\right)\frac{d\,\vartheta}{d\,t}.$$

Es ist aber $\sin\psi = \frac{r}{a}\sin\vartheta$, also $\frac{d\,\psi}{d\,\vartheta} = \frac{r}{a}\frac{\cos\vartheta}{\cos\psi}$, $\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \omega$, womit sich ergiebt

$$\varphi_B = -r\,\omega^2\left\{\cos\vartheta - \sin\vartheta\, tg\,\psi + \frac{r}{a}\frac{\cos^2\vartheta}{\cos^3\psi}\right\},$$

$$\varphi_B = -r\,\omega^2\left\{\cos\vartheta - \lambda\frac{\sin^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \lambda\frac{\cos^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

$$\varphi_B = -r\,\omega^2\left\{\cos\vartheta - \lambda\frac{\sin^2\vartheta - \frac{\cos^2\vartheta}{1-\lambda^2\sin^2\vartheta}}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Für den praktischen Gebrauch ist es vorteilhaft, diese unbequeme Formel in eine Reihe zu entwickeln, wodurch wir bekommen

$$\varphi_B = -r\,\omega^2\left\{\cos\vartheta - \lambda[\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta] - \frac{1}{2}\lambda^3\sin^2\vartheta[\cos^2\vartheta - 3\cos^2\vartheta]\ldots\right\}.$$

Können die Glieder mit höheren Potenzen von λ nicht vernachlässigt werden, dann ist die genaue Gleichung zu verwenden.

Der Abstand des mit der konstanten Geschwindigkeit $r\,\omega$ in dem Kreise vom Radius r sich bewegenden Punktes A vom Momentancentrum ist $(\varrho - r)$, daher sind die auf denselben wirkenden Accelerationen $\Omega\,U$, deren Richtung mit der Linie AC den Winkel ν einschliesst, $\Omega^2(\varrho - r)$ in der Richtung AC, $(\varrho - r)\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ senkrecht zu AC und im Sinne der Geschwindigkeit $r\,\omega$ des Punktes A thätig. Die Componentensummen dieser drei Beschleunigungen in senkrechter und paralleler Richtung zu AC sind

$$(\varrho - r)\frac{d\,\Omega}{d\,t} + \Omega\,U\sin\nu = 0,$$

$$\Omega^2(\varrho - r) + \Omega\,U\cos\nu = -r\,\omega^2.$$

Der Systempunkt A besitzt mithin keine Tangentialbeschleunigung, durch ihn läuft der Kreis $(\varphi_t = 0)$, seine resultierende Beschleunigung ist $\varphi_A = -r\omega^2$, d. i. die Centripetalbeschleunigung des mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit im Kreise (A) rotierenden Punktes A.

Jetzt ist das Verhältnis der Beschleunigungen φ_B und φ_A gegeben, nämlich

$$\frac{\varphi_B}{\varphi_A} = \cos\vartheta - \lambda \frac{\sin^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \lambda \frac{\cos^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die besonders ausgezeichneten Lagen des Punktes A resp. Stellungen der Geraden OA nimmt die Beschleunigung φ_B folgende Werte an.

Ist $\vartheta = 0$, befindet sich der Punkt A in seinem sogenannten unteren toten Punkte, dann ist genau

$$\varphi_B = -\omega^2 r\left(1+\frac{r}{a}\right) = -\omega^2 r(1+\lambda).$$

Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ erhalten wir

$$\varphi_B = \frac{\omega^2 r^2}{\sqrt{a^2-r^2}} = \omega^2 r \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \text{ genau; } \varphi_B = \omega^2 r\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right), \text{ näherungsweise.}$$

Befindet sich der Punkt B in der Mitte seiner Bahn, so ist, weil dann $\cos\vartheta = \frac{r}{2a}$, annähernd

$$\varphi_B = \frac{\omega^2 r^2}{2a} = \omega^2 r \frac{\lambda}{2},$$

wobei nur die Glieder mit λ^5 und höherer Ordnnug vernachlässigt sind, indem die zwischen λ und λ^5 liegenden Glieder verschwinden.

Wenn V_B ein Maximum wird, so geht φ_B in Null über, die entsprechende Kurbelstellung ist nach dem ersten Kapitel dieses Teiles annähernd durch die Gleichung gegeben $\cos\vartheta = \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2$.

Passiert der Punkt A den sogenannten oberen toten Punkt, dann ergiebt sich, weil in diesem Falle $\vartheta = \pi$,

$$\varphi_B = \omega^2 r\left(1-\frac{r}{a}\right) = \omega^2 r(1-\lambda).$$

Es lässt sich die Beschleunigung des Punktes B für alle seine Lagen bequem graphisch berechnen, auch eine Beschleunigungscurve konstruieren, welche der Geschwindigkeitscurve desselben entspricht. Für die Konstruktion sind stets die Winkel ϑ und ψ gegeben, weshalb wir von der Gleichung ausgehen

$$\varphi_B = -\omega^2 r\left(\cos\vartheta - \sin\vartheta\, tg\,\psi + \frac{r}{a}\frac{\cos^2\vartheta}{\cos^3\psi}\right).$$

Weil ψ stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so erkennen wir, dass φ_B stets von endlicher Grösse ist. Nun ist auch

$$\varphi_B = -\omega^2 \frac{1}{\cos\psi}\left\{r\cos(\vartheta+\psi) + \frac{1}{a}\left(\frac{r\cos\vartheta}{\cos\psi}\right)^2\right\}$$

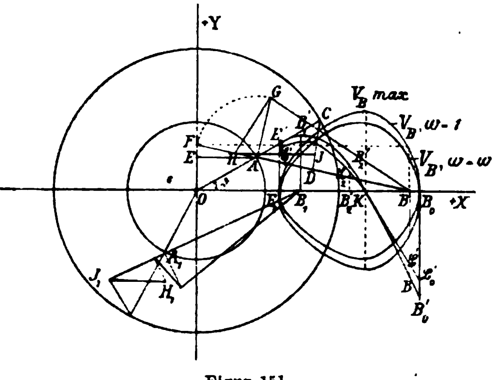
oder, mit $r\cos(\vartheta+\psi) = m$, $\dfrac{r\cos\vartheta}{\cos\psi} = n$,

$$\varphi_B = -\omega^2 \frac{1}{\cos\psi}\left\{m + \frac{n^2}{a}\right\},$$

wodurch die graphische Lösung angezeigt ist. Jetzt erhalten wir mit

$$x = \varrho\cos\vartheta = r\cos\vartheta + a\cos\psi,\quad y = -\frac{1}{\cos\psi}\left\{r\cos(\vartheta+\psi) + \frac{1}{a}\left(\frac{r\cos\vartheta}{\cos\psi}\right)^2\right\}$$

die Coordinaten der Beschleunigungscurve des Punktes B für $\omega = 1$, wobei O Ursprung. Die Multiplikation der entsprechenden Ordinate dieser Curve mit ω^2 giebt die Beschleunigung φ_B selbst. Für gegebene Werte von x, resp. ϑ, ist es leicht, die zugehörigen Ordinaten dieser Curve zu ermitteln. Es sei (Fig. 151) AB die augenblickliche Lage der Schubstangenaxe, F der Schnittpunkt ihrer Verlängerung mit der festen Ordinatenaxe OY. Mit $AE \parallel OX$ ergiebt sich $AE = r\cos\vartheta$, $AF = r\dfrac{\cos\vartheta}{\cos\psi}$. Machen wir auf dem Strahle OA die Strecke $AC = OA = r$, ferner $CD \perp AB$, so ist, weil $\sphericalangle BAC = \vartheta + \psi$, $AD = r\cos(\vartheta+\psi)$. Errichten wir weiter in A auf AB ein Lot $AG = AF$, ziehen BG, hierzu senkrecht GH, dann wird $AH = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{r\cos\vartheta}{\cos\psi}\right)^2$, denn wir haben zufolge der Konstruktion $AH.AB = \overline{AG}^2$. Demnach giebt die Strecke DH die Klammergrösse, es ist $DH = AD + AH = r\cos(\vartheta+\psi) + \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{r\cos\vartheta}{\cos\psi}\right)^2$. Ziehen wir nun noch $HJ \parallel OX$, so giebt diese die zur Abscisse OB gehörige Ordinate der Grösse nach, denn wir haben



Figur 151.

$$HJ = \frac{DH}{\cos\psi} = \frac{1}{\cos\psi}\left\{r\cos(\vartheta+\psi) + \frac{r^2}{a}\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\psi}\right)^2\right\}.$$

Weil wir die Beschleunigung φ_B in der Richtung OBX positiv nehmen, so ist in gegenwärtigem Falle φ_B negativ, mithin der Ordinatenwert HJ von B aus vertikal abwärts aufzutragen, also die Lotlinie $BB' = HJ$ zu machen. Die Multiplikation dieser Strecke mit ω^2 giebt φ_B selbst. Damit ist gezeigt, wie die Ordinate für jede Position von B bestimmt werden kann. Befindet sich der Punkt A unterhalb der Abscissenaxe, etwa in A_1,

welchem die Schubstangenlage $A_1 B_1$ entspricht, so ergiebt sich $H_1 J_1$ als zugehöriger Ordinatenwert, welcher positiv ist, da der Punkt B augenblicklich sich rückläufig bewegt. Machen wir daher $B_1 B'_1 = H_1 J_1$ auf der Senkrechten zu OB durch B_1, dann ist B'_1 der entsprechende Curvenpunkt. Im ersten Falle läuft der Ordinatenwert HJ von links nach rechts, im zweiten $H_1 J_1$ entgegengesetzt, so dass dieses Resultat stets angiebt, ob die Beschleunigung φ_B positiv oder negativ ist. Mit $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ erhalten wir $y = -r(1+\lambda)$ und $y = r(1-\lambda)$, die entsprechenden Ordinaten sind $y = B_0 B_0'$, und $y = E_0 E_0'$, wobei B_0 und E_0 die Endpunkte der Bahn des Punktes B sind. Konstruieren wir unter Beachtung, dass sämtliche Punkte C auf einem mit dem Kreise (A) konzentrischen Kreise vom Radius $2r$ liegen, für eine Reihe von Lagen des Punktes B die zugehörigen Ordinaten der Beschleunigungscurve und verbinden die Endpunkte dieser Linien folgerecht durch einen stetigen Linienzug, so ergiebt sich die aus zwei zusammenfallenden Teilen bestehende Beschleunigungscurve des Punktes B für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$. Der Drehung der Kurbelaxe um einen Winkel von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ oder der Bewegung der Punktes B von B_0 bis E_0 entspricht der Curvenlauf $B'_0 B' K B'_1 E'_0$; der Drehung der Kurbelaxe um den Winkel von $\vartheta = \pi$ bis $\vartheta = 2\pi$ oder der Bewegung des Punktes B von E_0 bis B_0 entspricht der Curvenlauf $E'_0 B'_1 B' B'_0$. Die Beschleunigungscurve schneidet im Punkte K die Abscissenaxe, so dass an dieser Stelle die Acceleration des Punktes B gleich Null ist, ihr entspricht das Geschwindigkeitsmaximum des Punktes B. Denken wir uns noch die Geschwindigkeitscurve dieses Punktes verzeichnet und ihre Ordinate für die Abscisse OK eingetragen, dann giebt diese die Maximalordinate der Curve (V_B), womit die Maximalgeschwindigkeit gefunden ist. Die Mitte der Bahn (B) ist der Punkt B_2, was zeigt, dass das Beschleunigungsminimum stets rechts von der Bahnmitte liegt. Ist der Nullpunkt K für φ_B gefunden, dann können offenbar sofort die dem Geschwindigkeitsmaximum entsprechenden Kurbelstellungen verzeichnet werden.

Sind φ'_1, φ'_2 die Componenten der Beschleunigung φ_B parallel und senkrecht zur Systemgeraden AB, so haben wir $\varphi'_1 = \varphi_B \cos\psi$, $\varphi'_2 = \varphi_B \sin\psi$ und weil $\sin\psi = \lambda \sin\vartheta$ ist,

$$\varphi'_1 = -r\omega^2 \left\{ \cos\vartheta \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\vartheta} - \lambda \sin^2\vartheta + \lambda \frac{\cos^2\vartheta}{1 - \lambda^2 \sin^2\vartheta} \right\},$$

$$\varphi'_2 = -\frac{r\omega^2}{a} \sin\vartheta \left\{ \cos\vartheta - \lambda \frac{\sin^2\vartheta}{(1 - \lambda^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \lambda \frac{\cos^2\vartheta}{(1 - \lambda^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Sind φ''_1, φ''_2 die Componenten der Beschleunigung φ_A parallel und senkrecht zur Systemgeraden AB, so ist mit $\sphericalangle BAC = \mu$, $\varphi''_1 = \varphi_A \cos\mu$,

$\varphi''_2 = \varphi_A \sin\mu$. Aber es ist $\cos\mu = \cos(\vartheta + \psi) = \frac{\varrho\cos^2\vartheta - r}{a}$, $\sin\mu = \sin(\vartheta + \psi) = \frac{\varrho}{a}\sin\vartheta\cos\vartheta$, womit sich ergiebt

$$\varphi''_1 = -\frac{\omega^2 r}{a}(\varrho\cos^2\vartheta - r) = -\omega^2 r\left\{\cos\vartheta\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\vartheta} - \lambda\sin^2\vartheta\right\},$$

$$\varphi''_2 = -\frac{\omega^2 r}{2a}\varrho\sin 2\vartheta = -\omega^2 r\left\{\lambda + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\vartheta}\right\}\sin\vartheta.$$

Die analytische Darstellung der Beschleunigung φ eines beliebigen Punktes M der Systemgeraden AB als Funktion des Winkels ϑ ist nur insofern unbequem, als sich dabei ziemlich verwickelte Ausdrücke ergeben. Ist der Abstand des Punktes M vom Momentancentrum $MC = \mathfrak{r}$, $\measuredangle CMB = \eta$, der Winkel, welchen die Beschleunigung ΩU mit der Geraden AB einschliesst, gleich ξ (Fig. 150, S. 427) dann sind offenbar die Componenten φ_1 und φ_2 des Punktes M in den Richtungen parallel und senkrecht zur Geraden AB

$$\varphi_1 = \Omega^2\mathfrak{r}\cos\eta + \mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}\sin\eta + \Omega U\cos\xi,$$

$$\varphi_2 = \Omega^2\mathfrak{r}\sin\eta - \mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}\cos\eta + \Omega U\sin\xi.$$

Hiermit ergiebt sich für die resultierende Acceleration des Punktes M

$$\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \Omega^4\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 + (\Omega U)^2 + 2\Omega^3 U\mathfrak{r}\cos(\eta - \xi)$$
$$+ 2\Omega U\frac{d\Omega}{dt}\mathfrak{r}\sin(\eta - \xi),$$

und der Winkel γ, welchen φ mit der Geraden AB einschliesst, folgt aus der Relation

$$tg\,\gamma = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\Omega^2\mathfrak{r}\sin\eta - \mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}\cos\eta + \Omega U\sin\xi}{\Omega^2\mathfrak{r}\cos\eta + \mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}\sin\eta + \Omega U\cos\xi}.$$

Bezeichnet b die Entfernung des Punktes M von B, so ist

$$\mathfrak{r}^2 = \overline{CM}^2 = b^2 + \varrho^2\sin^2\vartheta - 2b\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta' = b^2 + \varrho\left(\varrho - 2\frac{br}{a}\right)\sin^2\vartheta,$$

was sich aus dem Dreiecke BMC leicht ergiebt.

Für die Winkel η und ξ werden die Relationen gefunden

$$\sin\eta = \frac{\varrho'\sin\vartheta'}{\mathfrak{r}} = \frac{\varrho(\varrho - r)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\left\{(ab - \varrho r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\eta = \frac{b - \varrho'\cos\vartheta'}{\mathfrak{r}} = \frac{ab - \varrho r\sin^2\vartheta}{\left\{(ab - \varrho r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin\xi = (\zeta + \psi) = \frac{\varrho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - S_n\,(\varrho\cos^2\vartheta - r)}{a\,N},$$

$$\cos\xi = \cos(\zeta + \psi) = \frac{\varrho\,(\varrho\cos^2\vartheta - r + S_n \sin\vartheta\cos\vartheta)}{a\,N}.$$

Mit diesen Werten und denjenigen von Ω, $\Omega\,U$, $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ gelangen wir zu den Gleichungen

$$\varphi_1 = \left(\frac{r\,\omega}{\varrho - r}\right)^2 \left\{b^2 + \varrho\sin^2\vartheta\left(\varrho - \frac{2\,b\,r}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \times \frac{a\,b - \varrho\,r\sin^2\vartheta}{\left\{(a\,b - \varrho\,r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{r\,\omega^2}{(\varrho - r)^2}\,S_n\left\{b^2 + \varrho\sin^2\vartheta\left(\varrho - \frac{2\,b\,r}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \times \frac{\varrho\,(\varrho - r)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\left\{(a\,b - \varrho\,r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{r\,\omega^2}{a\,(\varrho - r)}\,\varrho\left\{\varrho\cos^2\vartheta - r + S_n\sin\vartheta\cos\vartheta\right\},$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{r\,\omega}{\varrho - r}\right)^2 \left\{b^2 + \varrho\sin^2\vartheta\left(\varrho - \frac{2\,b\,r}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \times \frac{\varrho\,(\varrho - r)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\left\{(a\,b - \varrho\,r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{r\,\omega^2}{(\varrho - r)^2}\,S_n\left\{b^2 + \varrho\sin^2\vartheta\left(\varrho - \frac{2\,b\,r}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \times \frac{a\,b - \varrho\,r\sin^2\vartheta}{\left\{(a\,b - \varrho\,r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{r\,\omega^2}{a\,(\varrho - r)}\left\{\varrho^2\sin\vartheta\cos\vartheta - S_n\,(\varrho\cos^2\vartheta - r)\right\},$$

und der Wert von φ als Funktion des Winkels ϑ lässt sich jetzt leicht anschreiben, was dem Leser überlassen wird.

Fällt der Punkt M mit dem Mittelpunkte der Strecke $A\,B$ zusammen, dann vereinfachen sich diese Formeln fast gar nicht.

Mit $b = a$ erhalten wir den Systempunkt A. Die Reduktion der vorstehenden Formeln für diesen Fall giebt

$$\mathfrak{r}^2 = a^2 + \varrho\sin^2\vartheta\,(\varrho - 2\,r) = \varrho - r,$$

$$\sin\eta = \frac{\varrho\,(\varrho - r)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\left\{(a^2 - \varrho\,r\sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta}{a} = \sin\mu,$$

$$\cos\eta = \frac{a^2 - \varrho r \sin^2\vartheta}{\left\{(a^2 - \varrho r \sin^2\vartheta)^2 + \varrho^2(\varrho - r)^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varrho \cos^2\vartheta - r}{a} = \cos\mu.$$

$$\varphi''_1 = \frac{r^2\omega^2}{\varrho - r}\frac{\varrho\cos^2\vartheta - r}{a} + \frac{r\omega^2}{\varrho - r} S_n \frac{\varrho \sin\vartheta\cos\vartheta}{a} - \frac{r\omega^2}{\varrho - r}\frac{\varrho}{a} \times \left\{\varrho\cos^2\vartheta - r + S_n \sin\vartheta\cos\vartheta\right\},$$

$$\varphi''_2 = \frac{r^2\omega^2}{\varrho - r}\frac{\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta}{a} - \frac{r\omega^2}{\varrho - r} S_n \frac{\varrho\cos^2\vartheta - r}{a} - \frac{r\omega^2}{a(\varrho - r)} \times \left\{\varrho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - S_n(\varrho\cos^2\vartheta - r)\right\}.$$

Führen wir noch den Wert der Subnormalen S_n ein und reduzieren, so ergiebt sich

$$\varphi''_1 = -\frac{r\omega^2}{a}(\varrho\cos^2\vartheta - r), \quad \varphi''_2 = -\frac{r\omega^2}{a}\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

welche Ausdrücke mit den bereits gefundenen identisch sind. Nun ist

$$\varphi_A = \sqrt{\varphi''^2_1 + \varphi''^2_2} = \pm\frac{r\omega^2}{a}\sqrt{(\varrho\cos^2\vartheta - r)^2 + \varrho^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta} = -r\omega^2.$$

und für den Winkel γ ergiebt sich

$$tg\,\gamma = \frac{\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho\cos^2\vartheta - r} = \frac{\sin\mu}{\cos\mu} = tg\,\mu, \quad \text{d. i.} \quad \gamma = \mu,$$

d. h. die Beschleunigung φ_A ist stets nach dem Mittelpunkte O des Kreises (A) gerichtet.

Mit $b = 0$ gelangen wir zu dem Systempunkte B. Für diesen Punkt ist

$$\mathfrak{r} = \varrho\sin\vartheta = \varrho',$$

$$\sin\eta = \frac{\varrho(\varrho - r)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\left\{\varrho^2 r^2 \sin^4\vartheta + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varrho - r}{a}\cos\vartheta = \sin\vartheta',$$

$$\cos\eta = -\frac{\varrho r \sin^2\vartheta}{\left\{\varrho^2 r^2 \sin^4\vartheta + \varrho^2(\varrho - r)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}} = -\frac{r}{a}\sin\vartheta = -\cos\vartheta',$$

so dass

$$\varphi'_1 = -\left(\frac{r\omega}{\varrho - r}\right)^2 \frac{\varrho r}{a}\sin^2\vartheta + \frac{r\omega^2}{\varrho - r}\frac{\varrho}{a}\left\{r - \varrho\cos^2\vartheta\right\},$$

$$\varphi'_2 = \frac{r^2\omega^2}{\varrho - r}\frac{\varrho}{a}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{r\omega^2}{(\varrho - r)^2}\frac{\varrho r}{a} S_n \sin^2\vartheta - \frac{r\omega^2}{a(\varrho - r)} \times \left\{\varrho^2\sin\vartheta\cos\vartheta - S_n(\varrho^2\cos\vartheta - r)\right\}.$$

nach weiterer geschickter Reduktion

$$\varphi'_1 = -\frac{\varrho r\omega^2}{a(\varrho - r)^2}\left\{r^2\sin^2\vartheta + (\varrho\cos^2\vartheta - r)(\varrho - r)\right\},$$

$$\varphi'_2 = -\frac{r\omega^2}{a}\left\{\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{a^2 S_n}{(\varrho - r)^2}\right\},$$

und schliesslich

$$\varphi'_1 = -r\omega^2 \left\{ \cos\vartheta \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2\vartheta} - \lambda \sin^2\vartheta + \lambda \frac{\cos^2\vartheta}{1-\lambda^2\sin^2\vartheta} \right\},$$

$$\varphi'_2 = -\frac{r^2\omega^2}{a} \sin\vartheta \left\{ \cos\vartheta - \lambda \frac{\sin^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \lambda \frac{\cos^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Die Resultante aus diesen zwei Beschleunigungen ist

$$\varphi_B = \sqrt{\varphi'^2_1 + \varphi'^2_2}$$
$$= -r\omega^2 \left\{ \cos\vartheta - \lambda \frac{\sin^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \lambda \frac{\cos^2\vartheta}{(1-\lambda^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

und für den Winkel γ erhalten wir

$$tg\gamma = \frac{\lambda \sin\vartheta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\vartheta}} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = tg\,\psi, \quad \text{d. i.} \quad \gamma = \psi,$$

woraus sich wieder ergiebt, dass die Richtung von φ_B mit der Führungsgeraden OB zusammenfällt.

Die Darstellung des Abstandes p eines beliebigen Systempunktes D vom Beschleunigungscentrum J als Funktion des Winkels ϑ durch eine einfache Formel dürfte kaum möglich sein. Selbst für den Abstand des Punktes B vom Beschleunigungspole J gelang es bisher nicht einen einfachen Ausdruck zu erhalten. Das bis jetzt vom Verfasser gewonnene unerquickliche Resultat lautet

$$\overline{BJ}^2 = \frac{1}{(r^2+S_n^2)N^2}\Big[(\varrho-r)^2 N^4 - 2(\varrho-r)N^2 \{\varrho \sin\vartheta\, S_n(\varrho\cos\vartheta + S_n \sin\vartheta) + \varrho r \cos\vartheta(\varrho\sin\vartheta - S_n\cos\vartheta)\} + (r^2+S_n^2)\{\varrho^2\sin^2\vartheta(\varrho\cos\vartheta + S_n\sin\vartheta)^2 + \varrho^2\cos^2\vartheta(\varrho\sin\vartheta - S_n\cos\vartheta)^2\}\Big].$$

Wir begeben uns nun an die geometrische Darstellung der resultierenden Beschleunigung φ einzelner Punkte des Systemes für eine bestimmte Phase desselben.

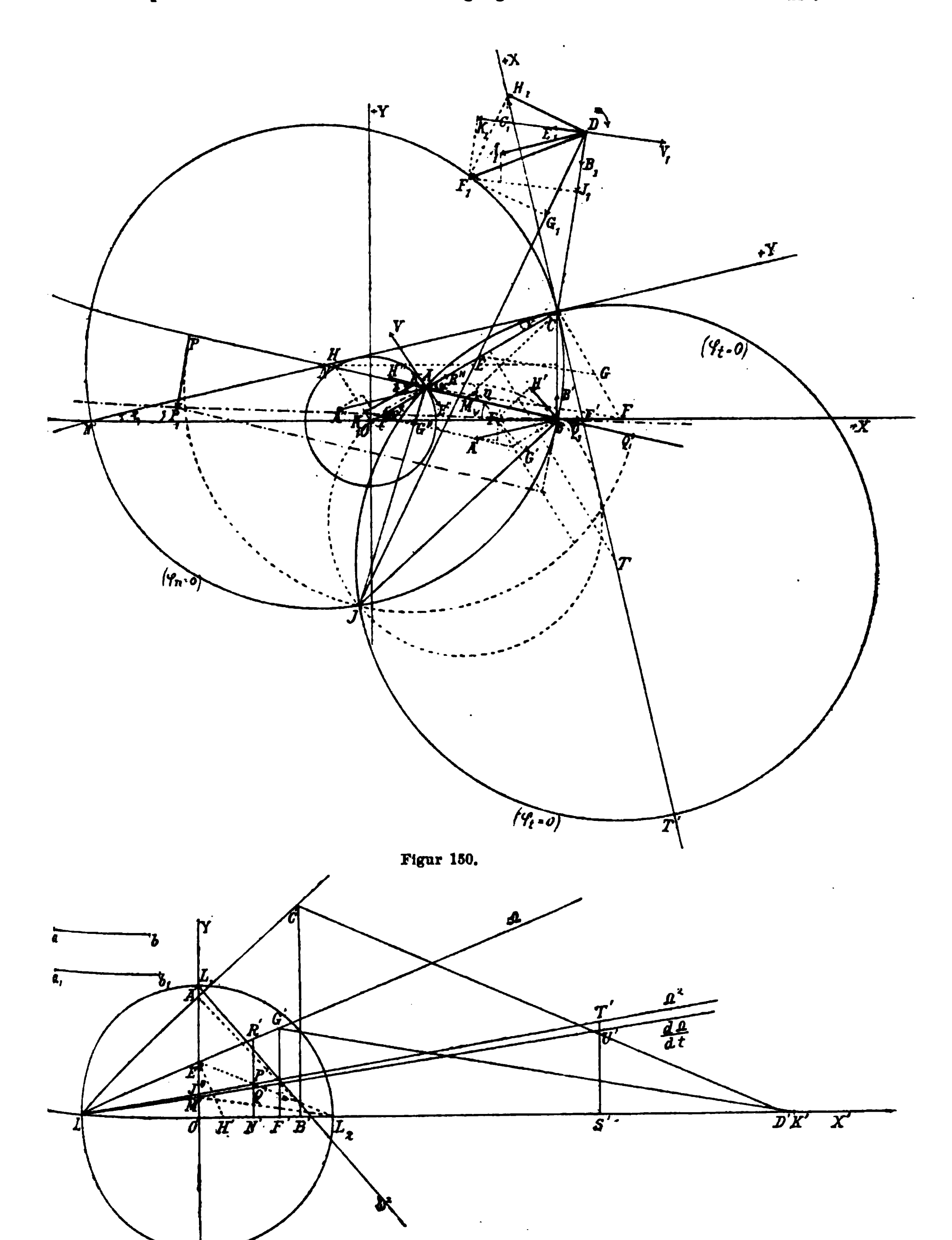
Es sei (Fig. 150, S. 427) AB die augenblickliche Lage der Systemgeraden AB, deren Punkt A auf dem festen Kreise (A) mit dem Mittelpunkte O und dem Radius $OA = r$ fortrückt, während der Punkt B stets auf der festen Geraden OBX bleibt, die Strecke $ab = \omega =$ der Winkelgeschwindigkeit der Geraden OA um O, die Strecke $a_1b_1 =$ der Masseinheit λ. Der hier gegebenen Lage des Systemes entspricht der Punkt C als Momentancentrum, OC ist der Fahrstrahl ϱ der Curve (C), BC der Radiusvektor ϱ' der Curve (Γ).

Zunächst haben wir die Normale und Tangente der Curve (C) für den Punkt C zu bestimmen, wodurch sich die Coordinatenaxen CY und CX ergeben. Für die Subnormale der Curve (C) besteht die Gleichung

$S_n = \frac{\varrho - 2r}{\varrho - r} \varrho \, tg \, \vartheta$, sie folgt daher aus der Proportion $S_n : (\varrho - 2r) = \varrho \, tg \, \vartheta : (\varrho - r)$. Machen wir auf dem Strahle OC die Strecke $OE = 2.OA = 2r$, wodurch $CE = (\varrho - 2r)$ wird, errichten in C auf OC eine Senkrechte, welche die feste Abscissenaxe OX in F schneidet, dann ist $CF = \varrho \, tg \, \vartheta$. Ziehen wir jetzt $EG \parallel AF$, so giebt die Strecke CG die Länge von S_n, denn wir haben $CG : CE = CF : AC$, $CG = \frac{CE}{AC} CF = \frac{\varrho - 2r}{\varrho - r} \varrho \, tg \, \vartheta$. Zeichnen wir nun, auf der Senkrechten zum Fahrstrahle OC durch O, $OH = CG$, ziehen den Strahl CH und zu ihm den Normalstrahl CX, so sind die Normale und Tangente der Curve (C), sowie die mit ihnen zusammenfallenden Coordinatenaxen HCY und CX gefunden.

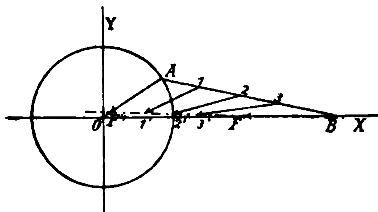
Der Ort aller Systempunkte mit der Normalbeschleunigung $\varphi_n = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\frac{U}{\Omega}$, sein Mittelpunkt befindet sich auf der Ordinatenaxe CY und er geht durch die Punkte C, B. Der Kreis $(\varphi_n = 0)$ lässt sich dadurch sofort verzeichnen, N ist sein Mittelpunkt und $NC = \frac{1}{2} \frac{U}{\Omega}$. Der Ort aller Systempunkte mit der Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = 0$ ist ein Kreis vom Durchmesser $\Omega U : \frac{d\Omega}{dt}$, sein Mittelpunkt liegt auf der Abscissenaxe CX, er geht durch die Punkte C, A. Der Kreis $(\varphi_t = 0)$ ist dadurch gegeben, T ist sein Mittelpunkt und $TC = \frac{1}{2} \Omega U : \frac{d\Omega}{dt}$. Diese beiden Bresse'schen Kreise schneiden sich ausser in C in dem Punkte J, welcher der Beschleunigungspol ist. Auf dem Strahle CJ befinden sich alle Systempunkte mit einer zur Normalen der Curve (C) parallelen Beschleunigung. Auf dem durch J gehenden, zu CJ senkrechten Strahle $N'T'$ liegen alle Systempunkte mit einer zur Tangente der Curve (C) parallelen Beschleunigung. Offenbar lässt sich auf diesem Wege der Beschleunigungspol nur dann bestimmen, wenn das Momentancentrum C, die Punkte N und T auf die Bildfläche fallen.

Die graphische Darstellung der Beschleunigung φ eines beliebigen Systempunktes D, welcher den Abstand $CD = \mathfrak{r}$ vom Geschwindigkeitspole, die Entfernung $DJ = p$ vom Beschleunigungscentrum besitzt, kann wie folgt bewirkt werden. Für das geometrische Rechnen verwenden wir wieder ein rechtwinkeliges Axenkreuz $O'X'$, $O'Y'$ (Fig. 150a, S. 427) mit dem um O' als Mittelpunkt beschriebenen Einheitskreise vom Radius $O'L = O'L_1 = O'L_2 = a_1 b_1 = \lambda$. Die Geschwindigkeit des Momentan-



Figur 150.

Figur 150 a.



Figur 150 b.

centrums ist $U = \omega . N = \omega . CH$. Mit $O'A' = ab = \omega$, dem Strahle LA', $LB' = CH$, $B'C' \perp O'X'$ wird $U = B'C'$ der Grösse nach, so dass, wenn wir auf der Abscissenaxe CX die Strecke $CC_1 = B'C'$ machen, diese Linie die Geschwindigkeit U vollständig giebt. Die Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum ist $\Omega = \frac{\Omega}{U} . U = \frac{B'C'}{2 . CN} = \frac{B'C'}{CN'}$. Mit $B'D' = CN'$, der Geraden $D'C'$ und $LE' \parallel D'C'$ ergiebt sich $O'E' = \Omega$, so dass der Strahl LE' derjenige für die Multiplikation mit Ω ist. Mit dieser Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Gerade CD augenblicklich im Sinne des Pfeiles. Die auf den Punkt D in paralleler Richtung zur Ordinatenaxe CY wirkende Beschleunigungscomponente ist ΩU. Mit $LF' = B'C'$, $F'G' \perp O'X'$ folgt $\Omega U = F'G'$ der Grösse nach. Für die beiden anderen Beschleunigungscomponenten $\Omega^2 \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}$ sind die Grössen Ω^2 und $\frac{d\Omega}{dt}$ nötig. Machen wir $E'H' \perp LE'$, $O'J' = O'H'$ und ziehen den Strahl LJ', so ist derselbe, weil $O'J' = \Omega^2$, der Ω^2-Strahl. Mit $F'K' = 2 . CT = CT' = \Omega U : \frac{d\Omega}{dt}$, $L_2M' \parallel K'G'$ ergiebt sich $O'M' = \frac{d\Omega}{dt}$ und in der Linie LM' der $\frac{d\Omega}{dt}$-Strahl. Machen wir nun $LN' = CD = \mathfrak{r}$, $N'R' \perp O'X'$, so ist $\Omega^2 \mathfrak{r} = N'P'$, $\mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt} = N'Q'$, $\Omega \mathfrak{r} = V = N'R'$. Da nun die Richtung und Grösse der die resultierende Beschleunigung φ des Systempunktes D erzeugenden Beschleunigungscomponenten bekannt sind, so lässt sich φ aus ihnen ableiten. Mit Rücksicht darauf, dass ΩU negativ ist, machen wir auf der zur Ordinatenaxe CY parallelen Geraden durch D die Strecke $DA_1 = F'G'$, sodann auf DC die Strecke $DB_1 = N'P'$ und auf der Tangente der Bahn (D) $DE_1 = N'Q'$, dabei beachtend, dass die letztere Acceleration positiv ist, womit die Componenten ΩU, $\Omega^2 \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\frac{d\Omega}{dt}$ für den Punkt D jetzt vollständig gegeben sind. Aus den Strecken DA_1, DB_1, DE_1 folgt $DF_1 = \varphi =$ der resultierenden Beschleunigung des Systempunktes D durch einfache geometrische Addition. Es ist aber auch φ die Resultante aus $\Omega^2 p$ und $p\frac{d\Omega}{dt}$. Machen wir daher $LS' = DJ = p$, $S'T' \perp O'X'$, auf dem Polstrahle DJ die Strecke $DG_1 = S'T' = \Omega^2 p$, auf der zu DJ durch D gelegten

Senkrechten $D H_1 = S'U' = p \frac{d\Omega}{dt}$, und bilden aus diesen Beschleunigungen die Resultante, so ergiebt sich wieder $\varphi = D F_1$. Zerlegen wir die Acceleration $\varphi = D F_1$ in den Richtungen parallel und senkrecht zur Linie CD, so ergiebt sich $\varphi_n = D J_1$, $\varphi_t = D K_1$. Zeichnen wir auf der Tangente der Bahn (D) $D V_1 = N'R'$, dann giebt die Strecke $D V_1$ die Geschwindigkeit V des Systempunktes D. Damit ist auch gezeigt, wie für jeden anderen Systempunkt, ΩU, $\Omega^2 \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \frac{d\Omega}{dt}$, φ, φ_n, φ_t, V zu bestimmen sind.

Von besonderem Interesse ist die Systemgerade AB. Für den Systempunkt B erhalten wir $\Omega U = BA'$, $\Omega^2 \mathfrak{r} = \Omega^2 . BC = BB'$, $\mathfrak{r} \frac{d\Omega}{dt} = BC . \frac{d\Omega}{dt} = BE'$; ferner $\Omega^2 p = \Omega^2 . BJ = BG'$, $p \frac{d\Omega}{dt} = BJ . \frac{d\Omega}{dt} = BH'$. Die Resultante aus den drei ersten und diejenige aus den beiden letzten Accelerationen ist die Beschleunigung $\varphi_B = BF'$, welche mit der Führungsgeraden OB zusammenfällt. Für den Systempunkt A ergiebt sich $\Omega U = AA''$, $\Omega^2 \mathfrak{r} = \Omega^2 . AC = AB''$, $\mathfrak{r} \frac{d\Omega}{dt} = AC . \frac{d\Omega}{dt} = AE''$; ferner $\Omega^2 p = \Omega^2 . AJ = AG''$, $p \frac{d\Omega}{dt} = AJ . \frac{d\Omega}{dt} = AH''$. Die Resultante aus den drei ersten und diejenige aus den beiden letzten Accelerationen ist die Beschleunigung $\varphi_A = AF''$, welche mit dem Halbmesser OA des Kreises (A) zusammenfällt. Weil $\varphi_A = -\omega^2 r$, so lässt sich die Strecke AF'' auch durch Bildung des Produktes $\omega^2 r$ bestimmen. In bekannter Weise finden wir, dass für den Punkt Q der Systemgeraden AB die Beschleunigung $\varphi = Q Q_1$ parallel AB, für den Punkt P derselben die Beschleunigung $\varphi = P P_1$ senkrecht zu AB, für ihren Punkt K die Beschleunigung $\varphi = K K_1$ ein Minimum ist; der über PQ als Durchmesser beschriebene Kreis geht daher durch das Beschleunigungscentrum J. Es ist klar, dass die Lage des Beschleunigungspoles J gegeben ist, wenn die Beschleunigungen der Punkte A und B bekannt sind. Für einige Punkte der Strecke AB der Systemgeraden AB zeigt Figur 150b (S. 428) die Beschleunigung φ, welche in bekannter Weise aus den Beschleunigungen φ_A und φ_B abgeleitet wurden.

Das System durchläuft seine sämtlichen Phasen, wenn die Gerade OA eine volle Umdrehung macht, oder wenn der Winkel ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ wächst. Hierbei durchlaufen das Momentancentrum C und der Beschleunigungspol J einmal ihre Bahnen, die Geschwindigkeiten U, Ω, die

Beschleunigung φ und ihre Componenten ändern sich dabei, weil sie Funktionen des Winkels ϑ sind, und durchlaufen alle ihre Werte.

Die Gleichung der Bahn des Momentancentrums C ist bekannt, eine einfache Gleichung der Bahn des Beschleunigungspoles J scheint noch nicht gefunden worden zu sein.

Wählen wir als Coordinatenaxen die festen, senkrecht auf einander stehenden Geraden OBX, OY und bezeichnen die Coordinaten des Beschleunigungspoles J für diese Axen mit x und y, dann ist

$$x = \varrho \cos\vartheta - y_1 \cos\zeta + x_1 \sin\zeta, \quad y = \varrho \sin\vartheta - x_1 \cos\zeta - y_1 \sin\zeta,$$

wenn ζ den von den Coordinatenaxen CY und OBX eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Durch Substitution der oben für $x_1, y_1, \sin\zeta, \cos\zeta$ gefundenen Werte ergiebt sich nach einigen Vereinfachungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\vartheta - \frac{\varrho - r}{r^2 + S_n^2}\left\{(\varrho r + S_n^2)\cos\vartheta - (\varrho - r) S_n \sin\vartheta\right\} \\ y &= \varrho\sin\vartheta - \frac{\varrho - r}{r^2 + S_n^2}\left\{(\varrho r + S_n^2)\sin\vartheta + (\varrho - r) S_n \cos\vartheta\right\} \end{aligned}\right\}.$$

Dieses sind die Gleichungen der Curve (J). Werden ϱ, S_n durch a, r und ϑ ausgedrückt, so erscheinen ziemlich ungefügige Formeln für x und y. Die Elimination des Winkels ϑ aus diesen Gleichungen giebt die Gleichung der Curve (C) in x und y.

Der Studierende thut wohl, sämtliche bisher allgemein dargestellten Grössen für die ausgezeichneten Kurbelstellungen abzuleiten und in einer Tabelle zusammenzustellen.

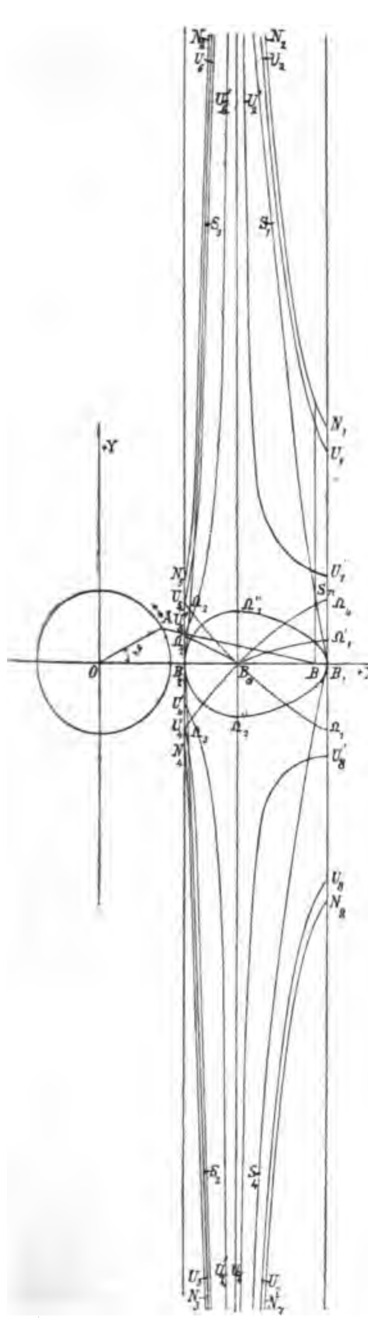
Um ein möglichst klares Bild von der Änderung der Grössen S_n, N, U, Ω, ΩU etc. während eines Kurbelumlaufes zu erhalten, wurde zu einer geometrischen Darstellung gegriffen (Fig. 152, S. 431). Es wurde dabei in derselben Weise verfahren wie bei der Herstellung der Geschwindigkeitscurve und der Beschleunigungscurve des Punktes B. Für dasselbe Coordinatensystem wie dort sind die Gleichungen der Geschwindigkeitscurve des Momentancentrums

$$x = r\cos\vartheta + a\cos\psi, \quad y = U = \omega . N,$$

diejenige der Curve (Ω) der Winkelgeschwindigkeit des Systemes um das Momentancentrum

$$x = r\cos\vartheta + a\cos\psi, \quad y = \Omega = \frac{r\omega}{\varrho - r}$$

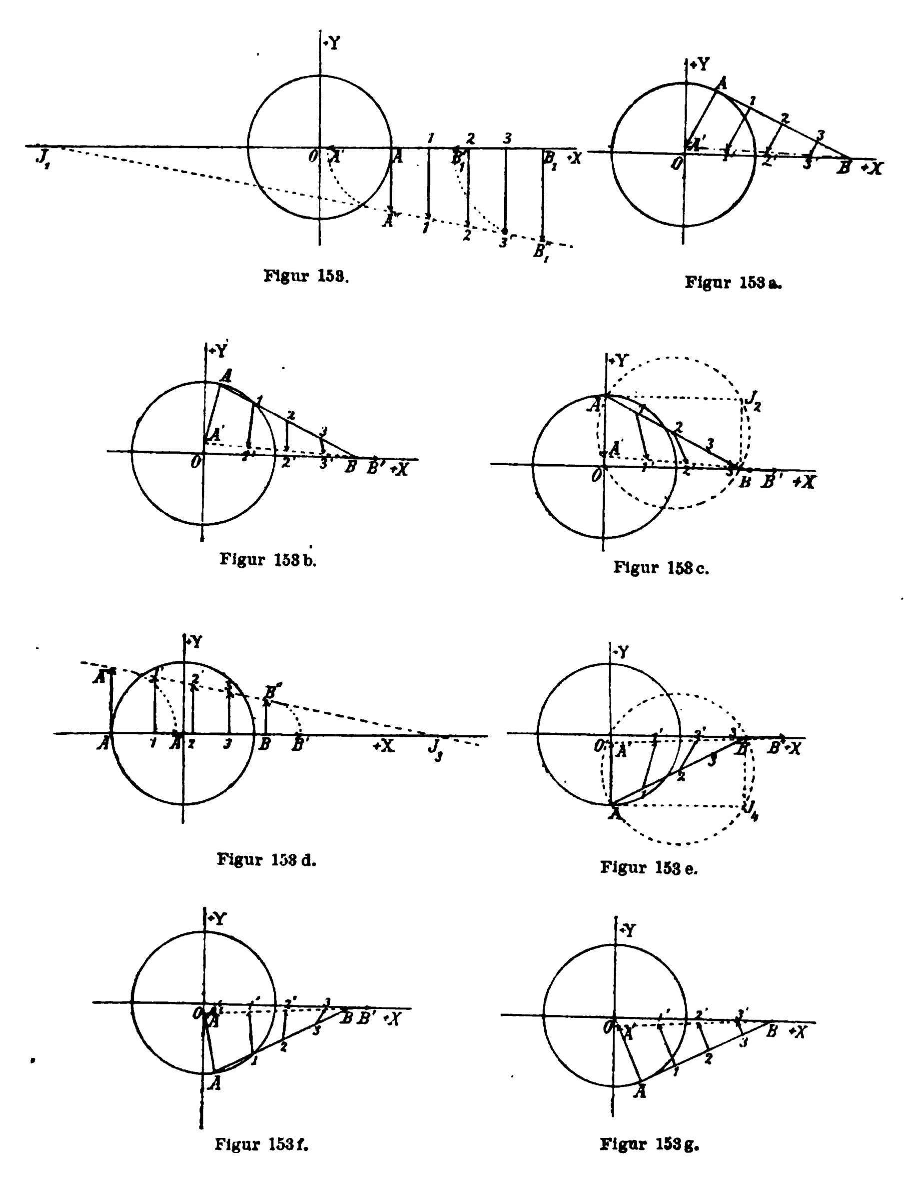
u. s. f. Die Ordinatenaxe nehmen wir positiv nach oben. Sämtliche Curven liegen offenbar innerhalb des von der durch den Punkt B gehenden, zu OB senkrechten Geraden während der Bewegung des Systemes beschriebenen Flächenstreifens, also zwischen den durch die Endpunkte B_1 und B_2 der Bahn des Punktes B zu OB gezogenen Normalen. Der Punkt B_0 entspricht der


Figur 152.

Lage des Systempunktes B, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ ist. Für eine Reihe von Werten des Winkels ϑ wurde die entsprechende Subnormale und Normale der Curve (C) konstruiert, die entsprechenden Ordinaten der übrigen Curven wurden arithmographisch berechnet, aufgetragen und die Endpunkte der gleichnamigen Ordinaten wurden folgerecht durch stetige Linienzüge verbunden, wodurch die verlangten Curven entstanden. Bewegt sich der Punkt B von B_1 nach B_2 und wieder zurück nach B_1, wobei der Punkt A seinen Kreis im Sinne des Pfeiles beschreibt, dann ist der Lauf der einzelnen Curven der folgende. Die Curve der Polarsubnormalen ist die Linie $B_1\ (S_n)\ S_1 \infty S_2\ B_2\ S_3 \infty S_4\ B_1$. Die Curve der Polarnormalen ist die Linie $N_1\ N_2 \infty N_3\ N_4\ N_5\ N_6 \infty N_7\ N_8$. Die Geschwindigkeitscurve (U) ist die Linie $U_1\ U_2 \infty U_3\ U_4\ U_5\ U_6 \infty U_7\ U_8$. Die drei genannten Curven besitzen in der durch B_0 gehenden, zu OX senkrechten Geraden eine gemeinschaftliche Asymptote. Die Curve der Winkelgeschwindigkeit Ω des Systemes um das Momentancentrum ist die aus zwei kongruenten, zur Abscissenaxe symmetrisch gelegenen Zweigen bestehende Linie $\Omega_1\ B_0\ \Omega_2$, $\Omega_3\ B_0\ \Omega_4$, sie besitzt den Doppelpunkt B_0. Die Curve $(\Omega)^2$ ist die Linie $\Omega'_1\ B_0\ \Omega'_2$. Die Curve der Winkelbeschleunigung $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ des Systemes um das Momentancentrum ist die geschlossene Linie $B_1\ \Omega''_1\ B_2\ \Omega''_2\ B_1$. Die Curve der Acceleration $\Omega\, U$ eines jeden Systempunktes parallel zur Nor-

malen der Curve (C) ist die Linie $U'_1 U'_2 \propto U'_3 U'_4 U'_5 U'_6 \propto U'_7 U'_8$, ihre Äste nähern sich der durch B_0 gehenden, zu OX senkrechten Geraden asymptotisch. Ebenso können auch die Curven $\left(\frac{U}{\Omega}\right)$, $\left(\Omega\, U : \frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)$ konstruiert werden.

Die wirkliche Beschleunigungscurve des Systempunktes B ergiebt sich durch Multiplikation der Ordinaten der Beschleunigungscurve dieses Punktes für $\omega = 1$ mit ω^2, die ω^2fachen Längen dieser Linien sind dann die Ordinaten der verlangten Curve $\mathfrak{B}'_0 \mathfrak{B}' K \mathfrak{B}'_2 \mathfrak{C}'_0$. (Fig. 151, S. 420.) Weil nun für jede Lage der Systemgeraden AB die Beschleunigungen φ_A und φ_B der Punkte A und B bekannt sind, so ist es leicht auch die Beschleunigung φ weiterer Punkte dieser Geraden für irgend eine ihrer Lagen graphisch darzustellen. Für die ausgezeichneten Lagen des Punktes B resp. der Linie OA ist die Acceleration φ einiger Punkte der Strecke AB mittelst der konstanten Beschleunigung φ_A und der Beschleunigungscurve $\mathfrak{B}'_0 K \mathfrak{C}'_0$ graphisch dargestellt worden. Figur 153 (S. 433) giebt die Anfangslage ($\vartheta = 0$) und die Endlage ($\vartheta = 2\pi$) der Systemgeraden AB. Hier fallen die Beschleunigungen $\varphi_B = B_1 B' = B_0 \mathfrak{B}_0' = -\omega^2 r (1 + \lambda)$, und $\varphi_A = AA' = -\omega^2 r$ mit OB zusammen und haben gleiche Richtung. Weil nun aber die Endpunkte von φ der einzelnen Punkte von AB auch dann noch auf einer Geraden liegen, wenn wir die Beschleunigungen in demselben Sinne durch einen gleichen Winkel drehen, so wurde eine Drehung durch 90° vorgenommen, $B_1 B''_1 = B_1 B'_1$, $AA'' = AA'$ und $\perp AB$ gemacht, hierauf der Strahl $B'_1 A''$ gezogen, sodann wurden durch die Punkte 1, 2, 3 von AB die Senkrechten zu AB 11′, 22′, 33′ nach $B''_1 A''$ gezeichnet, welche Strecken die Grösse der Beschleunigung φ der Punkte 1, 2, 3 geben. Der Strahl $A'' B''_1$ schneidet die Systemgerade AB in dem Punkte J_1, es besitzt dieser Punkt demnach offenbar die Beschleunigung $\varphi = 0$, so dass mit ihm der Beschleunigungspol zusammenfällt, wodurch zugleich der Anfangspunkt der Curve der Beschleunigungscentra gefunden ist Figur 153a (S. 433) zeigt die Beschleunigungen der Punkte 1, 2, 3 für den Augenblick, in welchem φ_B erstmals gleich Null ist. In dieser Phase sind die Beschleunigungen aller Punkte der Systemgeraden AB parallel zu der Linie AO und der Beschleunigungspol fällt mit dem Punkte B zusammen. Die Figur 153b (S. 433) giebt die Acceleration φ der Punkte 1, 2, 3 in dem Falle, wo B erstmals die Mitte seiner Bahn passiert; hier ist $\varphi_B = BB' = B_2 \mathfrak{B}_2'$ positiv und bleibt es so lange bis der Punkt B wieder in die Lage K gelangt. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ giebt Figur 153c φ für dieselben Punkte. Die Beschleunigungen φ_A und φ_B stehen jetzt senkrecht aufeinander, der über AB als Durchmesser beschriebene Kreis enthält mithin den Beschleuni-



Figur 153. Figur 153a.

Figur 153b. Figur 153c.

Figur 153d. Figur 153e.

Figur 153f. Figur 153g.

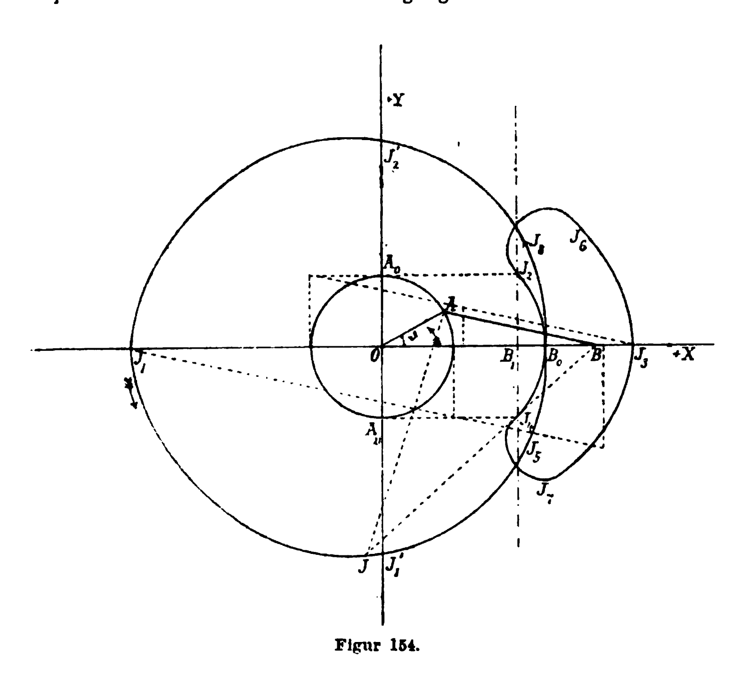
gungspol, derselbe ist der Schnittpunkt J_2 der durch A und B zu OB und OA gezogenen Parallelen. In dem Momente, wo $\vartheta = \pi$ wird, liegen φ_A und φ_B wieder in einer geraden Linie und sind von gleicher Richtung (Fig. 153d). Die Grösse von φ der Punkte 1, 2, 3 ergiebt sich wie in dem Falle $\vartheta = 0$. Der Träger $A''B''$ des Endpunktes von φ (der Grösse nach) schneidet die Systemgerade AB im Punkte J_3, welcher offenbar der Beschleunigungspol für diese Lage des Systemes ist. Die

Figur 153e giebt φ für die Punkte 1, 2, 3, wenn $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ ist. Der Durchschnittspunkt J_4 der durch A und B gehenden Parallelen zu den festen Coordinatenaxen ist offenbar der Beschleunigungspol. Durch Figur 153f (S. 433) sind die Beschleunigungen 11', 22', 33' der Punkte 1, 2, 3 für den Fall dargestellt, wo der Punkt B zweitmals seine Mittellage passiert. Tritt der Punkt B zum zweitenmale in diejenige Stelle, für welche $\varphi_B = 0$ ist, dann sind die Accelerationen aller Punkte von AB wieder parallel zu der Linie AO (Fig. 153g, S. 433), der Beschleunigungspol fällt wieder mit dem Punkte B zusammen, dessen Beschleunigung von jetzt ab wieder negativ wird, wenn das System seine Bewegung fortsetzt. Ist der Winkel $\vartheta = 2\pi$ geworden, dann beginnt dasselbe Spiel vom neuen.

Aus den Gleichungen für die Curve der Beschleunigungscentra folgt mit

$\vartheta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$x =$	$-\frac{a^2 - r^2}{r}$	$+\sqrt{a^2 - r^2}$	$\frac{a^2 - r^2}{r}$	$\sqrt{a^2 - r^2}$	$-\frac{a^2 - r^2}{r}$
$y =$	0	r	0	$-r$	0,

was zeigt, dass diese Linie mit $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ gleiche, aber entgegengesetzte Abscissenwerte, mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ gleiche, aber entgegengesetzte Ordinatenwerte besitzt. Die Konstruktion der Bahn des Beschleunigungspoles, deren Coordinaten (x, y) nur in geometrischer Beziehung zu dem Systeme stehen, unterliegt keiner Schwierigkeit, sie ist nur mit einigem Zeitaufwande verknüpft und verlangt eine geschickte Anwendung der unter I. für die Bestimmung des Beschleunigungspoles gegebenen Regeln, da sich die Coordinaten (x, y) des Poles J für beliebige Werte von ϑ auch geometrisch nicht bequem bestimmen lassen. Die Curve des Beschleunigungspoles veranschaulicht die Figur 154 (S. 435), sie ist bezüglich der Abscissenaxe OX symmetrisch, denn diese ist für die Bewegung des Systemes Symmetrieaxe, und wird dieselbe von der Curve in den drei Punkten J_1, J_3 und B_0 geschnitten. Es ist $OJ_1 = OJ_3 = \frac{a^2 - r^2}{r} = \frac{(a + r)(a - r)}{r}$, wodurch die Punkte J_1 und J_3 auch durch Konstruction einer vierten Proportionallinie gefunden werden können. Der dritte Punkt B_0 ist ein Doppelpunkt, er fällt mit der Lage des Punktes B zusammen, wenn $\varphi_B = 0$ ist, er ist der Schnittpunkt der Curve (φ_B) und der Axe OX. Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{U}{\Omega} = \infty$, $\Omega U : \frac{d\Omega}{dt} = \infty$, der Ort aller Systempunkte mit $\varphi_n = 0$ die im Abstande



Figur 154.

$OB_1 = \sqrt{a^2 - r^2}$ von O zur Axe OY parallel laufende Gerade, der Ort aller Systempunkte mit $\varphi_t = 0$ die durch den höchsten Punkt A_0 des Kreises (A) parallel zur Axe OX laufende Gerade; der Schnittpunkt J_2 dieser Geraden giebt einen weiteren Punkt J_2 von (J). Mit $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ schneidet der Radiusvektor von (C) den Kreis (A) im Punkte A_u. Legen wir durch den Punkt A_u eine Parallele zu OX, so schneidet diese die Tangente des unendlich fernen Punktes der Curve (C) im Punkte J_4, welcher ein weiterer Punkt von (J) ist, denn für diese Phase des Systemes ist der Strahl $A_u J_4$ der Ort für $\varphi_t = 0$, der Strahl $B_1 J_4$ der Ort für $\varphi_n = 0$. Fernere Punkte können mittelst der Bresse'schen Kreise gesucht werden, jedoch nur in beschränkter Zahl. Weil die Beschleunigungen φ_A und φ_B für alle Lagen des Systemes bekannt sind, so ist es an die Hand gegeben, mittelst dieser Accelerationen Punkte der Curve (J) aufzusuchen, was vermöge $\varphi_A = -\omega^2 r$ und der Beschleunigungscurve (φ_B) nach den unter I. angegebenen Regeln zu geschehen hat. Weil die Curve (J) von der Winkelgeschwindigkeit ω des Punktes A unabhängig ist, so ergiebt sich offenbar dasselbe Resultat mit $\omega = 1$, wodurch das ganze Verfahren sich etwas vereinfacht. Unsere Curve besitzt drei Doppelpunkte. Macht der Punkt A auf seinem Kreise einen Umlauf, wobei wir annehmen wollen, dass der Winkel ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ sich ändert, dann ist der Weg des Beschleunigungscentrums $J_1 J'_1 J_5 B_0 J_2 J_6 J_3 J_7 J_4 B_0 J_8 J'_2 J_1$,

er durchwandert während eines vollen Umlaufes des Systempunktes A einmal seine Bahn.

Damit ist gezeigt, wie auch in anderen Fällen die Curve des Beschleunigungspoles gefunden werden kann.

Nur wegen Raumersparnis wurde im ersten Kapitel dieses Teiles die geometrische Darstellung der Geschwindigkeit für die dort behandelten Systeme unterlassen, der Studierende kann jedoch jetzt dieselbe ohne weitere Erläuterung durchführen.

Vierter Teil.

Statik.

Erstes Kapitel.

Gleichgewicht unveränderlicher, materieller Systeme.

Das Gebilde, an welchem Kräfte wirken, kann sein ein einzelner materieller Punkt, ein System materieller Punkte, die entweder in bestimmter endlicher Entfernung von einander liegen, oder in ihrer Gesamtheit das ausmachen, was wir einen materiellen Körper nennen. Ferner können Kräfte an mehreren materiellen Systemen oder Körpern, die zu einander in gewisser Beziehung stehen, zugleich thätig sein. Die materiellen Punkte und Systeme denken wir uns an ihrer Oberfläche entweder vollkommen glatt oder rauh. Im ersten Falle treten durch die gegenseitige Berührung der einzelnen Systeme keine weiteren Kräfte zu den sogenannten äusseren Kräften hinzu, im zweiten Falle wirkt der gegenseitigen Verschiebung zweier Systeme auf einander der sogenannte Reibungswiderstand entgegen, wodurch wir das Gleichgewicht materieller Systeme ohne Rücksicht und mit Rücksicht auf Reibung betrachten.

Wirkt auf einen einzelnen materiellen Punkt ein System von beliebig gerichteten Kräften, ist P irgend eine Kraft dieses Kräftesystemes, sind α, β, γ die Winkel, welche ihre Richtung mit drei im Raume beliebig gelegen gewählten, auf einander senkrechten Coordinatenaxen einschliesst, dann sind die ausreichenden und notwendigen Bedingungen für das Gleichgewicht dieses materiellen Punktes

$$\Sigma (P \cos \alpha) = 0, \qquad \Sigma (P \cos \beta) = 0, \qquad \Sigma (P \cos \gamma) = 0,$$

wo Σ die Summation aller solcher Grössen wie $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$ für alle die verschiedenen Kräfte des Systemes darstellt, d. h. die algebraische Summe der Componenten aller Kräfte des Systemes parallel zu jeder der Axen muss gleich Null sein. Wenn sämtliche auf einen Punkt wirkende Kräfte in einer Ebene liegen, dann sind zwei von den drei Axen in dieser Ebene zu nehmen, wodurch sich in diesem Falle die drei Gleichgewichtsbedingungen auf zwei reduzieren.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines von beliebig gerichteten Kräften angegriffenen materiellen Punktes scheinen zuerst richtig von Stevin of Burges gedacht worden zu sein. (Beghinselen der Waaghconst, 1586, I. Livre de la Statique, prop. 19.) Derselbe that durch Gründe, obgleich dieselben indirekter Art waren, genügend und scharfsinnig dar, dass das Gewicht eines durch eine geneigte Ebene unterstützten Körpers zu der Kraft, welche parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkend den Körper im Gleichgewichte erhält, in demselben Verhältnisse steht wie die

Länge der schiefen Ebene zu ihrer Basis. Später kündigte er allgemein an, ohne indessen einen entsprechend ausgedehnten Beweis zu liefern, dass die Gleichgewichtsbedingung für drei beliebige an einem Körper (materiellen Punkte) angreifende Kräfte in der Proportionalität der Kräfte zu den Seiten eines Dreieckes besteht, zu welchen sie parallel sind. Der erste scharfsinnige Beweis von der Richtigkeit des Stevin'schen Satzes wurde von Roberval aus der Eigenschaft des Hebels abgeleitet. (Traîté de Mécanique, gedruckt im Jahre 1636 in der Harmonie Universelle de Mersenne, und in einem Werke von demselben, betitelt: Cogitata Physico-Mathematica, veröffentlicht 1644). Die Idee von einem Gleichgewichtsdreiecke ist jedoch in der That etwas früher dem Michael Varro in Genf vorgekommen, als er das Gleichgewicht von Kräften zu bestimmen suchte, die auf die Seiten eines rechtwinkeligen, dreiseitigen Keiles wirkten. (Tractatus de Motu, 1584) Es zeigte sich indessen nicht, dass Varro's Ansicht auf einer genauen Kenntnis des statischen Druckes beruhte. Das Prinzip des Parallelogrammes der Kräfte, welches in der That eine blosse Modifikation von Stevin's Theorem ist, wurde beinahe gleichzeitig aufgestellt von Newton (Principia, lex. i i i cor. 2, 1687) und Varignon (Project de la Nouvelle Mécanique, 1587), welch letzterer es aus der Betrachtung über die Zusammensetzung von Bewegungen abgeleitet hatte. In demselben Jahre wurde von Lami ein Theorem durch eine Schrift, betitelt „Nouvelle manière de démontrer les principaux Théorèms des élémens des Mécaniques" veröffentlicht, in welcher behauptet wird, dass — wenn Kräfte P, Q, R einen materiellen Punkt in Ruhe erhalten —

$$P : Q : R = \sin(Q, R) : \sin(R, P) : \sin(P, Q),$$

wo (Q, R), (P, R), (P, Q) die Winkel zwischen den Richtungen von Q und R, R und P, P und Q resp. bezeichnen. Das zufällige Zusammentreffen dieses Theoremes mit dem Prinzipe des Kräfteparallelogrammes zog Lami die Verdächtigung des Gelehrtendiebstahles zu, eine Verleumdung, die auf ihn von dem Verfasser der Histoire des Ouvrages des Savans (April 1688) geworfen wurde. Lami bekämpfte diese Anschuldigung in einem Briefe, veröffentlicht in dem Journal des Savans (Sept. 13, 1688), welchen der Journalist in dem darauf folgenden Dezember erwiderte; von da an scheint der Streit beigelegt. Der erste untadelhafte Beweis von der Richtigkeit des Kräfteparallelogrammes durch rein statische Prinzipien, ohne Einführung der Idee der Bewegung, wurde von Daniel Bernoulli gegeben (Comment. Petrop. Tom. I, p. 126, 1726). Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte wurde im Laufe der Zeit auf mannigfache Art bewiesen. Achtzehn Beweise sammelte und prüfte Jacobi (Whewell's Philosophy of the Inductive Sciences, Vol. I, p. 197), ihre Verfasser waren: Daniel Bernoulli, 1726; Lambert, 1771; Scarella, 1756; Venini, 1764; Araldi, 1806; Wachter, 1815; Köstner, Marini, Eytelwein, Salimbeni, Duchayla (Correspondance sur l'École Polytechnique, Tom. I, p. 83, anno 1805); Foncenex mit zwei verschiedenen Beweisen, 1760; D'Alembert, mit drei Beweisen; Laplace und Poisson.

Auf einen Körper, bestehend aus einem Systeme fest miteinander verbundener materieller Punkte, wirke ein beliebiges Kräftesystem. Nehmen wir im Raume irgend drei gerade Linien OA, OB, OC an, von denen nicht je zwei derselben zu einander parallel sind, zerlegen die einzelnen Kräfte des Systemes in parallelen Richtungen zu den angenommenen drei Geraden, sind A, B, C diese Componenten irgend einer der Kräfte, genommen positiv, wenn sie in den Richtungen OA, OB, OC wirken, negativ, wenn sie dieses in entgegengesetzten Richtungen thun, dann bezeichnen $\Sigma(A)$, $\Sigma(B)$, $\Sigma(C)$ die algebraischen Summen der gleichnamigen Componenten aller Kräfte des Systemes und es ist für das Gleichgewicht des Körpers nötig, dass wir haben

$$\Sigma(A) = 0, \qquad \Sigma(B) = 0, \qquad \Sigma(C) = 0. \qquad \text{(I)}$$

Ferner seien $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ irgend drei gerade Linien im Raume, von denen nicht je zwei zu einander parallel sind. Irgend eine Kraft des Systemes werde in ihre Componenten in senkrechter und paralleler Richtung zu $O'A'$ zerlegt. A' sei die Grösse der winkelrechten Componente, a' der senkrechte Abstand von $O'A'$ und der Richtung von A', dann wird das Produkt $A'.a'$ das Moment von A' um $O'A'$ genannt; die Summe aller solcher Momente aller Kräfte des Systemes wird bezeichnet sein durch $\Sigma(A'.a')$; diejenigen Momente, welche den Körper um $O'A'$ zu drehen pflegen in der einen Richtung, werden als positiv, diejenigen, welche ihn in entgegengesetzter Richtung zu drehen suchen, als negativ erachtet. Gleicherweise wird die algebraische Summe der Momente um $O'B'$, $O'C'$ bezeichnet sein mit $\Sigma(B'.b')$, $\Sigma(C'.c')$ resp. Für das Gleichgewicht des Körpers ist dann noch erforderlich, dass

$$\Sigma(A'.a') = 0, \qquad \Sigma(B'.b') = 0, \qquad \Sigma(C'.c') = 0. \qquad \text{(II)}$$

Die drei Gleichungen (I) zusammen mit den drei Gleichungen (II) sind allgemein ausreichend und allgemein nötig für das Gleichgewicht irgend eines Körpers. Es ist dabei zu bemerken, dass irgend eine der Linien $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ mit irgend einer der Linien OA, OB, OC zusammenfallen kann, was die Sache etwas vereinfacht.

Wenn die Richtungen aller Kräfte des Systemes in einer Ebene liegen, die Linien OB, OC, $O'B'$, $O'C'$ in dieser Ebene, die Linien OA, $O'A'$ senkrecht zu ihr angenommen werden, dann reduzieren sich die sechs Gleichungen für das Gleichgewicht auf die drei folgenden

$$\Sigma(B) = 0, \qquad \Sigma(C) = 0, \qquad \Sigma(A'.a') = 0, \qquad \text{(III)}$$

denn die drei anderen Gleichungen werden damit ebenfalls befriedigt.

Die Grundlage der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen beruht auf der Theorie der Zusammensetzung und der Zerlegung der Kräfte und der Theorie der Momente. Die letztere Theorie ist für den Fall, dass Gewichte rechtwinkelig zu den Armen eines geraden Hebels wirken, schon von Archimedes aufgestellt worden (*Ἀρχιμήδους Ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων τὸ Α Πρότ. στ. Ζ.*) Im Jahre 1499 wurde die Gleichgewichtsbedingung für einen Hebel, an welchem ein Gewicht und eine schief gerichtete Kraft wirkten, exakt dargethan durch den berühmten Maler Leonardo da Vinci (Venturi; Essai sur les Ouvrages Physico-Mathématiques de Léonard da Vinci, avec des Fragmens tirés de ses Manuscrits apportés d'Italie, Paris, 1797; quoted in Whewell's History of the Inductive Sciences, Vol. II, p. 122), dem daher die Theorie der schiefen Wirkung zugeschrieben werden muss, welche in einer späteren Zeit von Stevin bei Anwendung des Gleichgewichtes eines materiellen Punktes erforscht wurde. Der folgende elegante geometrische Satz, dessen Anwendung auf die allgemeine Theorie der Momente von dem Prinzip des Kräfteparallelogrammes abhängig ist, wurde von Varignon gegeben in seiner Nouvelle Mécanique, sect. I, lem, XVI: „Wenn wir von irgend einem Punkte in der Ebene eines Parallelogrammes Perpendikel auf die eine Diagonale und die zwei Seiten, welche diese Diagonale einschliessen, fällen, so ist das Produkt aus der Diagonale und ihrem Perpendikel gleich der Summe der Produkte der zwei Seiten und ihrer entsprechenden Perpendikel, wenn der Punkt ausserhalb, gleich dem Unterschiede, wenn der Punkt innerhalb des Parallelogrammes liegt". Die sechs Gleichungen für das Gleichgewicht eines unveränderlichen materiellen Systemes, welches von einem beliebigen Kräftesysteme angegriffen wird, stellte d'Alembert zuerst auf in dem zweiten Kapitel seiner Recherches sur la Précession des Equinoxes, veröffentlicht im Jahre 1749.

Wenn ein System von materiellen Körpern gegeben ist, verbunden durch Stäbe, oder in irgend einer anderen denkbaren Weise, so wird es zur Bestimmung der Um-

stände des Gleichgewichtes nötig sein, die unbekannten Wirkungen und Gegenwirkungen durch passende Symbole darzustellen. Wir werden dann die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Körper besonders anzuschreiben haben, aufgestellt zwischen den bekannten Kräften, welchen er unterworfen ist, und den unbekannten Wirkungen, welche er durch seine Verbindung mit den anderen Körpern des Systemes erfährt. Durch diese verschiedenen Reihen von Gleichungen werden wir, indem wir dieselben mit einander verknüpfen, die Umstände des Gleichgewichtes zu ermitteln haben

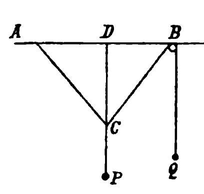
Erste Abteilung.

Gleichgewicht vollkommen oberflächenglatter, unveränderlicher, materieller Systeme.

Erster Abschnitt.

Gleichgewicht materieller Punkte.

1. Zwei materielle Punkte von den Gewichten P und Q (Fig. 155) sind an einem gewichtslosen, vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Faden befestigt. P ist in einem festen Punkte C des Fadens AB aufgehangen, das eine Fadenende trägt das Gewicht Q. Das andere Ende des Fadens ist in dem Punkte A befestigt und es läuft der Faden in der horizontalen Geraden durch A durch einen kleinen, glatten Ring B. Das Verhältnis zwischen P und Q soll so bestimmt werden, dass in der Gleichgewichtslage die Vertikale durch C die Strecke AB halbiert.



Figur 155.

Es sei $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD = \vartheta$, $T =$ der Spannung des Fadens in CA, $CA = b$, $AB = a$. Weil der Ring B vollkommen glatt, so ist die Spannung in $BC = Q$, welche an die Stelle des Gewichtes Q gesetzt werden kann. Nun sind die Componenten der Kräfte T, Q, P in zu AB senkrechter Richtung $T\cos\vartheta$, $Q\cos\vartheta$, P, in zu AB paralleler Richtung $T\sin\vartheta$, $Q\sin\vartheta$, 0, folglich haben wir die Gleichgewichtsbedingungen

$$(T + Q)\cos\vartheta - P = 0, \quad (T - Q)\sin\vartheta = 0,$$

womit sich ergiebt

$$2\,Q\cos\vartheta = P, \quad \text{oder} \quad \cos\vartheta = \frac{P}{2\,Q}. \tag{1}$$

Aber es besteht auch die geometrische Beziehung $b\sin\vartheta = \frac{1}{2}a$. so dass

$\cos\vartheta = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$, dadurch wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{b}.$$

Walton, p. 48.

2. Zwei Gewichte m_1 und m_2 sind in den Punkten O_1 und O_2 (Fig. 156) eines gewichtslosen Fadens $A_1 O_1 O_2 A_2$ befestigt, welcher an zwei Stifte A_1, A_2 in derselben horizontalen Linie geknüpft ist. Die Lage der Punkte O_1 und O_2 soll so bestimmt werden, dass im Gleichgewichtszustande ihre Abstände von der Geraden $A_1 A_2$ gleich gross sind.

Figur 156.

Ziehe $O_1 E_1$, $O_2 E_2$ vertikal, nimm $O_1 E_1 = O_2 E_2 = a$, $A_1 A_2 = b$, $c =$ der Länge des Fadens, $\sphericalangle A_1 O_1 E_1 = \vartheta_1$, $\sphericalangle A_2 O_2 E_2 = \vartheta_2$, $T =$ der Spannung des Fadenstückes $O_1 O_2$. Damit ist nach Lami's Prinzip für das Gleichgewicht in O_1 und dasjenige in O_2

$$\frac{T}{m_1} = \frac{\sin(\pi - \vartheta_1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta_1\right)} = tg\,\vartheta_1, \quad \frac{m_2}{T} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta_2\right)}{\sin(\pi - \vartheta_2)} = cotg\,\vartheta_2.$$

Diese zwei Gleichungen geben

$$m_1\, tg\,\vartheta_1 = m_2\, tg\,\vartheta_2. \tag{1}$$

Ferner ist durch die Geometrie

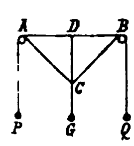
$$E_1 E_2 = A_1 A_2 - A_1 E_1 - A_2 E_2 = b - a\,(tg\,\vartheta_1 + tg\,\vartheta_2),$$
$$E_1 E_2 = O_1 O_2 = c - A_1 O_1 - A_2 O_2 = c - a\,(sec\,\vartheta_1 + sec\,\vartheta_2),$$

folglich ergiebt sich

$$a\,(sec\,\vartheta_1 - tg\,\vartheta_1 + sec\,\vartheta_2 - tg\,\vartheta_2) = c - b. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) müssen nun die Werte von ϑ_1 und ϑ_2 bestimmt werden, sodann werden, weil $O_1 E_1$ und $O_2 E_2$ gegeben sind, $A_1 O_1$ und $A_2 O_2$ bekannt sein.

Diarian Repository, p. 267. Walton, p. 49.



Figur 157.

3. Ein gewichtsloser Faden führt über zwei glatte Rollen AB, welche in derselben Horizontalen liegen (Fig. 157). An den Fadenenden sind die Gewichte P und Q befestigt, und zwischen AB trägt der Faden ein Gewicht G bei C. Welches sind die Gleichgewichtsbedingungen?

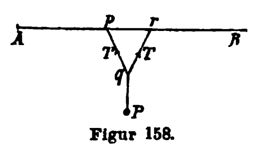
Es sei T die Spannung des Fadens, $\sphericalangle ACB = \vartheta$, $CD \perp AB$. Weil keine Nebenwiderstände vorhanden sind, muss offenbar sein $T = P = Q$, denn wenn a der Radius einer der Rollen ist, so haben wir $Ta = Pa = Qa$. Ferner ist die Bedingung

$$\frac{P}{\sin \sphericalangle BCG} = \frac{P}{\sin \sphericalangle ACG} = \frac{G}{\sin \sphericalangle ACB}, \text{ d. h. } \sphericalangle BCG = \sphericalangle ACG,$$

mithin

$$\frac{G}{P} = \frac{\sin \sphericalangle ACB}{\sin \sphericalangle ACG} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} = 2 \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

4. Ein gewichtsloser Faden ist in zwei Punkten A, B einer horizontalen Linie befestigt und läuft über eine Reihe von Stiften in der Linie AB (Fig. 158). Gleiche, gegebene Gewichte sind zwischen jeden zwei aufeinander folgenden Stiften angehangen, ebenso zwischen A, B und den Stiften nächst ihnen. Zu finden die Gleichgewichtslage und die Spannung des Fadens.



Figur 158.

Es seien p, r irgend zwei aufeinander folgende Stifte, pqr sei der entsprechende Fadenteil, P die Grösse eines jeden der Gewichte, $\sphericalangle pqr = \alpha$, $T =$ der Spannung des Fadens, $c =$ der Länge des Fadenstückes pqr, $l =$ der Länge des ganzen Fadens, $AB = a$.

Damit sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$2T\sin\alpha - P = 0, \quad (1) \qquad \overline{pr} = c\cos\alpha. \qquad (2)$$

Hiernach ist die Spannung T an jeder Stelle des Fadens dieselbe, mithin der Winkel α für jedes Dreieck wie pqr derselbe, folglich muss sein

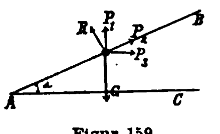
$$\Sigma(\overline{pr}) = \Sigma(c)\cos\alpha, \quad \text{oder} \quad a = l\cos\alpha. \qquad (3)$$

Nun ergiebt sich mit (1), (2), (3)

$$T = \frac{Pl}{2\sqrt{l^2 - a^2}}, \qquad c = \frac{l}{a}\overline{pr}.$$

Walton, p. 50.

5. Ein Gewicht G wird auf einer glatten geneigten Ebene AB (Fig. 159) von drei Kräften, jede gleich $\frac{1}{3}G$ gehalten; eine Kraft wirkt vertikal aufwärts, die andere entlang AB, die dritte parallel zur Basis AC. Welches ist die Horizontalneigung α von AB?



Figur 159.

Sind P_1, P_2, P_3 die in vertikaler, paralleler und horizontaler Richtung wirkenden Kräfte, ist R die Reaktion der geneigten Ebene, so ergeben sich durch Kräftezerlegung in paralleler und normaler Richtung zur Ebene die Gleichgewichtsbedingungen

$$P_1\sin\alpha + P_2 + P_3\cos\alpha - G\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$R + P_1\cos\alpha - P_3\sin\alpha - G\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

ferner ist
$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}G. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

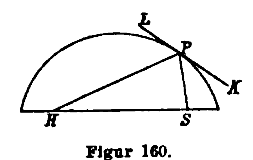
$$R = \frac{1}{3}G(4\cos\alpha - \sin\alpha). \qquad (4)$$

Mit (1) und (3) erhalten wir

$$1 + \cos\alpha = 2\sin\alpha, \quad \text{oder} \quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

folglich $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, d. i. $\alpha = 2\,arc\,(tg = 0{\cdot}5) = 53^0\,7'\,48''$. (5)

Weil jetzt α bekannt ist, so lässt sich leicht mit (4) die Reaktion R bestimmen.



Figur 160.

6. Ein materieller Punkt P liegt auf der Oberfläche eines glatten, flachen Sphäroides und wird gegen die Brennpunkte S, H (Fig. 160) mit Kräften angezogen, die proportional sind $\overline{SP}^m$ und $\overline{HP}^{m'}$. Welches ist die Ruhelage des Punktes?

Ziehe an das Sphäroid die Tangente LK zu dem Punkte P in der Ebene SHP; lasse sein μ, μ' die anziehenden Kräfte in der Einheit der Entfernung, $SP = r$, $HP = r'$, dann haben wir für das Gleichgewicht des Punktes P, indem wir die Kräfte in paralleler und senkrechter Richtung zu der Linie KPL zerlegen, $\mu\, r^m \cos \measuredangle\, SPK = \mu'\, r'^{m'} \cos \measuredangle\, HPL$. Weil aber hier $\measuredangle\, SPK = \measuredangle\, HPL$, so folgt $\mu\, r^m = \mu'\, r'^{m'}$. Bezeichnet $2a$ die grosse Axe des Sphäroides, dann ist $2a = r + r'$, so dass für r und r' die zwei Gleichungen bestehen

$$\mu\, r^m = \mu' (2a - r)^{m'}, \quad \mu (2a - r')^m = \mu'\, r'^{m'}.$$

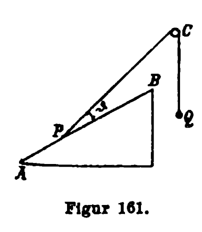
Walton, p. 49.

7. Auf einer geneigten Ebene befindet sich ein materieller Punkt von dem unbekannten Gewichte W. Zwei Kräfte P und Q, die erstere parallel zur Basis, die andere parallel zur Länge der geneigten Ebene gerichtet, sind mit W im Gleichgewichte. Welches ist das Gewicht des materiellen Punktes?

$$W = \frac{P \cdot Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

8. Ein Gewicht W ist durch eine geneigte Ebene unterstützt; an demselben wirken drei Kräfte, jede gleich P, eine vertikal aufwärts, die andere parallel zur Länge der geneigten Ebene und dieselbe hinauf, die dritte parallel zu ihrer Basis und in demselben Sinne wie die zweite. Welches ist die Horizontalneigung α der Ebene für den Gleichgewichtszustand?

$$\alpha = 2\,arc\left(tg = \frac{P}{W - P}\right).$$



Figur 161.

9. Zwei materielle Punkte von den Gewichten P und Q sind nacheinander durch einen feinen Faden verbunden, welcher über eine glatte Rolle C (Fig. 161) läuft. P ruht auf einer glatten geneigten Ebene AB und Q hängt frei. Die Gleichgewichtslage und den Druck auf die Ebene zu finden.

Es sei α die Horizontalneigung der Ebene, R ihre Reaktion, $\measuredangle\, CPB = \vartheta$, dann ist

$$\cos\vartheta = \frac{P \sin\alpha}{Q}, \quad R = P\cos\alpha - \sqrt{Q^2 - P^2 \sin^2\alpha}.$$

10. Ein materieller Punkt befindet sich in einer parabolischen Röhre mit vertikaler Axe. Der Punkt werde angegriffen von der Schwerkraft und einer Horizontalkraft, welch' letztere nach der Axe gerichtet und gleich μ mal dem Abstande des Punktes von der Axe ist. Die Ruhelage zu finden.

Hier wird nur dann Gleichgewicht sein, wenn der Parameter der Parabel gleich $\frac{2g}{\mu}$ ist, unter welcher Bedingung an jeder Stelle der Röhre eine Ruhelage sein wird.

7—10. Walton, p. 51.

11. Zwei Kräfte, welche sich verhalten wie $(1+n):1$, wobei n eine kleine Grösse ist, wirken auf einen materiellen Punkt ohne Gewicht und schneiden sich ihre Richtungen unter einem Winkel α. Zeige, dass der Sinus des Winkels, welchen die Richtung der Resultanten mit derjenigen der grösseren Kraft macht, nahezu gleich $\left(1-\frac{n}{2}\right) \sin\frac{\alpha}{2}$ ist.

12. Auf einer Parabel, in vertikaler Ebene, mit horizontaler Axe befinden sich zwei Gewichte, welche durch einen gewichtslosen Faden verbunden sind, der über eine glatte Rolle in dem Brennpunkte läuft. Welches ist die Ruhelage der Gewichte?

Die Gewichte müssen sich wie ihre Tiefen unter der Parabelaxe verhalten.

13. Zwei Gewichte P und Q hängen an den Enden eines Fadens über einer Parabel mit vertikaler Axe. In welcher Lage ist Gleichgewicht?

Bezeichnet $4p$ den Parameter, sind x_1, x_2 die Tiefen der Gewichte unter dem Scheitel, so ist

$$\frac{P^2}{x_2} - \frac{Q^2}{x_1} = \frac{Q^2 - P^2}{p}.$$

14. Zwei Gewichte P und Q hängen an den Enden eines Fadens über einen Kreis in einer vertikalen Ebene. Welches ist die Gleichgewichtslage?

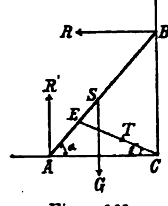
Ist α der von dem Faden umspannte Centriwinkel, sind φ, ψ die Vertikalneigungen der Halbmesser nach den Gewichten P und Q, so ist

$$tg\,\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{P-Q}{P+Q}\,tg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht eines einzelnen Körpers.

1. Ein gerader stabförmiger Körper AB (Fig. 162) stützt sich mit dem einen Ende gegen eine feste horizontale Ebene im Punkte A und dem anderen gegen eine feste vertikale Ebene im Punkte B. Die Vertikalebene durch die Stabaxe steht senkrecht auf beiden Stützebenen, sie schneidet die erstere in der Linie AC, die letztere in der Linie BC. Vom Punkte C führt eine gewichtslose Schnur nach dem Stabpunkte E. Zu finden die Spannung der Schnur, wenn E ein beliebiger Punkt des Stabes ist, die Reaktionen der Stützebenen.



Figur 162.

wenn das Gewicht G des Stabes in dessen Mittelpunkt angreifend gedacht wird.

Erste Lösung. Die Reaktionen der horizontalen und vertikalen Ebene auf den Stab in den Punkten A und B werden in den Richtungen AR' und BR wirken, welche bezw. parallel zu CB und CA, sie seien R' und R. Es sei T die Spannung der Schnur CE, S der Schwerpunkt des Stabes, in welchem sein Gewicht G vertikal abwärts wirkt. Wir haben mithin hier vier Kräfte, R, R', T, G, welche in den vier fest mit einander verbundenen Punkten B, A, E, S angreifen. Nun sei $\measuredangle ECA = \varepsilon$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $AS = BS = a$. Indem wir die Kräfte in parallelen Richtungen zu den Linien CA und CB zerlegen und Momente um den Punkt C nehmen, erhalten wir die Gleichgewichtsbedingungen

$$R - T\cos\varepsilon = 0, \quad (1) \qquad R' - G - T\sin\varepsilon = 0, \quad (2)$$

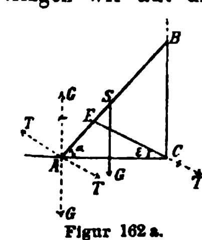
$$2R\sin\alpha + G\cos\alpha - 2R'\cos\alpha = 0. \quad (3)$$

Aus diesen Bedingungen folgt

$$T = \frac{G\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\varepsilon)}, \quad R = \frac{G\cos\varepsilon\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\varepsilon)}, \quad R' = G\left(1 + \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\varepsilon)}\right).$$

Wenn $\varepsilon = \alpha$, dann ist $T = \infty$, was zeigt, dass dann keine Spannung irgend welcher Grösse den Stab im Gleichgewichte erhalten kann. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle E mit S zusammenfällt, dass die Länge von CE hinreichend ist, ein kontinuierliches Sinken des Stabes zu gestatten. Wenn $\varepsilon > \alpha$, so wird T offenbar negativ sein, und weil die Schnur nur auf Zug beansprucht werden kann, so ist in diesem Falle Gleichgewicht unmöglich. Damit also Gleichgewicht vorhanden sein kann, muss α stets grösser als ε sein.

Zweite Lösung. (Fig. 162a.) Verlegen wir die Kräfte G, T parallel zu ihrer Richtung nach A, so entstehen zwei Kräftepaare. Diese Paare bringen wir auf die Breite $BC = 2a\sin\alpha$, verschieben dieselben so, dass die einen Kräfte der Paare in der horizontalen Ebene, die anderen in B senkrecht zur vertikalen Ebene wirken, dann ist der Schub in A in der Richtung CA gleich $\frac{G}{2}\cot g\,\alpha + T\sin\varepsilon\cot g\,\alpha$. Die Horizontalcomponente der in A parallel zu CE wirkenden Kraft ist $T\cos\varepsilon$, entgegengesetzt der Schubkraft daselbst thätig.



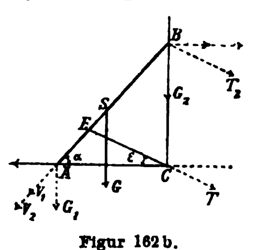
Figur 162a.

Für den Gleichgewichtszustand haben wir daher

$$T\cos\varepsilon = \frac{G}{2}\cot g\,\alpha + T\sin\varepsilon\cot g\,\alpha, \quad \text{d. i.} \quad T = \frac{G\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\varepsilon)}.$$

Die Reaktionen in den Punkten B und A ergeben sich nun mittelst der Bedingungen $R - T\cos\varepsilon = 0$ und $R' - G - T\sin\varepsilon = 0$.

Dritte Lösung. (Fig. 162b.) Wir zerlegen die Kräfte G und T in je zwei parallele Kräfte G_1, G_2, T_1, T_2, welche wir uns in A und B wirksam denken. Nun zerlegen wir die Componenten in B nach der Richtung des Stabes und der Normalen zur vertikalen Ebene, V_1, V_2 seien die in der Richtung BA wirkenden Componenten, ihren Angriffspunkt verlegen wir nach A. Hierauf zerlegen wir diese Componenten und die Componente T_1 von T in A in horizontaler und vertikaler Richtung. Nun ist mit $AE = c$ für das Gleichgewicht



Figur 162b.

$$G_1 + G_2 - G = 0,\quad T_1 + T_2 - T = 0,\quad G_1 a - G_2 a = 0,\quad T_1 c - T_2(2a - c) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$G_1 = G_2 = \frac{G}{2},\quad T_1 = T\frac{2a - c}{2a},\quad T_2 = T\frac{c}{2a}.$$

Ferner ist

$$V_1 = \frac{G_2}{\sin\alpha} = \frac{G}{2\sin\alpha},\quad V_2 = T_2\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha} = T\frac{c}{2a}\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha},$$

$$(V_1 + V_2)\cos\alpha = T_1\cos\varepsilon.$$

Mit diesen Werten erhalten wir

$$\frac{G}{2}\cos\alpha + T\frac{c}{a}\sin\varepsilon\cos\alpha - T\frac{2a - c}{2a}\cos\varepsilon\sin\alpha = 0,$$

und weil

$$\frac{c}{2a} = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\sin(\alpha + \varepsilon)},\qquad \frac{2a - c}{2a} = \frac{\cos\varepsilon\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varepsilon)},$$

$$\frac{G}{2}\cos\alpha = T\frac{(\sin\alpha\cos\varepsilon)^2 - (\cos\alpha\sin\varepsilon)^2}{\sin(\alpha + \varepsilon)},\quad \therefore T = \frac{G\cos\alpha}{2\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Die Reaktionen ergeben sich wieder wie vorhin.

Befindet sich der Schwerpunkt S des Stabes nicht in seiner Mitte, ist $AB = l$, $AS = a$, dann gestaltet sich die Lösung nach der Methode von Schell wie folgt.

Mit der Ebene ACB als Coordinatenebene, C als Ursprung, CA als Abscissen-, CB als Ordinatenaxe konstruieren wir, indem wir die Kräfte G, T, R, R' in parallelen Richtungen zu den Coordinatenaxen zerlegen und den Ursprung als Momentanpunkt wählen, die Componenten mit X, Y, die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte mit x, y bezeichnend, das Tableau

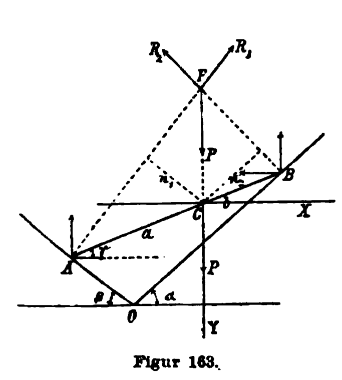
Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	0	$-G$	$(l-a)\cos\alpha$	$(l-a)\sin\alpha$	$-G(l-a)\cos\alpha$
T	$-T\cos\varepsilon$	$-T\sin\varepsilon$	0	0	0
R	R	0	0	$l\sin\alpha$	$-Rl\sin\alpha$
R'	0	R'	$l\cos\alpha$	0	$R'l\cos\alpha$

Hieraus folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$R - T\cos\varepsilon = 0, \qquad R' - G - T\sin\varepsilon = 0,$$
$$R' l\cos\alpha - R l\sin\alpha - G(l-a)\cos\alpha = 0,$$

mit welchen sich ergiebt

$$T = G\frac{a}{l}\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\varepsilon)}, \quad R = G\frac{a}{l}\frac{\cos\varepsilon\cos\alpha}{\sin(\alpha-\varepsilon)}, \quad R' = G\left(1 + \frac{a}{l}\frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\sin(\alpha-\varepsilon)}\right).$$



Figur 163.

2. Ein gerader stabförmiger Körper ohne Gewicht ruht mit seinen Enden auf zwei vollkommen glatten geneigten Ebenen. Eine durch den Stab AB (Fig. 163) gelegte vertikale Ebene schneidet die Durchschnittslinie dieser Ebenen rechtwinkelig. Die Horizontalneigungen der Ebenen sind α, β. In einem beliebigen Punkte C des Stabes wirkt eine Kraft P vertikal abwärts, seine Horizontalneigung sei γ. Welches sind die Gleichgewichtslage, die Reaktionen R_1 und R_2 in den Stützpunkten?

Es seien a und b die Entfernungen des Angriffspunktes C der Kraft P von den Endpunkten A und B des Stabes. Die Reaktionen R_1 und R_2 der Ebenen in den Punkten A und B wirken in senkrechter Richtung zu den Ebenen OA und OB in der vertikalen Ebene durch den Stab, ihre Richtungen schneiden sich in einem gewissen Punkte F. Wir wählen die Ebene der Kräfte P, R_1, R_2 als Coordinatenebene, C als Ursprung, die Abscissenaxe horizontal, positiv nach rechts, die Ordinatenaxe positiv vertikal abwärts. Damit ergiebt sich

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
P	0	P	0	0	0
R_1	$R_1\sin\beta$	$-R_1\cos\beta$	$-a\cos\gamma$	$-a\sin\gamma$	$R_1 a\cos\beta\cos\gamma + R_1 a\sin\beta\sin\gamma$
R_2	$-R_2\sin\alpha$	$-R_2\cos\alpha$	$b\cos\gamma$	$b\sin\gamma$	$-R_2 b\cos\alpha\cos\gamma + R_2 b\sin\alpha\sin\gamma,$

so dass die Gleichgewichtsbedingungen

$$R_1\sin\beta - R_2\sin\alpha = 0, \quad (1) \qquad P - R_1\cos\beta - R_2\cos\alpha = 0, \quad (2)$$
$$R_1 a\cos(\beta-\gamma) - R_2 b\cos(\alpha+\gamma) = 0. \quad (3)$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich

$$R_1 = P\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad (4) \qquad R_2 = P\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \quad (5)$$

Einen Ausdruck für die Horizontalneigung des Stabes können wir entweder durch Verknüpfung der Gleichungen (1) und (3) oder mit (3), (4), (5) erhalten, es ergiebt sich dadurch

$$tg\,\gamma = \frac{a\,cotg\,\beta - b\,cotg\,\alpha}{a+b}. \quad (6)$$

Handelt es sich nur um die Gleichgewichtslage, dann kann auch in folgender Weise zu Werke gegangen werden. Für das Gleichgewicht der drei Kräfte P, R_1, R_2 ist es nötig, dass sich ihre Richtungen in einem Punkte F schneiden. Der Abstand des Punktes B von CF ist $= b \cos\gamma = BF \, . \sin\alpha$, wodurch $BF = b\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$. Ferner geht aus dem Dreiecke AFB hervor, dass $BF{:}AB$ $= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) : \sin(\pi - \alpha - \beta)$, wodurch $BF = (a+b)\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)}$. Mit diesen zwei Werten von BF finden wir

$$tg\,\gamma = \frac{a \operatorname{cotg}\beta - b \operatorname{cotg}\alpha}{a+b}.$$

3. Ein gewichtsloser Stab von der Länge l ist auf einer horizontalen Ebene AC mit dem einen Ende A (Fig. 164) durch ein Charnier befestigt und stützt sich mit dem Ende B gegen eine vertikale Ebene BC so, dass die Vertikalebene durch ihn zu beiden Stützebenen normal ist. Im Schwerpunkte S des Stabes wirke dessen Gewicht G vertikal abwärts; es sei $AB = l$, $AS = a$, $\measuredangle BAC = \alpha$. Welches sind die Reaktionen R_1, R_2 in A, B? Welches ist der Horizontalschub H in A?

Figur 164.

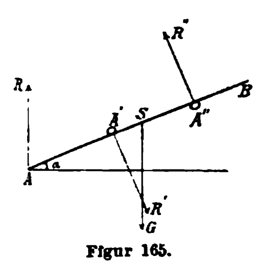
$$R_1 = G, \quad R_2 = G\frac{a}{l}\operatorname{cotg}\alpha = H.$$

Dieses Problem wurde zuerst und zwar in mangelhafter Gestalt in einem Werke von Stone vorgeschlagen. Der Verfasser verlangt die Lage des Stabes einem Maximalwerte von R entsprechend zu bestimmen. Bei einer Durchsicht von Stones Werk durch Johann Bernoulli (Opera, Tom. IV, p. 189) wurde erklärt, dass die von Stone gegebene Lösung fehlerhaft sei und es wurde von dem Rezensenten eine andere Lösung dargeboten. Bernoullis Lösung ist jedoch ebenfalls fehlerhaft. Couplet löste das Problem zuerst richtig. (Mémoires de l'Acad. de Paris, 1731, p. 69). Die Meinungen der Mathematiker und Architekten waren indessen viele Jahre hindurch geteilt wegen der Verdienste von Bernoulli und Couplet um dieses Problem. Bis herunter auf die letzten Jahre unserer Zeit sind über diesen Gegenstand zahlreiche Brochuren von verschiedenen Mathematikern mit vielfachen Schlussfolgerungen erschienen, mehrere von ihnen sind durch ihre Resultate in Widerspruch mit den Lösungen von Bernoulli und Couplet geraten. Der Leser, welcher sich angeregt fühlt, die verschiedenen Lösungen des Problemes zu prüfen, welches mehr durch die Irrungen der Gelehrten, als durch innere Schwierigkeit eine beträchtliche Berühmtheit erlangt hat, wird auf eine Schrift von Franchini in dem Memorie della Societa Italiana, Tom. XVI, parte I, p. 228, 1813 verwiesen.

Walton, p. 66.

4. Welches ist der Vertikaldruck und der Horizontalschub in A, wenn der Stab unter den vorigen Voraussetzungen sich in B gegen eine horizontale Linie lehnt, die senkrecht auf der Vertikalebene durch ihn steht?

$$R_1 = G\frac{l - a\cos^2\alpha}{l}, \quad H = \frac{1}{2}G\frac{a}{l}\sin 2\alpha.$$


Figur 165.

5. Ein vollkommen glatter Stab AB stützt sich gegen zwei ganz glatte Stangen, welche die vertikale Ebene durch den Stab rechtwinkelig an den Stellen A', A'' schneiden (Fig. 165). Der Stab geht unter der tieferen und über der höheren Stange hinweg, sein tieferer Endpunkt A berührt eine glatte horizontale Ebene. Zu bestimmen die Pressungen auf die Stangen und die Stützebene.

Die Pressungen auf die Stangen und die horizontale Ebene sind ihren Reaktionen auf den Stab gleich, aber von entgegengesetzten Richtungen. Die Reaktionen der Stangen auf den Stab sind zwei zu dem Stabe rechtwinkelige Kräfte R', R'', die Reaktion der Stützebene ist eine vertikale Kraft R. S sei der Schwerpunkt des Stabes, in welchem sein Gewicht G vertikal abwärts wirken möge. Wir haben demnach hier vier in einer vertikalen Ebene gelegene Kräfte R, R', R'', G, welche an den fest mit einander verbundenen Punkten A, A', A'', S angreifen und im Gleichgewichte sein sollen. Es sei $AS = a$, $A'A'' = b$, α die Horizontalneigung des Stabes.

Indem wir die Kräfte in paralleler und senkrechter Richtung zur Stabaxe zerlegen und Momente um den Punkt A nehmen, erhalten wir die Gleichgewichtsbedingungen

$$G \sin\alpha - R \sin\alpha = 0, \quad (1) \qquad R' + G\cos\alpha - R'' - R\cos\alpha = 0, \quad (2)$$

$$R''.AA'' - R'.AA' - G a \cos\alpha = 0. \quad (3).$$

Aus (1) und (2) folgt

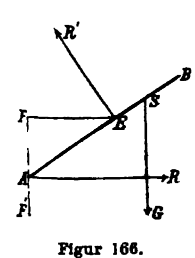
$$R = G, \qquad R' = R'',$$

so dass mit (3)

$$R'(AA'' - AA') = G a \cos\alpha, \qquad R' b = G a \cos\alpha,$$

$$R' = R'' = G\frac{a}{b}\cos\alpha.$$

Walton, p. 59.


Figur 166.

6. Ein starrer Stab stützt sich auf einen festen Punkt E, sein tieferes Ende A drückt gegen eine vertikale feste Linie FF' (Fig. 166). Die Gleichgewichtslage. die Pressungen in A und E zu finden.

Es sei S der Schwerpunkt des Stabes AB, in ihm wird sein Gewicht G vertikal abwärts wirkend gedacht, R die Reaktion der Vertikalen FF' auf den Stab, welche rechtwinkelig zu FF' sein wird, R' die Reaktion des festen Punktes E, welche senkrecht zu dem Stabe sein wird. Wähle die Gerade $EF \perp FF'$, $EF = c$, $AS = a$, $\sphericalangle AEF = \vartheta$.

Zerlegen wir die Kräfte in paralleler und senkrechter Richtung zur

Stabaxe und nehmen Momente um den Punkt E, dann erscheinen die Gleichgewichtsbedingungen

$$R\cos\vartheta = G\sin\vartheta, \quad (1) \qquad R' = G\cos\vartheta + R\sin\vartheta, \quad (2)$$

$$R.AE.\sin\vartheta = G.ES.\cos\vartheta = G(AS-AE)\cos\vartheta,$$

$$R\,c\sin\vartheta = G(a\cos^2\vartheta - c\cos\vartheta). \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt

$$Gc\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} = G(a\cos^2\vartheta - c\cos\vartheta), \quad c = a\cos^3\vartheta, \quad \cos\vartheta = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \quad (4)$$

womit die Lage des Stabes bestimmt ist.

Mit (1) und (4) finden wir

$$R = G\,tg\,\vartheta = G\frac{\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{\frac{c}{a}}} = G\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{c}},$$

womit der Druck auf die vertikale Linie gegeben ist.

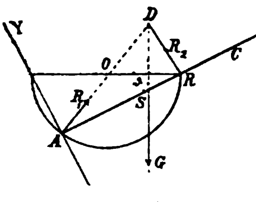
Endlich ist durch (1) und (2)

$$R' = G\cos\vartheta + G\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{G}{\cos\vartheta} = G\sqrt[3]{\frac{a}{c}},$$

womit der Druck auf den festen Punkt E bestimmt ist.

Wenn $c > a$ ist, so sehen wir aus (4), dass dann $\cos\vartheta > 1$ sein würde, was unmöglich ist. Es ist mithin nur dann Gleichgewicht möglich, wenn $c < a$ oder höchstens $c = a$ ist.

Fontana, Memorie della Societa Italiana, 1802, p. 626. Walton, p. 60.



Figur 167.

7. Ein unveränderlicher Stab ARC (Fig. 167) ist mit dem einen Ende A auf die innere Fläche einer festen hohlen Halbkugel mit horizontalem Rande gebracht, der Durchmesser der Schale ist kleiner als die Länge des Stabes und ist letzterer mit dem Rande der Höhlung in einem Punkte R in Berührung. Die Lage zu finden, in welcher der Stab ruhen wird und die Reaktionen in den Stützpunkten zu bestimmen.

Es sei O der Mittelpunkt der zur Schale gehörigen Kugel, S der Schwerpunkt des Stabes ARC, in welchem dessen ganzes Gewicht G vereinigt gedacht sei. Der Stab wird im Gleichgewichte gehalten durch den Widerstand der Schale im Punkte A nach der Richtung AO, durch ihren Widerstand in R nach der Richtung RD senkrecht zu AC und durch sein vertikal abwärts wirkendes Gewicht G. Wir setzen $AS = a$, $OA = OR = r$, $\measuredangle ORA = \vartheta$, die Reaktionen der Schale in den Punkten

A, R gleich R_1, R_2. Nun sei A der Ursprung der Coordinaten, AC Abscissen-, die zu ihr senkrechte Gerade AY Ordinatenaxe, dann ergiebt sich das Tableau

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	$-G\sin\vartheta$	$-G\cos\vartheta$	a	0	$-Ga\cos\vartheta$
R_1	$R_1\cos\vartheta$	$R_1\sin\vartheta$	0	0	0
R_2	0	R_2	$2r\cos\vartheta$	0	$2R_2 r\cos\vartheta$,

so dass die Gleichgewichtsbedingungen

$$R_1\cos\vartheta - G\sin\vartheta = 0, \quad (1) \qquad R_1\sin\vartheta + R_2 - G\cos\vartheta = 0, \quad (2)$$

$$2R_2 r\cos\vartheta - Ga\cos\vartheta = 0. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt

$$R_1 = G\,tg\,\vartheta, \quad (4) \qquad R_2 = G\frac{a}{2r}. \quad (5)$$

Nun erhalten wir mit (2), (4), (5)

$$\frac{a}{2r}\cos\vartheta + \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta = 0, \quad \text{oder} \quad 4r\cos^2\vartheta - a\cos\vartheta - 2r = 0,$$

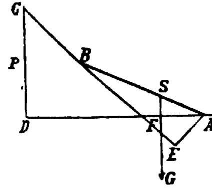
so dass

$$\cos\vartheta = \frac{1}{8r}(a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}). \quad (6)$$

Mit (4) und (6) lässt sich jetzt die Reaktion R_1 berechnen, die Reaktion R_2 ist von dem Winkel ϑ unabhängig. Ebenso können wir jetzt auch die Länge AR des in der Schale liegenden Stabstückes bestimmen, es ist $AR = 2r\cos\vartheta$.

Handelt es sich nur um die Gleichgewichtslage, dann kann dieselbe aus dem Umstande abgeleitet werden, dass in der Ruhelage die Richtungen der drei Kräfte G, R_1, R_2 in einem Punkte D sich schneiden müssen, was der Studierende thun mag.

8. Ein Ende A eines geraden stabförmigen Körpers (Fig. 168) ist mit einem festen Punkte durch ein Charnier verbunden, so dass er sich um denselben frei drehen kann. Sein anderes Ende B ist mittelst eines Fadens, welcher über eine glatte Rolle C in der vertikalen Ebene durch die Stabaxe läuft, an ein Gewicht P gefesselt. Welches ist die Gleichgewichtslage, die Spannung des Fadens und der Druck auf das Charnier?



Figur 168.

Es treffe die horizontale Gerade AD durch A die vertikale Gerade durch C im Punkte D. S sei der Schwerpunkt des Stabes, in ihm greife das Stabgewicht G vertikal abwärts wirkend an. AE sei senkrecht auf der Richtung von BC. Ferner sei $AS = a$, $BS = b$, $AD = k$, $CD = h$. $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\beta =$ der Horizontalneigung von CE.

Indem wir Momente um den Punkt A nehmen, ist

$$P.AE = G.AF, \quad \text{oder} \quad P(a+b)\sin(\beta - \alpha) = Ga\cos\alpha. \quad (1)$$

Ferner giebt die Geometrie

$$(a+b)\sin\alpha + BC.\sin\beta = h, \quad (a+b)\cos\alpha + BC.\cos\beta = k,$$

womit

$$(a+b)\sin(\alpha-\beta) = h\cos\beta - k\sin\beta. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) sind zur Bestimmung der Gleichgewichtslage genügend.

Bezeichnet T die Spannung des Fadens, so muss offenbar $T = P$ sein, daher mit (1) für eine beliebige Lage des Stabes AB

$$T = \frac{G\,a\cos\alpha}{(a+b)\sin(\beta-\alpha)}. \tag{3}$$

Sind X und Y die Componenten der Reaktion R im Punkte A in horizontaler und vertikaler Richtung, so haben wir

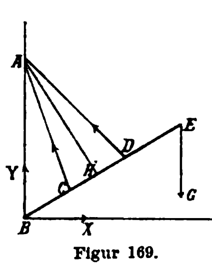
$$X - T\cos\beta = 0, \quad (4) \qquad Y + T\sin\beta - G = 0. \quad (5)$$

Nun folgt aus (4) und (3), sowie aus (5) und (3)

$$X = \frac{G\,a\cos\alpha\cos\beta}{(a+b)\sin(\beta-\alpha)}, \quad Y = G\left(1 - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{(a+b)\sin(\beta-\alpha)}\right),$$

und ist $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, womit die verlangten Grössen nun gegeben sind.

9. Ein Gewicht G hängt an dem Ende E eines unveränderlichen Stabes BE (Fig. 169), dessen Eigengewicht vernachlässigt werden soll. Der Stab ist mit dem festen Orte B durch ein glattes Charnier verbunden und wird durch eine Schnur CAD gehalten, welche durch einen glatten festen Ring A in der vertikalen Linie durch B läuft. Die Winkel ACD und ADC sind gleich, $\sphericalangle ABC = 60^0$, $DE = BC$. Welches ist die Richtung und Grösse des Druckes am Charnier?



Figur 169.

Es sei X die Horizontal-, Y die Vertikalcomponente des durch das Charnier auf den Stab ausgeübten Druckes, T die Spannung der Schnur. Die Resultante der Wirkung beider Schnurteile wird offenbar durch den Halbierungspunkt H von CD gehen, so dass $AH \perp BE$. Indem wir nun hier die Kräfte in paralleler und senkrechter Richtung zur Stabaxe zerlegen und Momente um den Punkt H nehmen, bekommen wir die Bedingungen

$$X\cos 30^0 + Y\cos 60^0 = G\cos 60^0, \quad G - Y = X\sqrt{3}, \tag{1}$$

$$(Y+G)\frac{1}{2}BE.\cos 30^0 = X\frac{1}{2}BE.\sin 30^0, \quad G + Y = X:\sqrt{3}. \tag{2}$$

Mit (1) und (2) finden wir

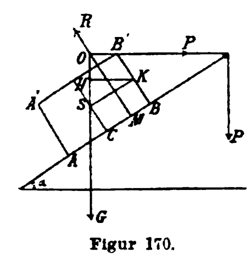
$$X = \frac{1}{2}\sqrt{3}.G, \qquad Y = -\frac{1}{2}G,$$

woraus folgt, wenn R der resultierende Druck und φ die Neigung seiner Richtung gegen AB,

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=G,\quad tg\,\varphi=\frac{X}{Y}=-\sqrt{3}=tg\frac{2\pi}{3},\quad \varphi=\frac{2}{3}\pi.$$

Walton, p. 62.

10. Ein Cylinder ruht mit seiner Grundfläche auf einer glatten geneigten Ebene. Am höchsten Punkte des Cylinders ist ein Faden befestigt, welcher über eine kleine glatte Rolle im höchsten Punkte der schiefen Ebene läuft und an seinem vertikal herabhängenden Endstücke ein Gewicht P trägt. Der Teil des Fadens zwischen Cylinder und Rolle ist horizontal. Welches ist die Gleichgewichtsbedingung?



Figur 170.

Es sei G das im Schwerpunkte S des Cylinders angreifende Cylindergewicht, R die Reaktion der geneigten Ebene auf die Basis des Cylinders, M der Basispunkt, durch welchen die Richtung von R geht (Fig. 170). Ziehe SK senkrecht zu BB', welche Linie die Vertikale durch S in H trifft. Nehme $a=$ dem Radius des Cylinders, $2h=$ seiner Höhe, $CM=x$.

Im Gleichgewichtszustande müssen die Richtungen der drei Kräfte P, G, R durch einen Punkt O gehen. Durch Zerlegung der Kräfte in paralleler und senkrechter Richtung zu der geneigten Ebene erhalten wir die Bedingungen

$$P\cos\alpha - G\sin\alpha = 0, \quad (1) \qquad R = P\sin\alpha + G\cos\alpha. \quad (2)$$

Ferner ist durch die Geometrie

$$SO=SH+OH=a\sin\alpha+h\cos\alpha,\quad x=SO.\sin\alpha=(a\sin\alpha+h\cos\alpha)\sin\alpha. \quad (3)$$

Nun sehen wir mit (3), weil x nicht grösser als a sein kann, dass

a nicht kleiner ist als $(a\sin\alpha+h\cos\alpha)\sin\alpha$,

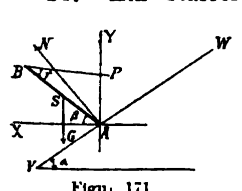
$a\cos^2\alpha$ „ „ „ „ $h\sin\alpha\cos\alpha$,

a „ „ „ „ $h\,tg\,\alpha$. (4)

Die Bedingungen (1) und (4) sind genügend und nötig für das Gleichgewicht. Durch (2) und (3) kennen wir R und x.

Walton, p. 63.

11. Ein starrer Stab AB (Fig. 171) stützt sich mit dem Endpunkte A gegen eine feste geneigte Ebene VW so, dass die Stabaxe und die Falllinie VW in einer vertikalen Ebene liegen. Die Horizontalneigung des Stabes ist β, diejenige der Ebene VW α. In dem Endpunkte B des Stabes wirkt eine Kraft P in der Richtung nach der Ebene, diese schliesst mit der



Figur 171.

Stabaxe den Winkel γ ein. In dem Schwerpunkte S des Stabes wirke dessen Gewicht G vertikal abwärts. Sämtliche Kräfte wirken in der vertikalen Ebene durch die Stabaxe. Welches sind die Gleichgewichtsbedingungen?

AB sei $= a$, $AS = b$, $N =$ der Reaktion der geneigten Ebene auf den Stab, welche senkrecht zu VW, in der vertikalen Ebene durch die Stabaxe, gerichtet ist. Wir wählen A als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die horizontale Gerade AX als Abscissen-, die vertikale Gerade AY als Ordinatenaxe, beide positiv nach der Buchstabenfolge. Damit erhalten wir

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	0	$-G$	$b\cos\beta$	$b\sin\beta$,	$-Gb\cos\beta$
P	$-P\cos(\beta-\gamma)$	$-P\sin(\beta-\gamma)$	$a\cos\beta$	$a\sin\beta$,	$-Pa\cos\beta\sin(\beta-\gamma)+Pa\sin\beta\cos(\beta-\gamma)$
N	$N\sin\alpha$	$N\cos\alpha$	0	0	0

womit sich ergiebt

$$N\sin\alpha - P\cos(\beta-\gamma) = 0, \quad (1) \qquad N\cos\alpha - P\sin(\beta-\gamma) - G = 0, \quad (2)$$

$$Pa\left\{\sin\beta\cos(\beta-\gamma) - \cos\beta\sin(\beta-\gamma)\right\} - Gb\cos\beta = 0. \quad (3)$$

Durch (3) erhalten wir

$$P = \frac{Gb\cos\beta}{a\sin\gamma}. \quad (4)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$N^2 = G^2 + P^2 + 2PG\sin(\beta-\gamma),$$

so dass mit (4)

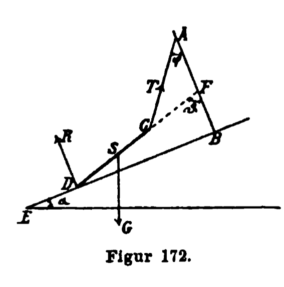
$$N = \frac{G}{a\sin\gamma}\left\{a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\beta + 2ab\cos\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Auch kann noch leicht gefunden werden

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{b\cos\beta\cos\gamma + a\sin\beta\sin\gamma}{(a-b)\sin\gamma\cos\beta}. \quad (6)$$

Wenn $\gamma = \beta$ ist, dann haben wir

$$P = G\frac{b}{a}\cot g\,\beta, \quad N = \frac{G}{a\sin\beta}\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}.$$



Figur 172.

12. Ein Stab CD stützt sich mit dem einen Ende D auf eine glatte Ebene BC mit der Horizontalneigung α (Fig. 172); sein anderes Ende C ist mittelst eines Fadens von gegebener Länge an einem festen Punkte A aufgehangen. Die Punkte A, C, D, und die Falllinie BE der Ebene liegen in einer vertikalen Ebene. Welches ist die Gleichgewichtslage?

Es sei $AB \perp BE$, S der Schwerpunkt des Stabes, in welchem sein

Gewicht G vertikal abwärts wirkt, $\sphericalangle CAB = \varphi$, $\sphericalangle BFD = \vartheta$, d. i. die Neigung von CD gegen AB, $AC = b$, $CS = a$, $AB = c$, $T =$ der Spannung des Fadens AC, $R =$ der Reaktion der Ebene im Punkte D in senkrechter Richtung zu BD.

Indem wir die Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegen und Momente um den Punkt S nehmen, erhalten wir die Bedingungen

$$R \sin\alpha - T \sin(\varphi - \alpha) = 0, \quad (1) \qquad R \cos\alpha + T \cos(\varphi - \alpha) - G = 0, \quad (2)$$

$$R \sin\vartheta - T \sin(\vartheta - \varphi) = 0. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) ergiebt sich

$$\sin\vartheta \sin(\varphi - \alpha) = \sin\alpha \sin(\vartheta - \varphi), \qquad 2 \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\vartheta + \operatorname{cotg}\alpha. \quad (4)$$

Projizieren wir AC auf DF, so ist

$$b \cos\varphi = c - 2a\cos\vartheta, \quad 2b\sin\varphi = (c - 2a\cos\vartheta)(\operatorname{cotg}\vartheta + \operatorname{cotg}\alpha) \text{ mit } (4),$$

folglich

$$4b^2 = (2b\cos\varphi)^2 + (2b\sin\varphi)^2, \; 4b^2 = (c - 2a\cos\vartheta)^2 \left\{4 + (\operatorname{cotg}\vartheta + \operatorname{cotg}\alpha)^2\right\}. (5)$$

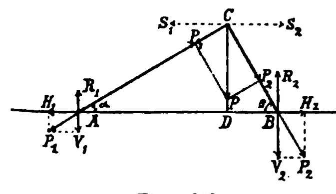
Aus dieser Gleichung muss ϑ abgeleitet werden und alsdann ist mittelst (4) der Wert von φ zu bestimmen.

Mit (1) und (2) bekommen wir noch

$$T = G\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}, \quad (6) \qquad R = G\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi}, \quad (7)$$

womit die Spannung und die Reaktion bestimmt werden können, wenn φ gegeben oder durch (4) berechnet worden ist.

13. Zwei gerade stabförmige Körper ohne Gewicht und von ungleicher Länge sind mit den einen Enden in C fest mit einander verbunden, ihre Axen liegen in einer vertikalen Ebene, ihre anderen Enden A, B ruhen auf einer horizontalen Ebene (Fig. 173). Die Stäbe besitzen die Horizontalneigungen α, β und im Punkte C wirkt eine Kraft P vertikal abwärts. Welches ist der in den Punkten A und B ausgeübte Vertikaldruck und Horizontalschub?



Figur 173.

Erste Lösung. Zerlegen wir die Kraft P nach der Richtung der Stäbe in die Componenten P_1 und P_2, verschieben die Angriffspunkte dieser Seitenkräfte nach A und B resp., zerlegen daselbst die Kräfte P_1 und P_2 in ihre Componenten nach horizontaler und vertikaler Richtung, dieselben mit H_1, H_2 und V_1, V_2 bezeichnend, dann ergiebt sich

$$P_1 = P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad P_2 = P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad H_1 = P_1\cos\alpha = P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$H_2 = P_2 \cos\beta = P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = H_1, \qquad V_1 = P_1 \sin\alpha = P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$V_2 = P_2 \sin\beta = P\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad V_1 + V_2 = P.$$

Zweite Lösung. Wir fällen von C eine Senkrechte CD auf AB und setzen $AD = c$, $BD = d$. Die Kraft P denken wir uns durch zwei parallele Kräfte V_1 und V_2 in den Punkten A und B ersetzt, so dass $V_1 + V_2 - P = 0$, $V_1 c - V_2 d = 0$. Aus diesen Gleichungen und mit Rücksicht darauf, dass $\frac{d}{c+d} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{c}{c+d} = \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, ergiebt sich

$$V_1 = P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad V_2 = P\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Um die Horizontalkräfte H_1 und H_2 zu bestimmen, bringen wir die Kräftepaare $+ V_1 c$ und $- V_2 d$ auf die gleiche Breite $a\sin\alpha = b\sin\beta$, $AC = a$, $BC = b$ setzend, wodurch die Kräfte gleich gross werden, verschieben die Paare so, dass zwei der Kräfte der Paare am Punkte C nach entgegengesetzten Richtungen wirken, welche die Wirkung Null hervorbringen, was ebenso mit den beiden anderen Kräften der Paare, die in den Punkten A und B angreifen, der Fall ist, welche den Horizontalschub nach beiden Seiten geben. Dadurch erhalten wir

$$H_1\, b\sin\beta = V_1 c = V_1 \frac{b\sin\beta}{tg\,\alpha}, \qquad H_1 = P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$H_2\, a\sin\alpha = V_2 d = V_2 \frac{a\sin\alpha}{tg\,\beta}, \qquad H_2 = P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = H_1.$$

Dritte Lösung. Mit den Reaktionen R_1 und R_2 der Stützebene, welche entgegengesetzt den Pressungen V_1 und V_2 wirken, erhalten wir, indem wir die Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung zerlegen und Momente um den Punkt A nehmen, die Gleichgewichtsbedingungen

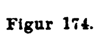
$$P - R_1 - R_2 = 0, \qquad H_1 - H_2 = 0, \qquad Pc - R_2(c+d) = 0,$$

woraus folgt

$$R_2 = P\frac{c}{c+d} = P\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad R_1 = P - R_2 = P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad H_1 = H_2.$$

Die Grösse des Horizontalschubs ist wieder wie vorhin zu bestimmen.

14. AB (Fig. 174) ist der Balken einer gleicharmigen Wage von der Länge $2a$, G sein Gewicht, Q das Gewicht einer Schale mit Zugehör, C der Drehpunkt des Balkens, unter der die Aufhängepunkte A und B der Schalen verbindenden Geraden gelegen, S der Schwerpunkt der Wage, D der Schnittpunkt der



Figur 174.

Linien AB und CS. An einer Seite werde ein Übergewicht P angebracht, wodurch der Balken aus seiner horizontalen Gleichgewichtslage in eine geneigte übergeht. Es soll der Winkel α bestimmt werden, welchen die neue Lage von AB mit der Horizontalen einschliesst.

Mit $CS = b$ und $CD = c$ ist

$$(P + Q)(a \cos \alpha - c \sin \alpha) - Q(a \cos \alpha + c \sin \alpha) - G b \sin \alpha = 0,$$

woraus folgt

$$tg\, \alpha = \frac{P a}{(2Q + P)c + G b}.$$

Dadurch lässt sich erkennen, dass bei kleinem Übergewichte P der Winkel α oder der Ausschlag der Wage um so grösser wird, je grösser die Armlänge, je kleiner das Gewicht der Wage und je kleiner der Abstand des Drehpunktes vom Punkte D gewählt wird. Mit $c = 0$ erhalten wir $tg\, \alpha = P a : G b$, was bei zum Gebrauche für chemische Zwecke geeigneten Wagen der Fall ist.

15. Ein ungleicharmiger, gerader Hebel AB (Fig. 175) mit dem Drehpunkte C, der Länge $AB = BC + CA = a + b$ hat ein Gewicht G_1, welches in der Entfernung s vom Drehpunkte angreift. In welcher Entfernung von C ist auf dem längeren Arme BC das Gewicht G anzubringen, damit es den Gewichten Q und V, welche in A aufgehangen sind, das Gleichgewicht hält, wenn V nach Wegnahme von Q und G die Wage im Gleichgewichte erhält?

Figur 175.

Ist x die Entfernung des Gewichtes G vom Drehpunkte C, dann haben wir die zwei Bedingungen

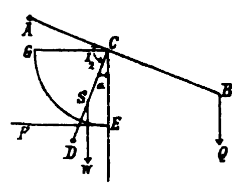
$$G_1 s - V b = 0, \qquad G x + G_1 s - (Q + V) b = 0,$$

woraus folgt

$$x = \frac{Q}{G} b.$$

Diese Gleichung findet Anwendung bei der römischen Schnellwage.

16. Ein ungleicharmiger Hebel AB (Fig. 176) hat seinen Drehpunkt in C. Bei A ist ein Gewicht von solcher Grösse angebracht, dass — da $AC < BC$ — der Schwerpunkt des Hebels mit dem Drehpunkte zusammenfällt. Auf AB steht in C ein Arm rechtwinkelig, welcher bei D ein konstantes Gewicht trägt. Das Gewicht dieses Armes mit der konstanten Belastung sei W und greife im Schwerpunkte S von CD an. In diesem Zustande ist der Hebel AB



Figur 176.

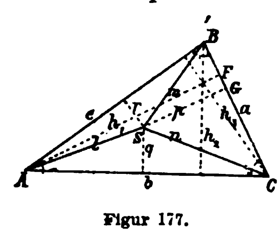
horizontal, wenn er sich in der Ruhelage befindet. Wie gross ist der Ausschlag des Armes CD, wenn im Punkte B ein Gewicht Q angebracht wird?

Es sei $BC = a$, $CS = b$, der Ausschlag $= \alpha$, d. i. der Winkel DCE, welchen der Arm CD in der neuen Gleichgewichtslage mit der Vertikalen CE einschliesst, dann muss sein

$$Q\,a \cos \alpha - W b \sin \alpha = 0, \qquad \text{so dass} \qquad tg\,\alpha = \frac{Q\,a}{W b}.$$

Demnach sind die trigonometrischen Tangenten der Ausschlagwinkel den in B angehängten Lasten direkt proportional, also auch die Strecken EF auf der durch E gelegten horizontalen Geraden proportional den Gewichten Q. Wird mit diesem Hebel ein Gradbogen CEG verbunden und dieser den erhaltenen Werten von $tg\,\alpha$ entsprechend geteilt, so haben wir die bekannte Briefwage oder Garnwage vor uns.

17. Auf einen in drei Punkten unterstützten Körper wirkt ein Druck P senkrecht zur Ebene der Stützpunkte. Wie verteilt sich dieser Druck auf die Stützpunkte?



Figur 177.

Sind D_1, D_2, D_3 die auf die Stützen A, B, C (Fig. 177) kommenden Pressungen, ist S der Angriffspunkt der Kraft P, sind h_1, h_2, h_3 die drei Höhen des Dreieckes ABC, p, q, r die von S auf die Dreiecksseiten gefällten Normalen, so erhalten wir die vier Gleichgewichtsbedingungen

$$D_1 + D_2 + D_3 - P = 0, \qquad P p - D_1 h_1 = 0, \qquad P q - D_2 h_2 = 0,$$
$$P r - D_3 h_3 = 0,$$

woraus folgt

$$D_1 = P \frac{p}{h_1}, \qquad D_2 = P \frac{q}{h_2}, \qquad D_3 = P \frac{r}{h_3}.$$

Wenn die vier Punkte A, B, C und S in einer geraden Linie liegen, dann nehmen die Ausdrücke für die Pressungen die Form $\frac{0}{0}$ an, es sind dann dieselben unbestimmt, denn in diesem Falle reichen die beiden Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht paralleler Kräfte nicht aus zur Ermittelung der drei unbekannten Pressungen, sie werden nur dann in diesem Falle einwertig, wenn noch eine Nebenbedingung gegeben ist.

Es seien nun a, b, c die Seiten BC, AC, AB des Dreieckes der Stützpunkte. Von seinen Ecken A, B, C ziehen wir nach dem Punkte S gerade Linien, setzen $AS = l$, $BS = m$, $CS = n$, $\sphericalangle BSC = \alpha$, $\sphericalangle CSA = \beta$, $\sphericalangle ASB = \gamma$, womit wir bekommen

$$D_1 = P\frac{p}{h_1} = P\frac{\frac{1}{2}ap}{\frac{1}{2}ah_1} = \frac{Pmn\sin\alpha}{mn\sin\alpha + ln\sin\beta + lm\sin\gamma},$$

$$D_2 = \frac{Pln\sin\beta}{mn\sin\alpha + ln\sin\beta + lm\sin\gamma},\; D_3 = \frac{Plm\sin\gamma}{mn\sin\alpha + ln\sin\beta + lm\sin\gamma}.$$

Liegt der Punkt S so, dass $\alpha = \beta = \gamma$, dann ist $\sin\gamma = -\sin 2\alpha$, und wir erhalten

$$D_1 = \frac{Pmn}{mn + ln - 2lm\cos\alpha},\qquad D_2 = \frac{Pln}{mn + ln - 2lm\cos\alpha},$$

$$D_3 = -\frac{2Pmn\cos\alpha}{mn + ln - 2lm\cos\alpha}.$$

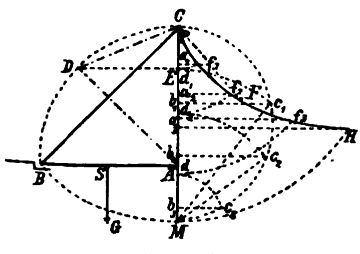
Befinden sich nun noch die vier Punkte A, B, C, S in einer geraden Linie, so ist $\alpha = 180^0$, $\cos\alpha = -1$, mithin

$$D_1 = \frac{Pmn}{mn + ln + 2lm},\; D_2 = \frac{Pln}{mn + ln + 2lm},\; D_3 = \frac{2Pmn}{mn + ln + 2lm}.$$

Aus den zuerst für die Pressungen D_1, D_2, D_3 aufgestellten Gleichungen geht hervor, dass sich der gegebene Druck und dessen Componente in einem der drei Stützpunkte umgekehrt verhalten wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Verbindungslinie der beiden anderen Stützpunkte. Befindet sich der Angriffspunkt S des Druckes P ausserhalb des Dreieckes der Stützpunkte, so erleiden die Eckpunkte des Raumes, in welchen S fällt, wenn wir die Dreiecksseiten beliebig verlängert denken, Pressungen im Sinne von P, die übrigen solche im entgegengesetzten Sinne.

13—17. Wernicke, Mechanik.

18. Eine Klappe AB (Fig. 178), die sich um eine horizontale Axe A drehen kann, wird in horizontaler Lage durch ein Gewicht P im Gleichgewichte erhalten. Mittelst eines Fadens ist das Gewicht P über eine glatte Rolle C, in der Vertikalen durch A, geführt, welche fest ist, und hängt vertikal herab. Die Bahn des Gewichtes P bei der Bewegung der Klappe soll so bestimmt werden, dass die Klappe und das Gewicht bei jeder Lage der ersteren im Gleichgewichte sind.



Figur 178.

Es sei G das Gewicht der Klappe, angreifend in deren Mitte, a ihre Länge, l die Länge des Seilstückes BC, für die horizontale Lage von AB falle P mit C zusammen, $AC = AB$. Befindet sich die Klappe in horizontaler Lage, so muss die Bedingung erfüllt sein

$$G\frac{a}{2} - Pa.\frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \text{woraus} \qquad P = \frac{1}{2}G\sqrt{2}.$$

Denken wir uns nun das Gewicht G in den Punkten A und B wirksam, dann kommt auf jeden dieser Punkte $\frac{G}{2}$. Für die in B und C wirksamen Kräfte ist dann, wenn λ den Abstand des Schwerpunktes der Kräfte $\frac{G}{2}$ und P von der Horizontalen durch C bezeichnet,

$$\lambda\left(P + \frac{1}{2}G\right) - P.0 - \frac{1}{2}Ga = 0, \quad \text{womit} \quad \lambda = \frac{\frac{1}{2}G}{P + \frac{1}{2}G}a.$$

Da nun hier neutrales Gleichgewicht vorhanden sein muss, so muss der Schwerpunkt des Systemes immer um die Strecke λ von der durch C gelegten Horizontalen entfernt sein. Für eine beliebige Lage AD der Klappe und C als Coordinatenursprung sei $CE = x_1$, $DE = y_1$, $Cb_1 = x_2$, $b_1F = y_2$, $CF = z$, wo F die entsprechende Lage des Gewichtes P ist. Damit bekommen wir die Beziehung

$$z = l - \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2} = l - \sqrt{2ax_1}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$\frac{1}{2}Gx_1 + Px_2 - \lambda\left(P + \frac{G}{2}\right) = 0, \text{ wodurch } x_1 = \frac{\lambda\left(P + \frac{1}{2}G\right) - Px_2}{\frac{1}{2}G},$$

und wenn der Wert von λ eingeführt wird

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2}aG - Px_2}{\frac{1}{2}G}.$$

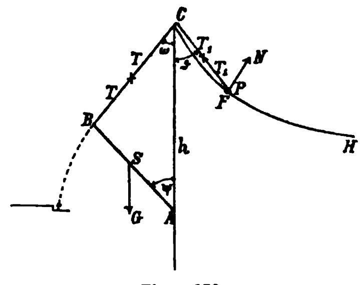
Aus dieser Gleichung ergiebt sich nun mit $z = l - \sqrt{2ax_1}$ und $P = \frac{1}{2}G\sqrt{2}$

$$z = l - \sqrt{l(l - 2x_2)}.$$

Dieses ist die Gleichung der Bahn des schweren Punktes P, womit sich dieselbe leicht konstruieren lässt. Mache (Fig. 178, S. 459) $CM = CB = l$, $Ca_1 = x_2$, $Ca_2 = x'_2$, $Ca_3 = x'_3, \ldots$, verzeichne über CM als Durchmesser einen Kreis, ziehe durch a_1, a_2, $a_3, \ldots$ parallele Linien zu AB, mache $Cb_1 = 2\,Ca_1$, $Cb_2 = 2\,Ca_2$, $Cb_3 = 2\,Ca_3, \ldots$, b_1c_1, b_2c_2, $b_3c_3, \ldots$ parallel zu AB und ziehe Mc_1, Mc_2, $Mc_3, \ldots$, so ist $Mc_1 = \sqrt{l(l - 2x_2)}$. Nun mache $Md_1 = Mc_1$, $Md_2 = Mc_2, \ldots$ so sind $Cd_1 = l - \sqrt{l(l - 2x_2)}$, Cd_2, $Cd_3, \ldots$ Werte von z und endlich ergeben sich mit $Cf_1 = Cd_1$,

$Cf_2 = Cd_2$, $Cf_3 = Cd_3, \ldots$ in $f_1, f_2, f_3, \ldots$ Punkte der verlangten Bahn CH.

Diese Betrachtung gilt nur für den speziellen Fall, dass $AC=AB$. Um die Aufgabe vollständig zu lösen, haben wir nicht nur die Höhe der Rolle beliebig anzunehmen, sondern auch noch die Spannung des Fadens und den Druck des Gewichtes P auf die Bahn zu bestimmen. Denken wir uns den Faden zwischen den Punkten B und C und zwischen den Punkten C und F bei einer beliebigen Lage der Klappe zerschnitten (Fig. 179), so müssen zwischen B und C an den Seilenden die Kräfte T und $-T$, zwischen C und F an den Seilenden die Kräfte T_1 und $-T_1$ angebracht gedacht werden, wenn das ganze System im Gleichgewichte sein soll, wo T und T_1 die Seilspannungen in den fraglichen Stücken bezeichnen. Alsdann zerfällt das ganze System in drei einfache Systeme, welche für sich im Gleichgewicht sein müssen. 1) Die Platte mit den Kräften G und T; 2) die Kräfte T und T_1 an dem festen Punkte C; 3) die Kräfte T_1 und P des auf der Curve beweglichen schweren Punktes. Für eine beliebige Lage der Klappe sei $\sphericalangle BAC = \psi$, $\sphericalangle ACB = \omega$, $\sphericalangle ACF = \vartheta$; ferner sei $BC = l - z$, also $CP = z$, $AC = h$, $AB = a$.



Figur 179.

Die Gleichgewichtsbestimmung für die einzelnen Systeme führt nun zu Folgendem:

Für die an der Klappe wirkenden Kräfte ist, da A Drehpunkt,

$$G\frac{a}{2}\sin\psi = T h \sin\omega, \qquad \text{oder} \qquad G\frac{a \sin\psi}{2 \sin\omega} = T h,$$

und weil $\quad \dfrac{\sin\psi}{\sin\omega} = \dfrac{l-z}{a}, \qquad G(l-z) = 2Th,$

$$T = \frac{G}{2}\frac{l-z}{a}. \tag{1}$$

Mit $\psi = \frac{\pi}{2}$, also $z=0$ ist $T = \frac{G}{2}\frac{l}{h}$, und wenn noch $h=a$, $T = \frac{G}{2}\sqrt{2}$.

Die an der Rolle vom Halbmesser r thätigen Kräfte sind T und T_1, so dass Bedingung

$$Tr = T_1 r = 0, \qquad \text{womit} \qquad T_1 = T. \tag{2}$$

Im Punkte F wirken drei Kräfte T, P und der Normalwiderstand N der verlangten Curve. Für diese Kräfte besteht die Beziehung

$$\frac{T}{\sin\widehat{PN}} = \frac{P}{\sin\widehat{NT}} = \frac{N}{\sin\widehat{PT}}. \tag{3}$$

Nehmen wir C als Pol des Coordinatensystemes, CA als Polaraxe und denken uns in F eine Tangente an die Curve gezogen, so ist $\sphericalangle \widehat{PN} = \frac{\pi}{2} + \widehat{PT}$, $\sin \widehat{PN} = \cos \widehat{PT} = \frac{d(z \cos \vartheta)}{ds}$, wo ds das Bogenelement der Curve CF bedeutet, $\sin \widehat{NT} = \frac{dz}{ds}$, $\sin \widehat{PT} = \sin \vartheta$, folglich geht die angeschriebene Gleichung (3) über in

$$\frac{T}{d(z \cos \vartheta)} = \frac{P}{dz} = \frac{N}{ds \sin \vartheta}. \tag{4}$$

Daraus ergiebt sich

$$T = P \frac{d(z \cos \vartheta)}{dz},$$

und, wenn wir diesen Wert von T in (1) substituieren,

$$(l - z) G dz - 2 h P d(z \cos \vartheta) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, indem $(l-z)dz = -d.\frac{1}{2}(l-z)^2$ ist.

$$G(l-z)^2 + 4 Phz \cos \vartheta - C = 0.$$

Soll die Curve durch den Punkt C gehen, so muss für denselben $z = 0$ und $\vartheta = 0$ sein, und wird dann $C = Gl^2$. Damit ist die Gleichung der gesuchten Curve in dem für z aufgelösten Zustande

$$z = 2\left(l - 2h \frac{P}{G} \cos \vartheta\right).$$

Mit $\cos \vartheta = \frac{x}{z}$ ist dieselbe aber auch

$$z = 2\left(l - 2h \frac{P}{G} \frac{x}{z}\right),$$

und wenn wir den Wert von $P = \frac{G}{2} \frac{l}{h}$, welcher sich aus (1) ergiebt, wenn wir $z = 0$ setzen, einführen, sowie die Gleichung für z auflösen

$$z = l - \sqrt{l(l - 2x)}, \tag{6}$$

welches die bereits oben auf anderem Wege erhaltene Gleichung ist.

Nun bleibt noch die Bestimmung des Normaldruckes N im Punkte F der Curve übrig. Dieser Druck ist nach (4)

$$N = T \sin \vartheta \frac{ds}{d(z \cos \vartheta)}.$$

Aus der Gleichung (5) folgt mit $P = \frac{G}{2} \frac{l}{h}$, $z = 2l(1 - \cos \vartheta)$, so dass

$$dz = 2l \sin \vartheta \, d\vartheta; \quad ds^2 = dz^2 + z^2 d\vartheta^2 = (2l \sin \vartheta)^2 d\vartheta^2 + 4l^2(1 - \cos \vartheta)^2 d\vartheta^2.$$

$$ds^2 = 4l^2 d\vartheta^2 (\sin^2 \vartheta + 1 - 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta) = 4l^2 d\vartheta^2 2(1 - \cos \vartheta);$$

$$ds = 4l\, d\vartheta \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}} = 4l \sin \frac{\vartheta}{2} d\vartheta.$$

Die Differentialgleichung der Curve giebt

$$d(z \cos \vartheta) = \frac{(l-z).G\,dz}{2hP} = \frac{l-z}{z}\,dz = 2(l-z)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Folglich ist

$$N = T\sin\vartheta \cdot \frac{4\,l\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{2(l-z)\sin\vartheta\, d\vartheta} = T\frac{2\,l}{l-z}\sin\frac{\vartheta}{2},$$

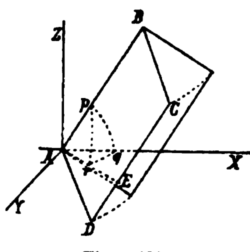
$$N = G\frac{l}{h}\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{G\,l}{h\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x}{z}}.$$

Die Seilspannung $T = \frac{G}{2}\frac{l-z}{h}$ ist ein Maximum, wenn $z = 0$, d. h. wenn das Gewicht P mit dem Punkte C zusammenfällt, also die Klappe geschlossen ist, sie ist dann gleich dem Gewichte P und der Normaldruck auf die Curve ist gleich Null. Mit $z = l$ wird T zu einem Minimum, nämlich Null, $x = \frac{1}{2}l$, also der Normaldruck $N = \frac{1}{2}G\frac{l}{h} = P$, ein Maximum, was dann der Fall sein kann, wenn $h = a$, gleich der Länge der Platte ist.

Dieses Problem wurde durch Sauveur dem Marquis de L'Hôpital vorgeschlagen. Von dem letzteren wurde eine Lösung veröffentlicht in Acta Erudit. 1695, Febr. p. 56. Über die Curve schrieb ebendaselbst (p. 59) Johann Bernoulli.

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

19. Eine schwere parallelopipedische Platte von der Länge $2\,l$, der Breite $2\,a$ und der Dicke $2\,d$ ist um eine unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigte Axe, welche mit der Kante $AB = 2\,l$ zusammenfällt, drehbar und befindet sich im Gleichgewichte, wenn sie mit der durch die Drehaxe gehenden vertikalen Ebene zusammenfällt. Wird die Platte um einen gegebenen Winkel aus ihrer Gleichgewichtslage herausgedreht, wie gross ist dann die erforderliche Kraft P, welche im Abstande b von der Drehaxe rechtwinkelig zu der grossen Seitenfläche der Platte wirken muss, damit Gleichgewicht vorhanden sei, wenn das Gewicht G der Platte angreifend gedacht wird in ihrem Schwerpunkte, der mit dem geometrischen Mittelpunkte der Platte zusammenfalle, und wie gross sind die in den Stützpunkten A und B der Drehaxe AB wirkenden Widerstände N_1 und N_2?



Figur 180.

Die erste Frage kann wie folgt beantwortet werden. Es sei (Fig. 180) AB die Drehaxe, $ABCD$ die Platte, AZ eine vertikale Linie durch A, AX rechtwinkelig zu AZ in der Ebene BAZ, E der Durchschnittspunkt der Linie CD mit der horizontalen Ebene durch A, AE die Verbindungslinie der Punkte A und E. Von A aus als Mittelpunkt beschreibe eine Kugel,

welche AB, AX, AE in den Punkten p, q, r schneidet und verbinde diese Punkte durch grösste Kreise der Kugel. Lasse sein $\sphericalangle BAZ = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta =$ der Neigung der Ebene der Platte zu der Ebene ZAX. Dann haben wir, weil der Winkel pqr des sphärischen Dreiecks pqr ein rechter Winkel ist, nach Napiers Regel

$$\cos prq = \sin qpr = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\beta = \cos\alpha \sin\beta,$$

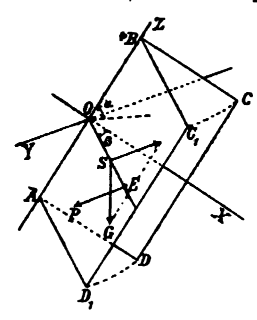
und es ist klar, dass wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von G mit der Ebene der Thür macht, $\sin\varphi = \cos prq$. Nun ist das Moment von G um AB gleich $Ga\sin\varphi = Ga\cos\alpha\sin\beta$ und das Moment von P um dieselbe Linie Pb, daher die Momentengleichung

$$Pb = Ga\cos\alpha\sin\beta, \quad \text{woraus} \quad P = G\frac{a}{b}\cos\alpha\sin\beta.$$

Die Lösung kann aber auch in anderer Weise bewirkt werden. Die Componente von G in der Ebene ZAX rechtwinkelig zu AB ist gleich $G\sin\beta$, die Componente von $G\sin\beta$ rechtwinkelig zur Platte ist $G\sin\beta\cos\alpha$, folglich ist das Moment von G um AB gleich $Ga\cos\alpha\sin\beta$ und daher

$$Pb = Ga\cos\alpha\sin\beta.$$

Die vollständige Lösung der Aufgabe kann so durchgeführt werden. Es sei (Fig. 181) $ABCD$ die Lage der Platte in der vertikalen Ebene durch die Drehaxe, der Mittelpunkt O der Drehaxe Coordinatenursprung, $OX \perp AB$ in der Ebene $ABCD$ Axe der x, OY senkrecht zur Ebene $ABCD$ Axe der y und AB Axe der z, ABC_1D_1 die um den Winkel β gedrehte Platte, S ihr Schwerpunkt, in welchem das Gewicht G vertikal abwärts wirkt, E Angriffspunkt der Kraft P mit $EO = b$. Mit AB als Momentenaxe ergiebt sich nun für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen folgende Tabelle, wenn X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 die Componenten der Widerstände N_1 und N_2 bezeichnen,



Figur 181.

Kräfte	X	Y	Z	x	y	z
G	$G\cos\alpha$	0	$-G\sin\alpha$	$a\cos\beta$	$a\sin\beta$	0
P	$-P\sin\beta$	$P\cos\beta$	0	$b\cos\beta$	$b\sin\beta$	0
N_1	X_1	Y_1	Z_1	0	0	l
N_2	X_2	Y_2	Z_2	0	0	$-l$

Kräfte	$yZ - zY$	$zX - xZ$	$xY - yX$
G	$-Ga\sin\alpha\sin\beta$	$+Ga\sin\alpha\sin\beta$	$-Ga\cos\alpha\sin\beta$
P	0	0	$Pb(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$
N_1	$-lY_1$	$+lX_1$	0
N_2	$+lY_2$	$-lX_2$	0

womit wir erhalten

$$G\cos\alpha - P\sin\beta + X_1 + X_2 = 0, \quad (1) \qquad P\cos\beta + Y_1 + Y_2 = 0, \quad (2)$$
$$-G\sin\alpha + Z_1 + Z_2 = 0, \quad (3) \qquad -Ga\sin\alpha\sin\beta - l(Y_1 - Y_2) = 0, \quad (4)$$
$$Ga\sin\alpha\cos\beta + l(X_1 - X_2) = 0, \quad (5) \qquad -Ga\cos\alpha\sin\beta + Pb = 0. \quad (6)$$

Die Gleichung (6) giebt uns nun sofort

$$P = G\frac{a}{b}\cos\alpha\sin\beta. \tag{7}$$

Mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird $P = 0$ für jeden Wert von β, d. h. bei einer offen stehenden Platte (Thür) mit vertikaler Axe. Mit $\beta = \frac{\pi}{2}$ wird P ein Maximum $= G\frac{a}{b}\cos\alpha$, mit $\beta = 0$ oder π ein Minimum, gleich Null. Mit $\alpha = 0$ ist die Drehaxe horizontal, P wird für $\beta = \frac{\pi}{2}$ dann ein Maximum, d. i. für eine Fallthür mit horizontaler Axe.

Durch die übrigen fünf Gleichungen bekommen wir

$$X_1 = \frac{1}{2}G\left\{\left(\frac{a}{b}\sin^2\beta - 1\right)\cos\alpha - \frac{a}{l}\sin\alpha\cos\beta\right\},$$
$$X_2 = \frac{1}{2}G\left\{\left(\frac{a}{b}\sin^2\beta - 1\right)\cos\alpha + \frac{a}{l}\sin\alpha\cos\beta\right\},$$
$$Y_1 = -\frac{1}{2}G\left\{\frac{a}{b}\cos\alpha\cos\beta - \frac{a}{l}\sin\alpha\right\}\sin\beta,$$
$$Y_2 = -\frac{1}{2}G\left\{\frac{a}{b}\cos\alpha\cos\beta + \frac{a}{l}\sin\alpha\right\}\sin\beta,$$
$$Z_1 + Z_2 = G\sin\alpha.$$

Die Componenten Z_1 und Z_2 können nicht getrennt werden, weil sie längs derselben Geraden wirken. Mit $\beta = 0$ sind die Gleichungen für die Componenten der Widerstände

$$X_1 = -\frac{1}{2}G\left\{\cos\alpha + \frac{a}{l}\sin\alpha\right\}, \quad X_2 = \frac{1}{2}G\left\{\frac{a}{l}\sin\alpha - \cos\alpha\right\},$$
$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Z_1 + Z_2 = G\sin\alpha.$$

Ist ferner $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$ oder $\beta = \beta$, wofür $P = 0$, dann haben wir

$$X_1 = -\frac{1}{2}G\frac{a}{l}, \quad X_2 = \frac{1}{2}G\frac{a}{l}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Z_1 + Z_2 = G,$$

so dass bei einer vertikalen Thür an dem oberen Kloben eine Kraft X_1 nach innen, an dem unteren eine solche nach aussen zu wirken hat, wenn Gleichgewicht stattfinden soll.

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

20. Ein homogener Stab von gleichmässiger Dicke ruht mit seinem unteren Ende auf einer glatten horizontalen Ebene und stützt sich mit seinem oberen Ende

gegen eine glatte, unter einem Winkel von 60° gegen den Horizont geneigte ebene Fläche; der Stab macht mit dem Horizonte einen Winkel von 30°, die durch ihn gelegte Vertikalebene steht senkrecht auf der Schnittlinie beider Stützflächen, das Gewicht G des Stabes greift in seinem Mittelpunkte an. Wie gross ist die Kraft P, welche am Fusse des Stabes horizontal wirken muss, um sein Gleiten zu verhindern?

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,G.$$

21. Eine Kugel stützt sich auf zwei geneigte Ebenen, den Druck zu finden, welchen jede erfährt.

Sind R_1 und R_2 diese Pressungen, α_1, α_2 die Neigungswinkel der Ebenen gegen den Horizont und ist G das Gewicht der Kugel, so erhalten wir

$$R_1 = G\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad R_2 = G\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Leibnitz, Opera, Tom. III, p. 176.

22. Eine Kugel wird durch den Rand einer kreisförmigen Höhlung in dem Fussboden unterstützt, ihr Gewicht greife in dem Kugelmittelpunkte an. Den Halbmesser der Kugel zu finden, wenn der ganze Druck auf den Rand ein Minimum ist.

Wenn a der Durchmesser der Höhlung, dann ist der verlangte Halbmesser der Kugel gleich $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

23. Eine Kugel mit dem Mittelpunkte C wird auf einer geneigten Ebene AB durch einen gewichtslosen, horizontalen Faden BC gehalten; ihr Gewicht greife in ihrem Mittelpunkte C an. Die Spannung von BC zu finden.

Wenn G das Gewicht der Kugel und α der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont ist, so ist die Spannung T des Fadens gegeben durch

$$T = G\,tg\,\alpha.$$

24. Ein gegebenes Gewicht P wird durch den Rand einer homogenen hohlen Halbkugel unterstützt, welche auf eine horizontale Ebene gestellt ist. Welches ist die Ruhelage der Schale?

Wenn G das Gewicht der Schale, r der Halbmesser der Kugel, c der Abstand ihres Schwerpunktes von ihrem Centrum ist, und ϑ die Neigung der Axe der Schale gegen die Vertikale bezeichnet, so ist

$$tg\,\vartheta = \frac{Pr}{Gc}.$$

25. Ein starrer, gewichtsloser Stab geht durch zwei feste, glatte Ringe, durch eine Kraft P wird er in der Richtung seiner Länge gegen eine Ebene getrieben, mit welcher er den Winkel α einschliesst. Welches ist der Druck N auf die Ebene?

$$N = P\,cosec\,\alpha.$$

26. Ein Ende eines Stabes vom Gewichte G ist auf eine glatte horizontale Ebene gebracht, das andere Ende, an welchem ein Faden befestigt ist, stützt sich gegen eine glatte, unter dem Winkel α zum Horizont geneigte Ebene. Der Faden läuft über eine glatte Rolle in dem Gipfel der geneigten Ebene und hängt, ein Gewicht P tragend, vertikal abwärts. Welches ist die Gleichung für die Gleichgewichtslage?

Wenn a die Länge des Stabes, b die Entfernung seines Schwerpunktes von seinem tieferen Ende ist, so wird die Gleichgewichtslage durch die Gleichung ausgedrückt

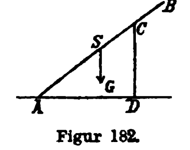
$$Pa = Gb\sin\alpha.$$

27. Zu finden die Gleichgewichtslage eines homogenen Stabes, dessen eines Ende sich gegen eine vertikale Ebene, dessen anderes sich gegen die innere Fläche einer halben Hohlkugel stützt.

Es sei r der Halbmesser der Kugelschale, c der Abstand ihres Mittelpunktes von der vertikalen Ebene, $2a$ die Länge des Stabes, a der Abstand des Angriffspunktes seines Gewichtes von jedem der Stabenden, ϑ die Neigung des Stabes gegen den Horizont und φ diejenige vom Halbmesser des Punktes, wo der Stab gegen die Halbkugel drückt, alsdann hängt die Gleichgewichtslage von den Gleichungen ab:

$$tg\,\varphi = 2\,tg\,\vartheta, \qquad 2a\cos\vartheta = r\cos\varphi + c.$$

28. Ein Stab AB (Fig. 182) lehnt sich gegen einen glatten vertikalen Pfahl CD. Das Ende A sei durch einen Faden AD, welcher bei D befestigt ist, verhindert die Horizontale AD entlang zu gleiten. Die Spannung des Fadens zu finden.



Figur 182.

Es sei S der Schwerpunkt des Stabes, $AS = a$, $CD = b$, $AD = c$, G das Gewicht des Stabes, in S wirksam, T die gesuchte Spannung, dann ist

$$T = \frac{abc}{\sqrt{(b^2+c^2)^3}}\,G.$$

29. Ein gerader stabförmiger Körper AB (Fig. 166, S. 449) stützt sich auf einen festen Punkt E, sein tieferes Ende A drückt gegen eine vertikale Wand FF'. In dem Ende B des Stabes ist ein Gewicht P angehangen. Die Gleichgewichtslage zu finden.

Es sei $G =$ dem Gewichte des Stabes, wirksam im Punkte S, $b =$ der Entfernung des Punktes E von der Linie FF', $AE = x$, $a =$ der Länge des Stabes, $AS = \frac{a}{2}$, dann ist

$$x = \sqrt[3]{ab^2\frac{P+\frac{1}{2}G}{P+G}}.$$

Fontana, Memorie della Societa Italiana, 1802, p. 630.

Wenn wir $G = 0$ nehmen, so haben wir $x = \sqrt[3]{ab^2}$ bei jeder Grösse von P. Dieses Problem ist von Euler besprochen worden bei der Erklärung des Prinzipes der Ruhe von Maupertuis.

Acad. des Sciences de Berlin, Tom. VII, p. 196.

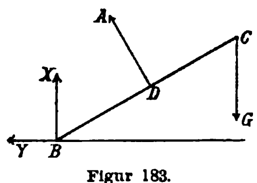
30. Ein Stab stütze sich mit einem Ende gegen eine glatte vertikale Ebene, sein anderes Ende sei durch eine Schnur getragen, welche an einen festen Punkt der Ebene gefesselt ist. Zu bestimmen die Lage des Stabes, seinen Druck auf die Ebene und die Spannung der Schnur.

Lasse sein b die Länge, T die Spannung der Schnur, $2a$ die Länge des Stabes, G sein in seinem Mittelpunkte angreifendes Gewicht, R seinen Druck auf die vertikale Ebene, φ, ϑ die Neigungen des Stabes und der Schnur gegen die Vertikale, dann ist

$$\sin\vartheta = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{16a^2-b^2}{3}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{16a^2-b^2}{3}},$$

$$T = \frac{G}{2}\,b\sqrt{\frac{3}{b^2-4a^2}}, \qquad R = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{16a^2-b^2}{b^2-4a^2}}.$$

31. Ein Gewicht G hängt von einem Stabe BC herab, welcher einen Stützpunkt bei B hat (Fig. 183), er ist durch eine Schnur AD gehalten, welche rechtwinkelig zu dem Stabe läuft. D ist der Mittelpunkt von BC. Zu bestimmen die Grösse und Richtung des Druckes auf den Stützpunkt, wenn der Stab gewichtslos und unter einem Winkel von 30^0 gegen den Horizont geneigt ist.



Figur 183.

Lasse sein $BD = CD = a$, X, Y die vertikale und horizontale Componente des durch den Stab auf den Stützpunkt ausgeübten Druckes, dann ist $X = \frac{1}{2} G$, $\quad Y = \frac{1}{2} G \sqrt{3}$,

und wenn φ die Neigung des resultierenden Druckes R zu der Vertikalen bezeichnet

$$R = G, \qquad \varphi = \frac{1}{3}\pi.$$

32. Ein homogener, starrer Stab AB (Fig. 184) ist in einer vertikalen Ebene um ein Charnier A beweglich und lehnt sich gegen eine auf derselben Ebene befestigte Stütze CD. Die normale Anstrengung der Stütze zu bestimmen.

Es sei $AB = 2a$, $CD = b$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACD = \beta$, G das in der Mitte von AB wirkende Gewicht des Stabes. Damit ist die Componente des Druckes von AB auf CD rechtwinkelig zu CD, welche die normale Anstrengung der Stütze ist, gleich

Figur 184.

$$\frac{1}{2} G a \frac{\sin 2\alpha \cos(\alpha + \beta)}{b \sin \beta}.$$

33. Ein gleichförmiger Stab ist an einem festen Punkte durch zwei Schnüre von ungleicher Länge mit seinen beiden Enden aufgehangen. Zu vergleichen die Spannung einer jeden Schnur mit dem Gewichte G des Stabes, wenn dasselbe in dessen Mittelpunkt vertikal abwärts wirkend gedacht wird.

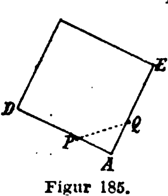
Es mögen a, b die Längen der Schnüre, P, Q ihre Spannungen resp. vorstellen, c mag die Länge des Stabes sein, dann ist

$$\frac{P}{G} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}, \quad \frac{Q}{G} = \frac{b}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}},$$

34. Ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck stützt sich in einer vertikalen Ebene mit dem rechten Winkel abwärts auf zwei horizontale Stifte, welche in derselben horizontalen Ebene liegen und deren Entfernung von einander gleich a ist. Die Gleichgewichtslage zu finden.

Es sei h = dem Perpendikel vom rechten Winkel auf die Basis, ϑ = der Neigung der Basis zum Horizont, dann ist $\vartheta = 0$, oder $\vartheta = arc\left(\cos = \frac{h}{3a}\right)$.

35. Eine quadratische Platte DE (Fig. 185) wird in vertikaler Lage von zwei festen Punkten P und Q getragen, welche nicht in einer horizontalen Linie liegen und von einander um eine Strecke entfernt sind, die gleich der halben Seite des Quadrates ist. Zu finden die Gleichgewichtslage.



Figur 185.

Wenn α die Neigung von PQ, ϑ von AE zum Horizont, dann sind die Gleichgewichtslagen durch die Gleichungen gegeben

$$\sin^2(2\vartheta + \alpha) = \sin 2\vartheta.$$

36. Ein gleichförmiger Stab von gegebener Länge stützt sich gegen einen Stift in dem Brennpunkte einer Parabel mit vertikaler Axe und dem Scheitel als tiefsten Punkt; der untere Endpunkt des Stabes fällt mit der Curve zusammen. Den Winkel zu bestimmen, welchen der Stab mit der Axe der Parabel macht, wenn sein Gewicht in der Mitte desselben angreift.

Wenn a die Länge des Stabes und $4p$ den Parameter der Parabel bezeichnet, so ist der verlangte Winkel $= 2\, arc \left(\cos = \sqrt[4]{\frac{p}{a}}\right)$.

37. Ein gleichförmiger, starrer Stab von der Länge a kann sich in einer horizontalen Ebene um seinen Mittelpunkt drehen. An das eine seiner Enden ist eine Schnur geknüpft, welche über eine feste glatte Rolle, vertikal über diesem Ende, in einem Abstande b von ihm, läuft, und ein gegebenes Gewicht trägt. Der Stab wird hierauf durch einen Winkel ϑ gedreht und bleibt in dieser Lage vermöge einer horizontalen Kraft P, senkrecht zu dem Stabe an seinem anderen Ende, in Ruhe. Zu finden den Wert von ϑ, wenn P ein Maximum ist.

Der verlangte Wert von ϑ wird durch die Gleichung erhalten

$$tg^4 \frac{\vartheta}{2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

20—37. Walton, p. 66—73.

38. Ein gleichschenkeliges Dreieck in einer vertikalen Ebene stützt sich mit den Endpunkten der Grundlinie auf zwei schiefe Ebenen, die unter sich und zur Ebene des Dreiecks rechtwinkelig sind. Welches ist die Gleichgewichtslage?

Es sei $2a$ die Basis, h die Höhe des Dreiecks, α die Horizontalneigung der einen Ebene, ϑ die verlangte der Basis, so findet sich

$$tg\, \vartheta = \frac{a \cos 2\alpha}{a \sin 2\alpha + \frac{1}{3} h}.$$

39. Zwei Ecken eines Quadrates in senkrechter Ebene stützen sich auf zwei schiefe Ebenen. Die Gleichgewichtslage zu bestimmen.

Sind α_1, α_2 die Neigungswinkel der Ebenen gegen den Horizont, ist ϑ die Horizontalneigung der aufliegenden Seite, dann ist

$$tg\, \vartheta = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}.$$

40. Ein schwerer Körper liegt auf einer schiefen Ebene; ein an ihm befestigter Faden geht über eine glatte Rolle und trägt am anderen Ende ein gegebenes Gewicht Q. Bestimme den Druck auf die Ebene und die Gleichgewichtslage.

Es sei α die Neigung der Ebene gegen den Horizont, ϑ die Neigung des von dem Körper ausgehenden Fadenteiles zu der Falllinie der Ebene, G das Körpergewicht, dann ist

$$R = G \cos \alpha - \sqrt{Q^2 - G^2 \sin^2 \alpha}, \qquad \cos \vartheta = \frac{G}{Q} \sin \alpha.$$

38—40. v. Zech, Aufgabens. für die theoret. Mechanik.

41. Ein gleichschenkeliges Dreieck liegt in einer glatten hohlen Halbkugel, seine drei Winkelpunkte berühren die Hohlfläche. Zu finden die Lage, in welcher das Dreieck ruhen wird.

Es sei $a =$ der Länge eines Schenkels, $h =$ der Höhe des Dreiecks, $r =$ dem Radius der Halbkugel, $\vartheta =$ der Neigung des Dreieckes zu der Vertikalen, dann ist

$$tg\,\vartheta = \frac{3\sqrt{4h^2r^2 - a^4}}{4h^2 - 3a^2}.$$

42. Eine homogene kreisrunde Platte ist mit ihrem Mittelpunkte auf eine Stütze gelegt. Zu finden, in welchen Punkten ihres Umfanges drei Gewichte w_1, w_2, w_3 aufgelegt sein müssen, damit die Platte in horizontaler Lage ruhen kann.

Wenn $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ die zwischen den Radien der Punkte (w_2, w_3), (w_3, w_1), (w_1, w_2), wo die Gewichte aufgelegt sind, eingeschlossenen Winkel bezeichnen, so ist

$$\cos\vartheta_1 = \frac{w_1^2 - w_2^2 - w_3^2}{2w_2w_3},\quad \cos\vartheta_2 = \frac{w_2^2 - w_3^2 - w_1^2}{2w_1w_3},\quad \cos\vartheta_3 = \frac{w_3^2 - w_2^2 - w_1^2}{2w_1w_2}.$$

43. Eine Halbkugel ist mit ihrer Basis nach unten zwischen zwei vertikalen, sie berührenden Ebenen befestigt. Ein Stab von gegebener Länge und Gewicht stützt sich auf die Halbkugel und die bis zu einer Höhe des Kugeldurchmessers reichende Ebene, während eines seiner Enden gegen die andere unbegrenzte Ebene drückt. Zu finden die Pressungen des Stabes auf die Ebenen und die Halbkugel, sowie die grösste Länge des Stabes, für welche hier noch ein Druck auf die Halbkugel stattfinden kann.

Es sei r der Radius der Halbkugel, $2a$ die Länge des Stabes, R der Druck auf die horizontale Begrenzung der einen Ebene, S derjenige auf die unbegrenzte Ebene, T der Druck auf die Kugel, G das Gewicht des Stabes, wirksam gedacht in dessen Mittelpunkt. Damit wird gefunden werden

$$R = \frac{32a - 25r}{80r}G,\qquad S = \frac{3}{4}G,\qquad T = \frac{125r - 32a}{80r}G.$$

Mit $a = \frac{125}{32}r$ ist der Druck auf die Kugel gleich Null.

41—43. Walton, p. 73 u. 74.

44. Ein Stab stützt sich gegen den Boden und gegen eine Thür mit vertikaler Drehaxe und hebt dieselbe beim Öffnen. Welches Moment ist erforderlich, um die Thür festzuhalten?

Die Coordinatenebenen seien so gelegen, dass die Ebene der xy mit dem Boden, die Ebene der xz mit der geschlossenen Thür zusammenfalle und die Drehaxe Axe der z sei. Die Coordinaten des Stützpunktes des Stabes am Boden seien $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$, und des Stützpunktes an der Thür $x = a$, $y = 0$, $z = +b$. Wird die Thür um den Winkel α gedreht, so ist das zum Gleichgewichte erforderliche Moment, wenn das Gewicht G der Thür in ihrem geometrischen Mittelpunkt angreift, gleich

$$G.\frac{a^2\sin\alpha}{\sqrt{b^2 + 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

v. Zech.

45. Eine dreieckige Platte hängt mittelst dreier paralleler, an ihren Ecken befestigter Schnüre und trägt einen schweren Punkt. Beweise, dass — wenn die Schnüre von gleicher Stärke sind — ein schwererer Punkt in dem Schwerpunkte als an irgend einem anderen Punkte der Platte getragen werden kann.

46. Drei Kräfte, welche durch die Strecken $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ repräsentiert werden, wirken in den Winkelpunkten eines Dreieckes ABC, das bei C rechtwinkelig ist, in den Richtungen der Seiten, wie sie folgen. Beweise, dass die Resultante dargestellt

wird durch den Ausdruck $\sqrt{\frac{c^2}{a^2 b^2} - \frac{3}{c^2}}$, dass sie zu AC geneigt ist unter einem Winkel $arc\left(\cos = \frac{a^3}{\sqrt{a^6 + b^6}}\right)$ und dass sie BC in einem Abstande $\frac{b^2}{a}$ von C schneidet. a, b, c sind die Seiten des Dreiecks ABC.

47. Wenn die Kräfte P, Q, R, welche in dem Mittelpunkte einer kreisförmigen Platte entlang den Halbmessern OA, OB, OC wirken, äquivalent sind den Kräften P', Q', R', welche entlang den Seiten BC, CA, AB des Dreieckes ABC wirken, beweise, dass

$$\frac{P.P'}{BC} + \frac{Q.Q'}{CA} + \frac{R.R'}{AB} = 0 \text{ ist.}$$

48. Zeige, dass ein System von Kräften, welches in einer Ebene wirkt und durch die Seiten eines Polygons dargestellt ist, äquivalent ist einem Paar, dessen Moment durch die doppelte Fläche des Polygons gegeben ist.

49. Drei Kräfte wirken in den Ecken eines Dreieckes und sind im Gleichgewichte; eine Kraft halbiert den Winkel, an welchem sie wirkt, die anderen zwei Kräfte machen gleiche Winkel mit der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite. Zeige, dass die Kräfte proportional sind den ihren Angriffspunkten gegenüberliegenden Seiten.

50. Vier ungleiche Kräfte P, Q, R, S wirken auf einen festen Körper entlang den Seiten OA, OB, OC, CO eines Quadrates $OABCO$. Beweise, dass hier eine einzige resultierende Kraft sein wird mit der Gleichung

$$(Q - S)x + (R - P)y = a(Q + R),$$

wenn OA, OC als Coordinatenaxen genommen sind, a die Seite des Quadrates bezeichnet, und dass die Grösse dieser Resultanten $= \sqrt{(P - R)^2 + (Q - S)^2}$ ist.

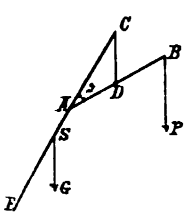
51. Eine dreieckige Platte mit den Seiten a, b, c hängt von einem festen Punkte mittelst an ihre Ecken gefesselter Fäden herab; α, β, γ seien die Längen der an die Ecken geknüpften Fäden gegenüber a, b, c. Beweise, dass, wenn die Ebene der Platte horizontal ist,

$$a^2 + 3\alpha^2 = b^2 + 3\beta^2 = c^2 + 3\gamma^2$$

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht mehrerer Körper.

1. AB (Fig. 186) ist ein Stab, welcher sich um seinen Mittelpunkt D drehen kann. Ein Stab CE, beweglich um den Punkt C durch ein Charnier in der vertikalen Linie durch D, wird gedrückt von dem Stabe AB im Punkte A vermöge eines in seinem Ende B angebrachten Gewichtes P. Beide Stäbe liegen in einer vertikalen Ebene. Das Gewicht des Stabes AB sei unbedeutend, das Gewicht G des Stabes CE greife in seinem Schwerpunkte S an. Welches ist die Gleichgewichtslage des Systemes, wenn $CD = AD = BD$ ist?



Figur 186.

Es sei $AD = CD = BD = a$, $\sphericalangle ACD = \vartheta$, $SC = b$, R die Wirkung und Gegenwirkung der zwei Stäbe bei A. Damit erhalten wir für das Gleichgewicht von CE, Momente um C nehmend,

$$R\,2\,a\cos\vartheta = G\,b\sin\vartheta,$$

und für das Gleichgewicht von AB, Momente um D nehmend,

$$R\,a\cos\vartheta = P\,a\sin 2\vartheta, \quad \text{oder} \quad R = P\sin 2\vartheta.$$

Durch diese zwei Gleichungen bekommen wir, indem wir R eliminieren,

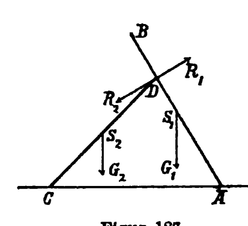
$$G\,b\sin\vartheta = 2\,P\,a\sin 2\vartheta = 4\,P\,a\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

und daher

$$\vartheta = 0, \quad \text{oder} \quad \cos\vartheta = \frac{b}{4\,a}\frac{G}{P},$$

Resultate, welche die verlangten Lagen des Stabes bestimmen.

Walton, p. 89.



Figur 187.

2. Zwei glatte schwere Balken AB, CD (Fig. 187) befinden sich in derselben vertikalen Ebene und können sich in ihr um die Punkte A und C drehen, welche in einer Horizontalebene liegen; bei D stützt sich der Balken AB auf den Balken CD. Die Gleichgewichtslage zu finden.

Es seien S_1, S_2 die Schwerpunkte der Balken, G_1, G_2 ihre daselbst vertikal abwärts wirkenden Gewichte, R_1, R_2 die gegenseitigen Widerstände der Balken AB, CD in D. Ferner sei $AS_1 = a$, $CD = b$, $CS_2 = \frac{b}{2}$, $AC = c$, $\sphericalangle BAC = \vartheta$, $\sphericalangle ACD = \varphi$. Für das Gleichgewicht von AB haben wir nun, Momente um A nehmend,

$$G_1\,a\cos\vartheta = R_1 \,.\, AD = R_1\,b\,\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}, \tag{1}$$

und für das Gleichgewicht von CD, C als Drehpunkt ansehend,

$$G_2\,\frac{b}{2}\cos\varphi = R_2\,b\sin\sphericalangle\,CD\,R_2 = R_1 b\cos\sphericalangle\,CDA,$$

weil $R_2 = -R_1$ sein muss,

$$G_2\,\frac{b}{2}\cos\varphi = -R_1\,b\cos(\vartheta + \varphi). \tag{2}$$

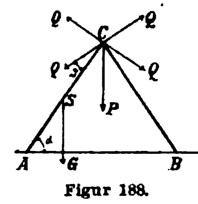
Durch Elimination von R_1 aus (1) und (2) ergiebt sich

$$2\,G_1\,a\cos\vartheta\sin\vartheta\cos(\vartheta + \varphi) = G_2\,b\cos\varphi\sin\varphi. \tag{3}$$

Weiter ist

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin(\vartheta + \varphi)}{\sin\vartheta}, \tag{4}$$

und mithin sind die Werte von ϑ, φ durch (3) und (4) bestimmt; die Reaktion R_1 folgt sodann aus (2).



Figur 188.

3. In einer vertikalen Ebene liegen zwei gleiche Balken AC, BC, die sich in ihren oberen Enden C stützen, woselbst das Gewicht P angehangen ist (Fig. 188), die unteren Enden sind mit dem horizontalen Balken AB verzapft. Es soll die Spannung T des Balkens AC bestimmt werden.

Es sei S der Schwerpunkt des Balkens AC, in dem sein Gewicht G angreife, α seine Neigung zum Horizonte, $AC = a$, $AS = b$, R die Reaktion in A senkrecht zu AB, Q die Kraft in C, welche von dem Gewichte P und der Reaktion des Balkens BC herrührt und deren Richtung CQ mit CA den unbekannten Winkel ϑ einschliesse, so dass im Punkte C das Gewicht P und die beiden Reaktionen Q, Q thätig sind.

Für den Balken AC nehmen wir A als Momentenpunkt, zerlegen die Kräfte horizontal und vertikal und erhalten dadurch die Bedingungen

$$T - Q \cos(\alpha - \vartheta) = 0, \quad (1) \qquad R - G - Q \sin(\alpha - \vartheta) = 0, \quad (2)$$

$$G b \cos\alpha - Q a \sin\vartheta = 0, \quad (3)$$

ferner muss noch für den Punkt C die Gleichung erfüllt sein

$$2 Q \sin(\alpha - \vartheta) - P = 0. \quad (4)$$

Durch (1) und (4) bekommen wir

$$T = \frac{1}{2} P \operatorname{cotg}(\alpha - \vartheta).$$

Mit (3) und (4) ist

$$G b \cos\alpha = \frac{1}{2} P a \frac{\sin\vartheta}{\sin(\alpha - \vartheta)} = \frac{1}{2} P a \frac{\sin\{\alpha - (\alpha - \vartheta)\}}{\sin(\alpha - \vartheta)}$$

$$= \frac{1}{2} P a \{\sin\alpha \operatorname{cotg}(\alpha - \vartheta) - \cos\alpha\},$$

daher

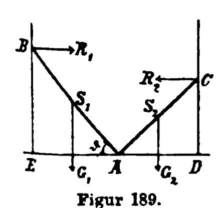
$$\operatorname{cotg}(\alpha - \vartheta) = \frac{2Gb + Pa}{Pa} \operatorname{cotg}\alpha,$$

und mithin

$$T = \frac{2Gb + Pa}{2a} \operatorname{cotg}\alpha.$$

Hiernach ist die Spannung T um so kleiner, je grösser α und je kleiner b gegen a ist. Noch finden wir mit (2) und (4) als Reaktion im Punkte A

$$R = G + \frac{1}{2} P.$$



Figur 189.

4. Zwei in einer vertikalen Ebene gelegene Balken AB, AC (Fig. 189) stützen sich auf der horizontalen Ebene DE in dem Punkte A gegen einander und mit den Enden B, C gegen zwei vertikale Ebenen EB, DC, welche rechtwinkelig zu der Lotebene durch die Balken sind. Die Längen a und b,

sowie die Gewichte G_1 und G_2 der Balken, welche ihn deren Mitte vertikal abwärts wirken, sind bekannt. Es soll die Entfernung der beiden vertikalen Ebenen von einander bestimmt werden, wenn der Winkel BAC ein rechter Winkel ist.

Der Balken AB wird durch sein Gewicht G_1, die Reaktion R_1 in B und die in A auf ihn wirkenden Widerstände im Gleichgewichte gehalten. Mit dem Momentenpunkt A treten letztere in der Bedingungsgleichung nicht auf, welche — wenn wir noch $\sphericalangle BAE = \vartheta$ setzen — ist

$$G_1 \frac{a}{2} \cos\vartheta - R_1\, a \sin\vartheta = 0. \qquad (1)$$

Für den Balken AC bekommen wir in gleicher Weise

$$G_2 \frac{b}{2} \sin\vartheta - R_2\, b \cos\vartheta = 0. \qquad (2)$$

Denken wir uns jetzt die beiden Balken im Gleichgewichte, so können wir dieselben als ein System ansehen, indem sie dann bei C fest mit einander verbunden erscheinen, alsdann müssen noch die Bedingungen erfüllt werden, wenn V den vertikalen Widerstand der Ebene DE in A bezeichnet,

$$R_1 - R_2 = 0, \quad (3) \qquad V - G_1 - G_2 = 0. \quad (4)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1), (2), (3) bekommen wir nun

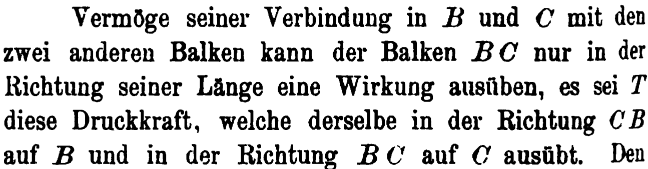
$$G_1 \cos^2\vartheta - G_2 \sin^2\vartheta = 0, \quad \text{folglich} \quad tg\,\vartheta = \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}.$$

Durch die Geometrie ist aber $DE = a\cos\vartheta + b\sin\vartheta$, mithin auch

$$DE = \frac{a + b\,tg\,\vartheta}{\sqrt{1 + tg^2\vartheta}} = \frac{a\sqrt{G_2} + b\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1{}^2 + G_2{}^2}},$$

womit der verlangte Abstand der beiden vertikalen Ebenen gefunden ist.

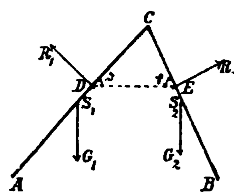
5. In einer vertikalen Ebene sind drei Balken AD, AE, BC in A, B, C durch Charniere verbunden; AE ist lotrecht und in E befestigt, AD ist horizontal. In D ist ein Gewicht G aufgehangen und soll der Druck auf die Charniere gefunden werden, wenn die Balken gewichtslos gedacht werden. (Fig. 190.)



Figur 190.

Vermöge seiner Verbindung in B und C mit den zwei anderen Balken kann der Balken BC nur in der Richtung seiner Länge eine Wirkung ausüben, es sei T diese Druckkraft, welche derselbe in der Richtung CB auf B und in der Richtung BC auf C ausübt. Den auf A ausgeübten Druck zerlegen wir nach BA, AC in die Componenten X, Y, $\sphericalangle ABC$ sei $= \alpha$, $BC = a$, $BD = b$. Der Balken AD wird von den Kräften X, Y, T und G im Gleichgewichte gehalten. Zerlegen wir nun die Kräfte horizontal und vertikal und nehmen Momente um B, so ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$G - T\sin\alpha + Y = 0, \quad T\cos\alpha - X = 0, \quad Gb - Ya\cos\alpha = 0,$$
aus denselben folgt:
$$Y = \frac{b}{a\cos\alpha} G, \quad T = \frac{a\cos\alpha + b}{a\sin\alpha\cos\alpha} G, \quad X = \frac{a\cos\alpha + b}{a\sin\alpha} G.$$
Würden die drei Balken A, B, C fest mit einander verbunden sein, so erfolgt die Wirkung von BC nicht notwendig nach seiner Richtung, sie wäre dann unbestimmt, der Balken BC könnte sogar dann hinweggenommen werden, ohne dass das Gleichgewicht gestört würde.



Figur 191.

6. Zwei Balken AC, BC (Fig. 191) in einer vertikalen Ebene sind bei C durch ein Charnier verbunden und ruhen auf zwei in derselben horizontalen Ebene liegenden Bolzen D, E. Die Gleichgewichtslage zu finden.

Es seien S_1, S_2 die Schwerpunkte, G_1, G_2 die Gewichte der Balken AC, BC, R_1, R_2 die Reaktionen in D, E rechtwinkelig zu AC, BC; $\measuredangle CDE = \vartheta$, $\measuredangle CED = \varphi$, $CS_1 = a_1$, $CS_2 = a_2$, $DE = b$.

Der Balken AC ist unter der Wirkung der Kräfte G_1, R_1 und des unbekannten Widerstandes bei C im Gleichgewichte, so dass, wenn C als Momentenpunkt betrachtet wird, sein muss
$$R_1 . CD - G_1 a_1 \cos\vartheta = 0. \tag{1}$$
An dem Balken BC sind thätig G_2, R_2 und der Widerstand bei C, weshalb gleicherweise
$$R_2 . CE - G_2 a_2 \cos\varphi = 0. \tag{2}$$
Im Gleichgewichtszustande bilden die zwei Balken ein festes System mit den Kräften G_1, G_2, R_1, R_2, für welche die beiden Bedingungen bestehen müssen
$$R_1\cos\vartheta + R_2\cos\varphi - G_1 - G_2 = 0, \quad (3) \quad R_1\sin\vartheta - R_2\sin\varphi = 0. \quad (4)$$
Für das Dreieck DEC bestehen die geometrischen Relationen
$$CD = \frac{b\sin\varphi}{\sin(\vartheta+\varphi)}, \quad (5) \qquad CE = \frac{b\sin\vartheta}{\sin(\vartheta+\varphi)}. \quad (6)$$
Nun bekommen wir mit (1) und (5), sowie mit (2) und (6)
$$R_1 = G_1 \frac{a_1\cos\vartheta\sin(\vartheta+\varphi)}{b\sin\varphi}, \qquad R_2 = G_2 \frac{a_2\cos\varphi\sin(\vartheta+\varphi)}{b\sin\varphi}.$$
Die Einführung dieser Werte von R_1 und R_2 in die Gleichungen (3) und (4) giebt
$$\left.\begin{aligned} G_1 + G_2 &= \sin(\vartheta+\varphi)\left(\frac{G_1 a_1 \cos^2\vartheta}{b\sin\varphi} + \frac{G_2 a_2 \cos^2\varphi}{b\sin\vartheta}\right), \\ G_1 a_1 \sin^2\vartheta\cos\vartheta &- G_2 a_2 \sin^2\varphi\cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$
Diese beiden Gleichungen genügen zur Bestimmung von ϑ und φ.

Sind die beiden Balken einander gleich, ist also $a_1 = a_2$, $G_1 = G_2$, dann gehen die Gleichungen (7) über in

$$\frac{2b}{a_1} = \sin(\vartheta + \varphi)\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin\vartheta}\right), \quad \sin^2\vartheta\cos\vartheta - \sin^2\varphi\cos\varphi = 0. \quad (8)$$

Aus den Gleichungen (8) folgt

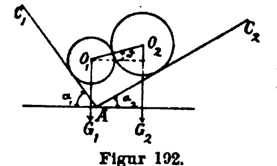
$$\vartheta = \varphi, \quad \text{und} \quad 1 = \cos^2\vartheta + \cos\vartheta\cos\varphi + \cos^2\varphi. \quad (9)$$

Mit $\vartheta = \varphi$ bekommen wir durch die erste der Relationen (8)

$$\cos\vartheta = \sqrt[3]{\frac{b}{2a_1}}.$$

Die Balken liegen in diesem Falle gegen die durch C gehende Vertikale symmetrisch Da die Gleichungen (8) in Beziehung auf ϑ und φ symmetrisch sind, so giebt es noch zwei unsymmetrische Gleichgewichtslagen, welche in Bezug auf die erstere auf jeder Seite ähnlich liegend sind und aus den (8) folgen.

7. Zwei Kugeln O_1 und O_2 ruhen auf zwei glatten geneigten Ebenen AC_1 und AC_2 und drücken gegeneinander. Ihre Lage ist zu bestimmen.


Figur 192.

Lasse sein G_1, G_2 die Gewichte der Kugeln O_1, O_2, R ihre gegenseitige Reaktion, α_1, α_2 die Neigungswinkel der Ebenen AC_1, AC_2 gegen den Horizont (Fig. 192), ϑ die Horizontalneigung der die Mittelpunkte der Kugeln verbindenden Linie $O_1 O_2$.

Für das Gleichgewicht der Kugel O_1 ist, wenn wir die Kräfte R und G_1 parallel und senkrecht zu AC_1 zerlegen

$$R\cos(\alpha_1 + \vartheta) - G\sin\alpha_1 = 0,$$

und für dasjenige der Kugel O_2 durch Kräftezerlegung parallel und senkrecht zu AC_2

$$R\cos(\alpha_2 - \vartheta) - G\sin\alpha_2 = 0.$$

Eliminieren wir nun R zwischen diesen beiden Gleichungen, so ist

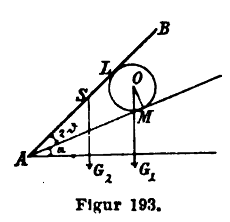
$$G_1\sin\alpha_1\cos(\alpha_2 - \vartheta) = G_2\sin\alpha_2\cos(\alpha_1 + \vartheta),$$

$$G_1\,tg\,\alpha_1(1 + tg\,\alpha_2\,tg\,\vartheta) = G_2\,tg\,\alpha_2(1 + tg\,\alpha_1\,tg\,\vartheta)$$

und daher

$$tg\,\vartheta = \frac{G_2\cotg\alpha_1 - G_1\cotg\alpha_2}{G_1 + G_2}.$$

Walton, p. 90.


Figur 193.

8. Eine glatte Kugel LM (Fig. 193) vom Halbmesser $OM = r$ und dem Gewichte G_1 liegt auf einer glatten Ebene AM, welche unter einem Winkel α zum Horizonte geneigt ist, und wird durch einen um A in einer vertikalen Ebene durch den Kugelmittelpunkt beweglichen Stab AB von dem

Gewichte G_2, welches im Punkte S angreift, und der Länge a im Gleichgewichte gehalten, wobei $AS = \frac{a}{2}$ ist. Das System soll bezüglich der an ihm wirkenden Kräfte untersucht werden.

Es sei R_1 die Reaktion in L zwischen Kugel und Stab, senkrecht zu AB, R_2 diejenige in M zwischen Kugel und Ebene, senkrecht zu AM, $\sphericalangle BAM = 2\vartheta$.

Der Stab AB wird durch die Kräfte R_1 und G_2 im Gleichgewichte erhalten, so dass, wenn wir Momente um A nehmen, die Bedingung bestehen muss

$$R_1 . AL = G_2 \frac{a}{2} \cos(\alpha + 2\vartheta), \text{ oder } R_1 r \cot \vartheta = G_2 \frac{a}{2} \cos(\alpha + 2\vartheta). \quad (1)$$

Die Kugel wird durch die in den Richtungen LO, MO wirkenden Widerstände R_1, R_2 und ihr Gewicht G_1, welches in ihrem Mittelpunkte O angreifen möge, im Gleichgewichte erhalten. Indem wir die Kräfte parallel und senkrecht zu der geneigten Ebene zerlegen, gelangen wir zu den Bedingungen

$$R_1 \sin 2\vartheta - G_1 \sin\alpha = 0, \quad (2) \qquad R_2 + G_2 \cos\alpha - R_1 \cos 2\vartheta = 0. \quad (3)$$

Aus (2), sowie aus (2) und (3) folgt

$$R_1 = G_1 \frac{\sin\alpha}{\sin 2\vartheta}, \quad (4) \qquad R_2 = G_1 \sin\alpha \cot 2\vartheta - G_2 \cos\alpha, \quad (5)$$

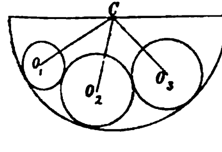
wodurch die Reaktionen bestimmt sind, wenn ϑ gegeben ist.

Durch (1) und (2) erhalten wir, indem wir R_1 eliminieren,

$$\sin 2\vartheta \cos(\alpha + 2\vartheta) = 2 \frac{G_1 r}{G_2 a} \sin\alpha \cot\vartheta. \quad (6)$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel 2ϑ und erhalten wir dann mit (4) und (5) die der Gleichgewichtslage entsprechenden Reaktionen R_1 und R_2.

9. Drei Kugeln O_1, O_2, O_3 (Fig. 194) sind in dem Inneren einer Hohlkugel in Berührung gebracht; eine durch den Mittelpunkt C der Hohlkugel gelegte vertikale Ebene enthalte die Mittelpunkte der drei homogenen schweren Kugeln. Welches ist die Gleichgewichtslage der drei Kugeln?



Figur 194.

Es sei C der Mittelpunkt der Hohlkugel, O_1, O_2, O_3 seien die Mittelpunkte der schweren Kugeln, G_1, G_2, G_3 ihre Gewichte. Ziehe O_1C, O_2C, O_3C. Nehme $CO_1 = r_1$, $CO_2 = r_2$, $CO_3 = r_3$, $\sphericalangle O_1CO_2 = \alpha$, $\sphericalangle O_2CO_3 = \beta$, $\vartheta =$ der Neigung von CO_2 zum Horizonte.

Damit ist, weil die Reaktion der Hohlkugel auf jede der drei mas-

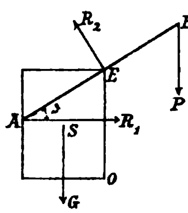
siven Kugeln durch den Punkt C geht, für das Gleichgewicht der drei Kugeln, Momente um C nehmend und beachtend, dass, wenn jede der Kugeln im Gleichgewichte, sie auch in Ruhe sein würden, wenn sie fest miteinander zu einem Körper verbunden wären,

$$G_1 r_1 \cos(\vartheta - \alpha_1) + G_2 r_2 \cos\vartheta + G_3 r_3 \cos(\vartheta + \alpha_2) = 0,$$

$$G_1 r_1(\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \, tg\,\vartheta) + G_2 r_2 + G_3 r_3(\cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \, tg\,\vartheta) = 0,$$

und daher $$tg\,\vartheta = \frac{G_3 r_3 \cos\alpha_2 + G_2 r_2 + G_1 r_1 \cos\alpha_1}{G_3 r_3 \sin\alpha_2 - G_1 r_1 \sin\alpha_1}.$$

10. Ein hohler Cylinder steht auf einer horizontalen Ebene. Ein starrer, gewichtsloser Stab geht in einer vertikalen Ebene durch die Axe des Cylinders über dessen oberen Rand hinweg und stützt sich gegen seine innere Fläche. Ein gegebenes Gewicht ist an dem höheren Endpunkte des Stabes befestigt und der Cylinder, welcher auf der Ebene durch ein kleines Hindernis am Gleiten verhindert ist, befindet sich gerade in dem Zustande überzukippen. Das Gewicht des Cylinders soll bestimmt werden.



Figur 195.

Lasse sein (Fig. 195) $a =$ der Länge des Stabes AEB, $AE = x$, $c =$ dem Durchmesser des Cylinders, $G =$ seinem Gewichte, welches in seinem geometrischen Mittelpunkte S angreife, $\vartheta =$ der Neigung von AB zum Horizonte, R_1, R_2 die Reaktionen des Cylinders auf den Stab.

Für das Gleichgewicht des Stabes bekommen wir, indem wir die Kräfte parallel und senkrecht zu demselben zerlegen und Momente um E nehmen,

$$R_1 \cos\vartheta - P \sin\vartheta = 0, \tag{1}$$

$$R_1 x \sin\vartheta - P(a - x)\cos\vartheta = 0, \quad \text{oder, weil} \quad x\cos\vartheta = c,$$

$$R_1 c \sin\vartheta - P(a\cos\vartheta - c)\cos\vartheta = 0. \tag{2}$$

Durch (1) und (2) ist

$$c \sin^2\vartheta = (a\cos\vartheta - c)\cos^2\vartheta, \qquad \cos\vartheta = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \tag{3}$$

folglich $$(a - x)\cos\vartheta = \sqrt[3]{c}\left(a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}\right).$$

Für das Gleichgewicht des Cylinders und Stabes, beide als ein System ansehend, erhalten wir, Momente um O nehmend,

$$G \cdot \frac{1}{2} c = P(a - x)\cos\vartheta = P\sqrt[3]{c}\left(a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}\right), \qquad G = 2P\frac{a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{c^2}}. \tag{4}$$

Mit (1) und (3) ist die Reaktion in A

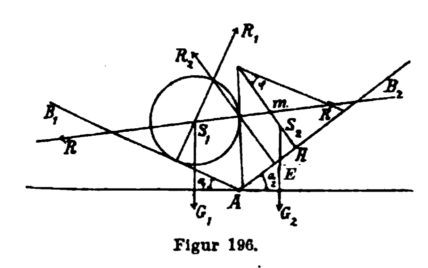
$$R_1 = P\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}}. \tag{5}$$

Indem wir noch die auf den Stab wirkenden Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung zerlegen, muss auch sein

$$P = R_2 \cos\vartheta, \text{ womit } R_2 = \frac{P}{\cos\vartheta} = P\sqrt[3]{\frac{a}{c}}, \quad \text{mit (3).} \tag{6}$$

Die Gleichung (4) bestimmt das Gewicht des Cylinders, die Gleichungen (5) und (6) geben die Reaktionen in den Stützpunkten des Stabes.

11. Eine Kugel und ein Kegel von gegebenen Gewichten befinden sich auf zwei geneigten Ebenen und berühren sich gegenseitig. Der Schnitt der Ebenen ist eine horizontale Linie. Die vertikale Ebene durch die Kegelaxe und den Kugelmittelpunkt ist senkrecht auf der Schnittlinie beider Ebenen. Zu bestimmen die Gleichgewichtslage.



Figur 196.

Es seien (Fig. 196) G_1, G_2 die Gewichte der Kugel und des Kegels, welche wir in ihren Schwerpunkten S_1, S_2 wirksam denken. R_1 sei die Reaktion der Ebene AB_1 auf die Kugel, R die gegenseitige Reaktion der Kugel und des Kegels. Wenn φ den Halbwinkel des Kegels bezeichnet, wird offenbar die Richtung von R einen Winkel φ mit der Ebene AB_2 machen. Die Ebene AB_2 wird rechtwinkelig zu ihr selbst eine Reaktion auf jedes Element der Basis des Kegels ausüben. Die Resultante aller dieser Reaktionen wird eine Kraft R_2 sein, welche in einem Punkte E der Basis des Kegels in der Linie AB_2 angreift. α_1, α_2 seien die Neigungen der Ebenen AB_1, AB_2 gegen den Horizont. Für das Gleichgewicht der Kugel haben wir durch Kräftezerlegung parallel und senkrecht zu der Ebene AB_1:

$$G_1 \sin\alpha_1 - R\cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) = 0, \tag{1}$$

$$R_1 - G_1 \cos\alpha_1 - R\sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi) = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung der Momente ist eine identische Gleichung, weil alle Kräfte, welche wirken, durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

Ferner bekommen wir für das Gleichgewicht des Kegels, indem wir die an ihm wirkenden Kräfte parallel und senkrecht zu der Ebene AB_2 zerlegen,

$$G_2 \sin\alpha_2 - R\cos\varphi = 0, \quad (3) \qquad R_2 - G_2\cos\alpha_2 - R\sin\varphi = 0, \quad (4)$$

und Momente um S_2 nehmen, die Linien EH, mS_2 durch x, y darstellend, wobei $S_2 H \perp AB_2$,

$$R_2 x - R y \cos\varphi = 0. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergiebt sich

$$\frac{G_1 \sin\alpha_1}{G_2 \sin\alpha_2} = \frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi)}{\cos\varphi}, \tag{6}$$

womit $tg\,\varphi$ fertig bestimmt sein mag. Diese Relation ist die einzige Bedingung, welcher der Kegel und die Kugel unterworfen, um Gleichgewicht zu sichern. Ebenso ist ersichtlich, wenn beachtet wird, dass die drei Gleichungen (2), (4), (5) vier unbekannte Grössen R_1, R_2, x, y, jede der drei Gleichungen, in welche nicht die Gleichungen (1) und (3) hineingezogen sind, wenigstens eine, einführen, dass es hier eine unendliche Anzahl von Gleichgewichtslagen giebt, oder dass, wenn φ den durch die (6) gegebenen Wert hat, der Kegel und die Kugel sich berührend ruhen werden, wie sie auch auf die beiden Ebenen gelegt und was immer ihre Grössen sind.

Die Werte von φ sind bestimmt durch (6); R wird bestimmt sein durch (1) oder (3) und daher R_1, R_2 durch (2), (4). Dann mögen wir durch die (5), vorausgesetzt, dass y gegeben ist, x bestimmen; y kann nur gegeben sein durch die Kenntnis der Grössen des Kegels und der Kugel und die besondere Gleichgewichtslage, in welche sie zu stellen wir wählen mögen.

9—11. Walton, p. 90—93.

12. Zwei gleichförmige Stäbe $A_1 C$, $A_2 C$ in einer vertikalen Ebene ruhen mit ihren unteren Enden auf einer horizontalen Ebene, woselbst sie am Gleiten verhindert sind, und lehnen sich in dem Punkte C gegen einander in der Gleichgewichtslage. Zu bestimmen die Relation zwischen ihren Neigungswinkeln zu dem Horizonte, wenn die kleine gegenseitige Berührungsfläche bei C vertikal ist.

Es seien G_1, G_2 die Gewichte der Stäbe $A_1 C$, $A_2 C$, φ_1, φ_2 ihre Horizontalneigungen, dann ist

$$G_1 \cot g\,\varphi_1 = G_2 \cot g\,\varphi_2, \qquad \text{oder} \qquad \frac{\cot g\,\varphi_1}{\cot g\,\varphi_2} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Franchini, Memorie della Societa Italiana, Tom. XVI, P. I, p. 237, 1813.

13. Mittelst eines unausdehnbaren Fadens sind zwei glatte Cylinder von gegebenen Halbmessern fest aneinander gebunden. Zu finden das Verhältnis aus der gegenseitigen Pressung zwischen den Cylindern und der Spannung des Fadens, durch welche der Druck hervorgebracht ist.

Wenn R der gegenseitige Druck, T die Spannung des Fadens, r_1, r_2 die Halbmesser der Cylinder sind, dann ist

$$\frac{R}{T} = \frac{4\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}.$$

14. Eine schwere Kugel ist auf drei ihr gleiche Kugeln gelegt, welche in Berührung auf einer horizontalen Ebene ruhen. Zu finden den Druck auf jede und auch die Horizontalkraft, welche an jeder angebracht werden muss, um das Gleichgewicht zu bewahren.

Wenn $G =$ dem Gewichte einer jeden Kugel, $R =$ dem Drucke auf jede und $H =$ der verlangten Horizontalkraft, dann muss sein

$$R = \frac{G}{\sqrt{6}}, \qquad H = \frac{G}{3\sqrt{2}}.$$

15. Eine Kugel mit dem Mittelpunkte C ist an einen festen Punkt O durch einen gewichtslosen Faden gefesselt und berührt einen gleichförmigen Stab OB, welcher in einer vertikalen Ebene mittelst eines Charnieres um O drehbar ist. Die Gleichgewichtslage zu finden.

Es sei $G_1 =$ dem Gewichte der Kugel, $G_2 =$ demjenigen des Stabes, $r =$ dem Halbmesser der Kugel, $2a =$ der Länge des Stabes, $b =$ dem Abstande des Punktes O von C, $\vartheta =$ der Neigung von OC zu der Vertikalen, alsdann ist

$$cotg\,\vartheta = \frac{G_1 b^2}{G_2 a r} + \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1}.$$

16. Eine Kugel von gegebenem Gewichte und Radius ist mittelst eines Fadens von gegebener Länge an einem festen Punkte aufgehangen. An demselben Punkte ist auch ein Gewicht durch einen zweiten Faden befestigt, welcher so lang ist, dass das Gewicht unterhalb der Kugel hängt. Den Winkel zu finden, welchen der die Kugel tragende Faden mit der Vertikalen einschliesst.

Wenn P das Gewicht, G die Schwere der Kugel, a ihren Radius, b den Abstand ihres Mittelpunktes vom Aufhängepunkte bezeichnet, dann wird der verlangte Winkel gleich sein

$$arc\left(sin = \frac{Pa}{(P+G)\,b}\right).$$

17. Ein Stab AB (Fig. 197) ist unter einer gegebenen Neigung zu der Vertikalen befestigt; an AB ist ein zweiter Stab CD durch Verbindungen bei den Punkten B und C gefesselt, und in dem Endpunkte D von CD ist ein Gewicht Q angehängt. Welches sind die Pressungen in den Punkten B und C, welche von AB auf CD ausgeübt werden, wenn das Eigengewicht von CD vernachlässigt wird?

Figur 197.

Lasse sein F, H die Componenten der Pressungen in B, C auf CD entlang CD, R_1, R_2 die Pressungen senkrecht zu AB, $CD = b$, $CB = c$, $\alpha =$ der Vertikalneigung der Stäbe, dann ist

$$R_1 = \frac{b}{c}\,Q\,sin\,\alpha, \qquad R_2 = \frac{b-c}{c}\,Q\,sin\,\alpha, \qquad F + H = Q\,cos\,\alpha.$$

Die Kräfte F und H können nicht getrennt werden, da sie in derselben Linie wirken.

18. Ein gleichförmiger Stab OA, beweglich durch ein Charnier bei O, stützt sich tangential auf eine glatte Kugel mit dem Mittelpunkte C, welche auf eine glatte horizontale Ebene, die durch O geht, gelegt ist. Die Kugel ist an den Punkt O durch einen Faden geknüpft. Welches ist die Spannung des Fadens?

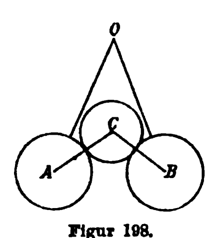
Wenn a = der Länge des Stabes, G = seinem Gewichte, r = dem Halbmesser der Kugel, c = der Entfernung des Punktes C von O, T = der Spannung des Fadens, so wird gefunden werden

$$T = G \frac{a\,r}{c^3} \frac{c^2 - 2\,r^2}{\sqrt{c^2 - r^2}}.$$

19. Ein Balken $A\,B$ ist in einer vertikalen Ebene um seinen Mittelpunkt M beweglich; ein anderer Balken hängt an einer in seinem oberen Ende befestigten Schnur in derselben vertikalen Ebene und stützt sich mit seinem tieferen Ende C auf $A\,B$. Die Lage eines Punktes E in $A\,M$ soll so bestimmt werden, dass daselbst eine gegebene Last Gleichgewicht hervorbringt.

Ist Q = der in E aufzulegenden Last, G = dem Gewichte des hängenden Balkens, dann wird sich ergeben

$$M\,E = \frac{G}{2\,Q} \cdot C\,M.$$



Figur 198.

20. Zwei Kugeln A, B (Fig. 198) von gleichem Gewichte und Volumen tragen eine dritte gleich schwere Kugel C und es sind die Kugeln A, B durch Fäden gleicher Länge an einen festen Punkt O gefesselt. Die Bedingung des Gleichgewichts zu finden.

Wenn α die Neigung eines der Fäden und β die von $A\,C$ oder $B\,C$ zur Vertikalen bezeichnet, so ist

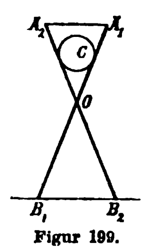
$$tg\,\beta = 3\,tg\,\alpha.$$

21. Zwei gleiche, gleichförmige Stäbe, welche zum Horizonte gleich geneigt sind, tragen eine auf ihre höheren Endpunkte sich stützende Kugel. Die tieferen Enden der Stäbe sind an Charnieren in einer horizontalen Ebene befestigt. Zu finden die Neigung eines Stabes gegen den Horizont.

Ist $2\,a$ = der Länge, G_1 = dem Gewichte eines Stabes, r = dem Halbmesser und G_2 = dem Gewichte der Kugel, $2\,c$ = der gegenseitigen Entfernung der zwei Charniere, dann ist der verlangte Winkel ϑ durch die Gleichung bestimmt

$$(c - 2\,a\cos\vartheta)^2 \left\{ (G_1 + G_2)^2 \cos^2\vartheta + G_2{}^2 \sin^2\vartheta \right\} = r^2 (G_1 + G_2)^2 \cos^2\vartheta.$$

22. Zwei gleiche, gleichförmige Stäbe $A_1\,O\,B_1$, $A_2\,O\,B_2$ (Fig. 199) in einer vertikalen Ebene sind mit einander durch ein glattes Charnier in ihrem Mittelpunkte O verbunden. Ihre tieferen Enden B_1, B_2 stützen sich auf eine glatte horizontale Ebene, ihre höheren Enden A_1, A_2 sind durch eine Schnur aneinander gefesselt. Zwischen den Stabteilen $A_1\,O$, $A_2\,O$ liegt eine Kugel C. Welches ist die Spannung der Schnur.



Figur 199.

Wenn bezeichnet: r den Halbmesser, G_1 das Gewicht der Kugel, $2\,a$ die Länge und G_2 das Gewicht eines jeden der Stäbe, α die Neigung eines jeden Stabes zur Vertikalen, T die Spannung der Schnur, dann ist

$$T = \frac{G_1\,r\cos\alpha + (2\,G_2 + G_1)\,a\sin^3\alpha}{2\,a\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

23. Sechs dünne, gleichgeformte Stäbe von gleicher Länge und gleichem gegebenen Gewichte sind durch glatte Charniere in ihren Endpunkten so mit einander

verbunden, dass sie die sechs Kanten eines Tetranders bilden. Welches ist die Längenspannung eines jeden der Stäbe in der tief.ten Fläche des Körpers?

Mit G als Gewicht eines jeden Stabes ist die verlangte Spannung gleich $\frac{G}{2\sqrt{6}}$.

24. Ein schwerer Ring ist mittelst irgend einer Anzahl gleicher Fäden, welche symmetrisch an ihn befestigt sind, in einem festen Punkte aufgehängt. Ein anderer Ring von demselben Gewichte und kleinerem Halbmesser ist im Gleichgewichte, wenn er sich auf die Fäden in ihren Mittelpunkten stützt. Welches ist das Verhältnis der Tiefen der Ringe unter ihrem Aufhängepunkte?

Die Tiefen stehen in dem Verhältnisse 2 : 3.

25. Drei gleiche Stäbe sind in Ruhe, die höheren Enden zweier derselben sind an Charnieren befestigt, welche in einer unbekannten Entfernung von einander in einer horizontalen Ebene liegen, ihre tieferen Enden sind mit den Enden des dritten Stabes durch Gelenke verbunden. Zu finden die grösste Neigung eines der höheren Stäbe zu der Richtung des Druckes an seinem oberen Charnier.

Die verlangte Neigung ist $arc\left(sin = \frac{1}{5}\right)$.

26. Zwei gleiche Kugeln sind in einen hohlen, vertikalen Cylinder gelegt, welcher an beiden Enden offen ist und auf einer horizontalen Ebene ruht. Das Gewicht einer jeden Kugel ist G_1 und ihr Halbmesser r_1, der Halbmesser des Cylinders r_2. Zu finden den kleinsten Wert des Gewichtes G_2 des Cylinders, bei welchem er durch die Kugeln nicht umgeworfen werden kann.

$$G_2 = 2\,G_1\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right).$$

27. Ein Umdrehungsparaboloid ist mit seinem Scheitel abwärts und seiner Axe vertikal zwischen zwei zum Horizonte gleich geneigte Ebenen gelegt. Zu finden das grösste Verhältnis, in welchem die Länge des Paraboloides zu seinem Parameter stehen kann, so dass, wenn der Körper mittelst einer Ebene durch seine Axe und die Schnittlinie der geneigten Ebenen geteilt wird, die zwei Teile im Gleichgewichte bleiben können.

Es sei $\alpha =$ der Neigung einer der Ebenen zu der Vertikalen, $h =$ der grössten Länge der Axe des Paroboloides, $p =$ seinem Parameter, dann ist

$$\sqrt{\frac{h}{p}} = \frac{15}{64}\pi . \frac{1 + sin^2\alpha}{sin^3\alpha} cos\,\alpha.$$

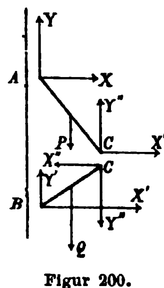
28. Drei gleiche, schwere Stäbe, in der Lage der drei Kanten einer umgekehrten dreiseitigen Pyramide, sind unter folgenden Umständen im Gleichgewichte. Ihre oberen Enden sind durch Fäden gleicher Länge verbunden und ihre unteren Enden sind an ein Charnier gefesselt, um welches sie sich frei nach allen Richtungen drehen können. Zeige, dass das Wachstum der Spannung der Fäden, entsprechend einem gegebenen kleinen Wachstum ihrer Längen, sich umgekehrt ändert wie $sin^3\vartheta$, wenn ϑ die Neigung eines jeden der Stäbe zu dem Horizonte bezeichnet.

12—27. Walton, p. 93—98. 28. Walton, p. 199.

Vierter Abschnitt.

Gleichgewicht von Stabsystemen.

Bei Problemen dieser Art ist es oft angemessen, von Diagrammen Gebrauch zu machen, in welchen die verschiedenen Glieder des Systemes für das Auge in einem Zustande durchsichtiger Trennung erscheinen, indem die Aktionen und Reaktionen durch pfeilartige Linien, welche nicht ineinander laufen, angedeutet werden. Dadurch wird der Studierende vermeiden, beim Anschreiben der Gleichungen für das Gleichgewicht in Zeichenfehler zu verfallen, zu welchen er geneigt ist, da er oft Wirkungen und Gegenwirkungen mit einander verwechselt. In der That löst sich das Problem hierbei von selbst unter der Erwägung des Gleichgewichtes mehrerer deutlich von einander unterschiedener Einzelsysteme.



Figur 200.

1. Zwei gleichförmige Stäbe AC, BC (Fig. 200) sind miteinander, in einer vertikalen Ebene liegend, bei C durch ein glattes Gelenk verbunden, ihre anderen Enden sind durch zwei glatte Charniere A, B an einer vertikalen Ebene befestigt. Man soll die Grösse und Richtung der Pressungen auf die Charniere und die gegenseitige Reaktion der Stäbe an dem Gelenke bestimmen.

Lasse sein $AC=2a$, $BC=2b$, α, β die Neigungen der Stäbe zur Vertikalen, $tg\,\alpha = m$, $tg\,\beta = n$, P, Q die Gewichte der Stäbe AC, BC. Indem wir die horizontalen und vertikalen Componenten der in den Punkten A, C, B, C wirkenden Kräfte in dem Diogramme andeuten, erhalten wir die Gleichgewichtsbedingungen, Momente um C nehmend, für den Stab AC

$$X + X'' = 0, \quad (1) \qquad Y - Y'' - P = 0, \quad (2)$$

$$X.2a\cos\alpha + Y.2a\sin\alpha - P.a\sin\alpha = 0, \text{ oder } 2X + 2mY - mP = 0, \quad (3)$$

für den Stab BC

$$X' - X'' = 0, \quad (4) \qquad Y' - Q - Y'' = 0, \quad (5)$$

$$Y'.2b\sin\beta - X'.2b\cos\beta - Q.b\sin\beta = 0, \text{ oder } 2nY' - 2X' - nQ = 0. \quad (6)$$

Nun bekommen wir durch (1), (2), (3), sowie durch (4), (5), (6)

$$2X'' + 2mY'' = mP, \quad (7) \qquad 2X'' - 2nY'' = nQ. \quad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt

$$X'' = \frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}(P+Q), \quad (9) \qquad Y'' = \frac{1}{2}\frac{mP - nQ}{m+n}, \quad (10)$$

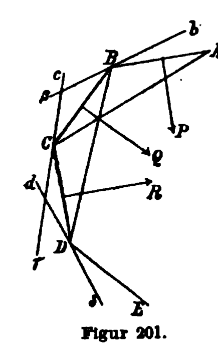
so dass mit (1), (4) und (9)

$$X = -\frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}(P+Q), \quad (11) \qquad X' = \frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}(P+Q), \quad (12)$$

sowie mit (2), (5) und (10)

$$Y = \frac{mP + n(2P+Q)}{2(m+n)}, \quad (13) \qquad Y' = \frac{nQ + m(2Q+P)}{2(m+n)}. \quad (14)$$

Damit sind die Componenten der Pressungen in den Punkten A, C, B, der Stäbe AC, BC ermittelt, die verlangten Grössen und Richtungen dieser Pressungen sind daher jetzt als bekannt anzusehen.



Figur 201.

2. In den Mittelpunkten der Seiten eines ebenen Polygones $ABCDE\ldots$ (Fig. 201) und rechtwinkelig zu ihnen in der Ebene des Vieleckes ist eine Reihe von Kräften $P, Q, R, \ldots$, die proportional den entsprechenden Seiten sind, angebracht. Die Seiten des Polygons sind vollkommen starr und fähig, sich frei um die Winkelpunkte $A, B, C, D, \ldots$ zu bewegen. Die Gestalt des Polygones soll so bestimmt werden, dass es im Gleichgewichte ist, wenn die Längen der Seiten gegeben sind.

Es mögen bezeichnen $p, q, r, s, \ldots$ die gegenseitigen Wirkungen der Seiten des Polygones in den Winkelpunkten $A, B, C, D, \ldots$, welcher Richtungen in gewissen Linien $bB\beta$, $cC\gamma$, $dD\delta, \ldots$ liegen werden.

Für das Gleichgewicht der Seite BC haben wir, indem wir die Kräfte Q, q, r rechtwinkelig und parallel zu ihr zerlegen und Momente um den Mittelpunkt von BC nehmen,

$$Q = q \sin \measuredangle CB\beta + r \sin \measuredangle BCc, \quad (1) \qquad q \cos \measuredangle CB\beta = r \cos \measuredangle BCc, \quad (2)$$

$$q \sin \measuredangle CB\beta = r \sin \measuredangle BCc. \quad (3)$$

Die Division von (3) durch (2) giebt

$$tg \measuredangle CB\beta = tg \measuredangle BCc, \quad \text{so dass} \quad \measuredangle CB\beta = \measuredangle BCc, \quad (4)$$

folglich auch durch (2) oder (3) $q = r$. (5)

Weiter bekommen wir mit (1) und (3)

$$Q = 2r \sin \measuredangle BCc.$$

In derselben Weise finden wir, dass

$$R = 2r \sin \measuredangle DC\gamma,$$

und daher ist

$$\frac{Q}{R} = \frac{\sin \measuredangle BCc}{\sin \measuredangle DC\gamma}.$$

Zufolge der Annahme ist aber auch

$$\frac{Q}{R} = \frac{BC}{DC} = \frac{\sin \measuredangle BDC}{\sin \measuredangle CBD}, \quad \text{daher} \quad \frac{\sin \measuredangle BCc}{\sin \measuredangle DC\gamma} = \frac{\sin \measuredangle BDC}{\sin \measuredangle CBD}.$$

Ferner sagt uns die Geometrie, dass

$$\measuredangle BCc + \measuredangle DC\gamma = \measuredangle BDC + \measuredangle CBD,$$

folglich sehen wir sofort, dass

$$\measuredangle BCc = \measuredangle BDC. \quad (6)$$

In gleicher Weise können wir darthun, dass auch $\measuredangle CB\beta = \measuredangle BAC$, daher ist vermöge (4)

$$\measuredangle BDC = \measuredangle BAC. \quad (7)$$

Durch die Relation (7) ist es offenbar, dass ein durch die drei Punkte A, B, C gehender Kreis auch durch den Punkt D gehen muss. In ähnlicher Weise können wir weiter zeigen, dass dieser Kreis, weil er durch B, C, D geht, ebenfalls durch E gehen muss und so fort. Folglich sehen wir, dass, wenn die Seiten des Polygones folgerecht mit Gleichgewicht angeordnet sind, alle seine Eckpunkte auf dem Umfange eines Kreises liegen müssen.

Aus (5) schöpfen wir $p = q = r = s = \ldots.$, daher sind die gegenseitigen Pressungen in allen Winkelpunkten einander gleich. Es ist auch durch (6) klar, dass alle die Linien $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma, \ldots$, Tangenten an den durch die Eckpunkte $A, B, C, D, \ldots$ gehenden Kreis sind.

Der Wert der gegenseitigen Pressungen in den Winkelpunkten wurde leicht erhalten, auch haben wir gezeigt, dass $Q = 2r \sin \measuredangle BCc$, weil aber $\measuredangle BCc$ gleich ist dem halben durch BC umspannten Mittelpunktswinkel des dem Polygone umschriebenen Kreises, so ist klar, dass

$$\sin \measuredangle BCc = \frac{\frac{1}{2} BC}{\text{Radius}}, \quad \text{folglich } r = \text{Radius} \times \frac{Q}{BC},$$

und daher $$p = q = r = s = \ldots. = k\varrho,$$

wo ϱ den Halbmesser des Kreises und k das Verhältnis zwischen irgend einer der Kräfte und der korrespondierenden Seite des Polygones bezeichnet.

Fuss, Mémoires de St. Pétersbourg, 1817, 1818, p. 46.

Eine andere Lösung dieser Aufgabe ist die folgende:

Es seien die Kräfte $P, Q, R, \ldots$ nach ihrer Grösse durch die Linien $2.AB$, $2.BC$, $2.CD, \ldots$, indem sie zu AB, BC, $CD, \ldots.$ proportional sind, dargestellt. Anstatt der in dem Mittelpunkte der Seite AB wirkenden Kraft bringen wir zwei Kräfte AB an, eine an dem Ende A, die andere an dem Ende B. Ebenso bringen wir anstatt der im Mittelpunkte von BC wirkenden Kraft $2.BC$ eine Kraft BC in C und eine solche in B an, dem Endpunkte der Seite AB, was freisteht zu thun, weil der Punkt B auf AB fest verbunden ist mit dem Punkte B auf BC; jede dieser Kräfte ist rechtwinkelig zu BC. Nun ist gemäss dieser Verteilung der Kräfte, die einzelne Kraft, welche BC um C drehen kann, die Wirkung des Stabes AB auf das Ende B von BC, und daher ist es für das Gleichgewicht von BC nötig, dass diese Wirkung genau entlang BC stattfinden kann. Folglich wird umgekehrt die Wirkung von BC auf AB gänzlich in der Richtung CB vor sich gehen; diese Wirkung möge durch R bezeichnet sein. Also wird die Linie AB in dem Punkte B von einer Kraft AB rechtwinkelig zu AB, einer Kraft BC rechtwinkelig zu BC und einer Kraft R in der Richtung von BC angegriffen. Aber durch das

Prinzip des Parallelogrammes der Kräfte sind die Kräfte AB und BC in B äquivalent einer einzelnen Kraft AC, welche rechtwinkelig zu AC wirkt. Für das Gleichgewicht von AB haben wir daher, Momente um A nehmend,

$$R.AB.\sin\sphericalangle ABC = AC.AB.\cos\sphericalangle BAC,$$

oder

$$R\sin\sphericalangle ABC = AC.\cos\sphericalangle BAC.$$

Gleicherweise ist für das Gleichgewicht der Seite CD

$$R.\sin\sphericalangle BCD = BD.\cos\sphericalangle BDC,$$

daher

$$\frac{\sin\sphericalangle ABC}{\sin\sphericalangle BCD} = \frac{AC.\cos\sphericalangle BAC}{BD.\cos\sphericalangle BDC}.$$

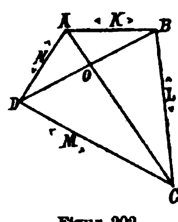
Aber durch die Geometrie ist

$$\frac{\sin\sphericalangle BAC}{\sin\sphericalangle BDC} = \frac{\frac{BC}{AC}.\sin\sphericalangle ABC}{\frac{BC}{BD}.\sin\sphericalangle BCD} = \frac{BD}{AC}.\frac{\sin\sphericalangle ABC}{\sin\sphericalangle BCD}.$$

Folglich erhalten wir durch diese zwei Relationen

$$\frac{\sin\sphericalangle BAC}{\sin\sphericalangle BDC} = \frac{\cos\sphericalangle BAC}{\cos\sphericalangle BDC},\ tg\sphericalangle BAC = tg\sphericalangle BDC,\ \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC,$$

welches zeigt, dass alle Eckpunkte des Polygones auf dem Umfange eines einzelnen Kreises liegen müssen, ein mit dem vorigen übereinstimmendes Resultat.



Figur 202.

3. Ein ebenes Viereck $ABCD$ (Fig. 202) wird aus vier starren, gleichförmigen Stäben gebildet, welche sich um die Winkelpunkte A, B, C, D frei bewegen können. Die Eckpunkte A, C und B, D des Viereckes sind durch Fäden von gegebener Spannung aneinander gefesselt. Die für das Gleichgewicht des Viereckes nötigen geometrischen Bedingungen sind zu ermitteln.

Es seien P, Q die gegebenen Spannungen der Fäden AC, BD, K, L, M, N die Aktionen und Reaktionen zwischen den vier Punktpaaren (A, B) (B, C), (C, D), (D, A).

Die am Punkte A in der Richtung A wirkende Kraft P ist äquivalent einer Kraft in der Richtung AB

$$= P\frac{\sin\sphericalangle CAD}{\sin\sphericalangle BAD} = P\frac{\sin\sphericalangle ADB}{\sin\sphericalangle BAD}.\frac{DO}{AO} = P\frac{DO.AB}{BD.OA}$$

und einer gewissen Kraft F in AD.

Gleichweise ist die Kraft Q, welche auf den Punkt B in der Richtung BD wirkt, äquivalent einer Kraft in $BA = Q\frac{OC.AB}{AC.OB}$, und einer

gewissen Kraft G in BC. Folglich ist der Punkt A zweifellos durch eine Kraft $F-N$ in AD und eine Kraft $P\frac{OD.AB}{BD.OA}-K$ in AB beansprucht, daher haben wir für sein Gleichgewicht

$$F-N=0, \text{ und } P\frac{OD.AB}{BD.OA}-K=0. \quad (1)$$

Gleicherweise ist für das Gleichgewicht des Punktes D

$$G-L=0, \quad \text{und} \quad Q\frac{OC.AB}{AC.OB}-K=0. \quad (2)$$

Durch (1) und (2) bekommen wir

$$P\frac{OD.AB}{BD.OA}=Q\frac{OC.AB}{AC.OB},$$

und daher

$$\frac{P.OD}{BD.OA}=\frac{Q.OC}{AC.OB},$$

welches die Bedingung für das Gleichgewicht des Viereckes ist.

Euler, Acta Acad. Petrop. 1779, P. II, p. 106.

Die Aufgabe lässt sich jedoch auch so lösen. Für das Gleichgewicht des Stabes AB ist hier, Momente um B nehmend,

$$N.BD.\sin\measuredangle BDA=P.BO.\sin\measuredangle BOC,$$

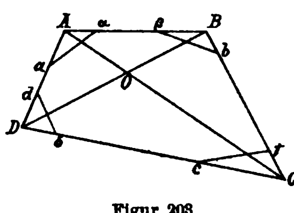
und für das Gleichgewicht des Stabes CD, Momente um C nehmend,

$$N.CA.\sin\measuredangle CAD=Q.CO.\sin\measuredangle BOC,$$

folglich ist unverkennbar

$$\frac{BD.\sin\measuredangle ODA}{CA.\sin\measuredangle OAD}, \text{ oder } \frac{BD.AO}{AC.DO}=\frac{P.BO}{Q.CO}.$$

4. Vier gleichförmige, starre Stäbe AB, BC, CD, DA (Fig. 203) sind so mit einander verbunden, dass sie fähig sind, sich frei um die Winkelpunkte des ebenen Viereckes, welches sie bilden, zu drehen. Je zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten sind durch Fäden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ von gegebener Spannung mit einander verbunden. Die Gestalt des Viereckes zu bestimmen, welche dem Gleichgewichte entspricht.



Figur 203.

Es seien A, B, C, D die Spannungen der Fäden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. Die Kraft A in $a\alpha$ an dem Punkte a ist äquivalent einer Kraft in BA

$$=A\frac{\sin\alpha aD}{\sin AaD}=A\frac{\sin aD\alpha.\frac{D\alpha}{a\alpha}}{\sin ADa.\frac{DA}{Aa}}=A\frac{Aa.D\alpha}{a\alpha.DA}$$

und einer Kraft in AD

$$= A\frac{\sin A a \alpha}{\sin A a D} = A\frac{\sin a A\alpha.\frac{A\alpha}{a\alpha}}{\sin a A D.\frac{AD}{aD}} = A\frac{A\alpha.Da}{a\alpha.DA} = A'.$$

Aber die Kraft A' in aD ist äquivalent einer Kraft in AD

$$= A'\frac{\sin a D B}{\sin A D B} = A'\frac{\sin a B D.\frac{Ba}{Da}}{\sin A D B.\frac{BA}{DA}} = A'\frac{Ba.DA}{Da.BA} = A\frac{A\alpha.Ba}{a\alpha.BA}$$

und einer Kraft in BD

$$= A'\frac{\sin A D a}{\sin A D B} = A'\frac{\sin D A a.\frac{Aa}{Da}}{\sin D A B.\frac{AB}{BD}} = A'\frac{Aa.BD}{AB.Da} = A\frac{A\alpha.Aa.BD}{a\alpha.DA.BA}.$$

Daraus erkennen wir, dass die auf den Punkt a in der Richtung $a\alpha$ wirkende Kraft A äquivalent den drei Kräften ist

$$A\frac{\alpha D.A a}{AD.a\alpha} \text{ in } BA \text{ auf } A,\quad A\frac{A\alpha.aB}{AB.a\alpha} \text{ in } AD \text{ auf } A,$$

$$A\frac{aA.A\alpha.BD}{AD.AB.a\alpha} \text{ in } BD \text{ auf } B.$$

Gleicherweise ist die Kraft A, wirkend auf den Punkt α in der Richtung αa äquivalent den Kräften

$$A\frac{aB.A\alpha}{AB.\alpha a} \text{ in } DA \text{ auf } A,\quad A\frac{Aa.\alpha D}{AD.\alpha a} \text{ in } AB \text{ auf } A$$

und

$$A\frac{\alpha A.Aa.DB}{AD.AB.\alpha a} \text{ in } DB \text{ auf } D.$$

Nun sind diese drei Kräfte gleich und entgegengesetzt den drei vorhergehenden und daher bringt der Faden $a\alpha$ mit einer Spannung A den nämlichen Effekt hervor, er kann demnach ersetzt werden durch einen Faden BD mit der Spannung

$$A\frac{aA.A\alpha.BD}{AB.AD.a\alpha}.$$

Auf demselben Wege können wir zeigen, dass die Spannung von $c\gamma$ äquivalent ist der Spannung eines Fadens BD, welche gleich ist

$$C\frac{cC.C\gamma.BD}{CB.CD.c\gamma}.$$

Folglich sind die Spannungen von $a\alpha$, $c\gamma$ zusammen äquivalent der Spannung eines Fadens BD, welche ist

$$A\frac{Aa.A\alpha.BD}{BA.DA.a\alpha} + C\frac{Cc.C\gamma.BD}{BC.DC.c\gamma}.$$

In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Spannungen von $b\beta$, $d\delta$ äquivalent sind der Spannung

$$B\frac{Bb.B\beta.CA}{AB.CB.b\beta}+D\frac{Dd.D\delta.AC}{AD.CD.d\delta}$$

in einem Faden AC.

Folglich wird durch das Resultat des vorhergehenden Problemes die Gleichgewichtsbedingung ausgedrückt durch die Relation

$$\frac{OB.OD}{BD^2}\left(\frac{B.B\beta.Bb}{AB.CB.b\beta}+\frac{D.D\delta.Dd}{AD.CD.d\delta}\right)=\frac{OA.OC}{AC^2}\left(\frac{A.A\alpha.Aa}{BA.DA.a\alpha}+\frac{C.C\gamma.Cc}{BC.DC.c\gamma}\right).$$

Euler, Act. Acad. Petrop. 1779, P. 2, p. 106.

5. Zwei gleiche, stabförmige Körper AB, AC, beweglich um ein Charnier in A, befinden sich auf dem konvexen Umfange eines Kreises in einer vertikalen Ebene. Zu finden ihre gegenseitige Neigung, wenn sie im Gleichgewichte sind.

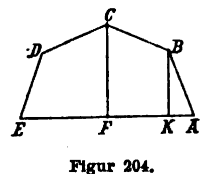
Es sei $2a$ die Länge eines jeden der Stäbe, 2ϑ ihre gegenseitige Neigung, r der Radius des Kreises. Dann wird sich für ϑ die Gleichung ergeben

$$r\cos\vartheta = a\sin^3\vartheta.$$

6. Drei gleichförmige Stäbe AB, BC, CD von derselben Dicke und den Längen l, $2l$, l resp. sind in B und C durch Charniere verbunden und ruhen auf einer vollkommen glatten Kugel mit dem Radius $2l$ so, dass der Mittelpunkt von BC und die Enden von AB, CD mit der Kugel in Berührung sind. Zu vergleichen die Pressung in dem Mittelpunkte von BC und die Pressungen in A und D mit dem Gewichte der drei Stäbe.

Es sei G das Gesamtgewicht der drei Stäbe, R der Druck in jedem der Punkte A und D, R' der Druck im Mittelpunkte von BC, dann wird sich ergeben

$$\frac{R}{G}=\frac{3}{40},\quad \frac{R'}{G}=\frac{91}{100}.$$



Figur 204.

7. Vier gleiche, gleichförmige Stäbe AB, BC, CD, DE (Fig. 204) sind mit ihren Enden durch Charniere verbunden und ruhen im Gleichgewichte in einer vertikalen Ebene. Die Distanzen AE und CF, von welchen die letztere senkrecht zu AE und vertikal ist, sind gegeben. Welches sind die Gleichgewichtsbedingungen?

Wenn α, β die Horizontalneigungen von AB und ED, BC und DE, so müssen wir erhalten

$$tg\,\alpha = 3\,tg\,\beta.$$

Ziehe BK rechtwinkelig zu AE, lasse sein $CF=a$, $AF=b$, $FK=x$, $BK=y$, dann ergiebt sich durch die Gleichung in α und β und die geometrische Beschaffenheit der Figur

$$x=\frac{a^2+2b^2-(a^4+a^2b^2+b^4)^{\frac{1}{2}}}{2b},\quad y=\frac{2a^2+b^2-(a^4+a^2b^2+b^4)^{\frac{1}{2}}}{2a}.$$

Diese Werte von x und y wurden durch Couplet erlangt in seinen Recherches sur la Construction des Combles de Charpente, in Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1731, p. 69.

1—7. Walton, p. 103—113.

Zweite Abteilung.

Gleichgewicht unveränderlicher, materieller Systeme mit Rücksicht auf Reibung. Die sich berührenden Oberflächen sind rauh.

Statische Reibung ist der Widerstand gegen die relative Bewegung zweier sich berührender, materieller Körper, er ist die Folge der Rauheit der sich berührenden Flächen. Wenn die materiellen Körper vollkommen glatte Oberflächen besässen, so würde ihr gegenseitiger Druck in jedem Punkte der Berührungsflächen in der Richtung einer bestimmten geraden Linie liegen und diese Richtung abhängig sein von der Gestalt der Oberflächen der Körper. Wird aber die Rauheit der sich berührenden Flächen in Erwägung gezogen, dann wird der Reibungswiderstand sich in jedem Punkte in einer Richtung äussern, welcher senkrecht ist zu der Richtung des vollkommener Glattheit entsprechenden gegenseitigen Druckes. Die Ermittelung der Grösse des Reibungswiderstandes für bestimmte Substanzen und für gegebene, sich berührende Oberflächen kann nur durch Experimente geschehen.

Angenommen, es bezeichne R den gegenseitigen Totaldruck zweier Körper, die sich mit zwei ebenen Flächen berühren, F die grösste Kraft, welche die Reibung zur Verhinderung der relativen Bewegung ausüben kann, so ist F als das Mass der statischen Reibung zu nehmen. Nach der Ausführung zahlreicher Experimente wurde Amontons, welcher zuerst diesen Gegenstand wissenschaftlich erörterte, dahin gebracht zu folgern, dass — so lange als die Massen dieselben blieben — F sich direkt mit R ändert und unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche ist. (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1699, p. 206.) Wenn also μ eine gewisse konstante Grösse bezeichnet, deren Wert durch Experimente erlangt worden ist, werden wir für irgendwelche bestimmte Substanzen haben

$$F = \mu . R$$

und wird μ der Reibungscoëfficient genannt. Indessen ist diese Relation, obgleich sie allgemein von den Mathematikern angenommen worden ist, wahrscheinlich nicht ganz richtig. Muschenbroek (Introdukt. ad Phil. Nat. Tom. I, cap. 9, 1762. Lect. Phys. Exp. Tom. I. p. 241) und der Abbé Nolet (Leçons de Physique, Expérimentale, Tom. I, p. 230, 1754) schlossen aus Experimenten, dass der Wert von μ in gewissem Grade von der Grösse der Berührungsfläche abhängt und dass er für eine gewisse Berührungsfläche nicht für alle Werte von R unveränderlich bleibt. Bossut (Traité de Mécanique, Part. I, chap. 4, sect. 1, p. 178) stimmte mit Amontons in der Annahme überein, dass μ unabhängig von der Berührungsfläche sei, aber er erkannte, dass der Wert von μ mit wachsendem R abnimmt. Verschiedene Experimentatoren haben ihre Arbeit demselben Gegenstande gewidmet und sind zu verschiedenen Schlüssen gekommen. Professor Vince (Philosophical Transactions 1785, Part. I, p. 165) folgerte aus den Resultaten sehr vieler sorgfältig ausgeführter Experimente, dass der Reibungscoëfficient wirklich mit wachsendem R abnimmt, dass er ferner bei gegebenem Drucke abnimmt, wenn die Berührungsfläche vermindert wird. Indessen geht aus den sehr wertvollen Experimenten von Coulomb (Mémoires présent à l'Académie Tom. X, 1785) und Ximenes (Terria e Pentica delle Resist. de' Sol. ne' loro Attr. Pisa 1782) hervor, dass die Änderung von μ, welche ihren Grund in irgend einer Änderung der Berührungsfläche hat, äusserst klein und von unregelmässigem Charakter ist, und dass sie sehr wenig mit wachsendem R abnimmt. Bossut (Traité de Mécanique, Part. I, chap. 4, sect. 1,

p. 178) hat bemerkt, dass die statische Friktion zwischen zwei Substanzen dadurch grösser wird, wenn man ihnen gestattet, einige Zeit hindurch, ehe die Bewegung beginnt, in Berührung zu bleiben, eine Beobachtung, welche durch die Experimente von Coulomb vollständig bestätigt wurde.

Wenn die sich berührenden Oberflächen keine ebenen Flächen sind, so wird der Reibungscoëfficient dadurch eine Änderung seines Wertes erfahren, im allgemeinen ist er dann abhängig von der Gestalt der sich berührenden Oberflächen und der Beschaffenheit der Substanzen. Die Reibung zwischen einem festen und einem hohlen Cylinder ist von Coulomb und Ximenes untersucht worden, welche sie viel kleiner als diejenige zwischen zwei ebenen Flächen derselben Substanz gefunden haben. Der Reibungscoëfficient ist indessen annähernd konstant, wie in dem Falle ebener Berührungsflächen.

Die Reibung, von welcher wir eben gesprochen haben und welche entsteht, wenn sich zwei Körper aufeinander gleitend bewegen, wird die gleitende Reibung genannt. Die Rauheit der Substanzen erzeugt aber auch eine der relativen Bewegung entgegenwirkende Kraft in dem Falle wo ein Körper genötigt ist, auf einem anderen Körper entlang zu rollen ohne zu gleiten. In diesem Falle haben wir die sogenannte Reibung der Cohäsion, sie ist wahrscheinlich abhängig von der gegenseitigen Anziehung der Oberflächenteilchen beider Körper. Diese Gattung von Reibung wurde zuerst durch Bossut bemerkt und später durch Ximenes und Coulomb sorgfältig in dem Falle erforscht, wenn ein Cylinder auf einer Ebene rollt, wobei gefunden wurde, dass die Reibung der Cohäsion sich umgekehrt wie der Durchmesser des Cylinders ändert.

Die Reibung, welche zwischen zwei sich berührenden Substanzen, die sich in Bewegung befinden, entsteht und dynamische Reibung genannt wird, ist viel bedeutend kleiner als die statische Reibung. Die dynamische Reibung wird gemessen durch die Kraft, welche nötig ist, den Körper im Bewegungszustande zu erhalten, die statische Reibung durch die Kraft, welche erforderlich ist, einen Körper aus dem Zustande der Ruhe in denjenigen der Bewegung überzuführen. Der Unterschied in der Grösse der statischen und dynamischen Reibung wurde zuerst bemerkt von Camus (Traité des Forces Mouvantes) und Desaguliers (Cours de Physique) und später von mehreren anderen Experimentatoren. Professor Vince ermittelte durch Experimente, dass die dynamische Reibung für harte Substanzen eine konstante Kraft, welches auch die Geschwindigkeit der relativen Bewegung sei, dass sie aber im Falle von weichen Körpern bedeutend zunimmt, wenn die Geschwindigkeit wächst. Die Zapfenreibung ist vollständig durch Coulomb in Les Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1790 betrachtet worden. Die Reibung und Steifigkeit von Seilen wurde zuerst experimentell erforscht durch Amontons, worüber sich in dem oben erwähnten Schriftstücke Näheres findet, sodann durch Coulomb und Ximenes. Weiteres über diesen Gegenstand findet der Leser in der theoretischen Mechanik von Weisbach. In neuerer Zeit sind mehrfache Versuche ausgeführt worden zum Zwecke der Bestimmung des Reibungscoëfficienten.

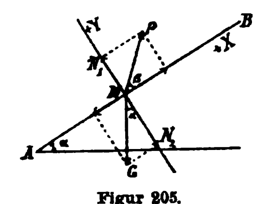
Erster Abschnitt.

Gleichgewicht materieller Punkte.

1. Ein schwerer Punkt M befindet sich auf einer unter dem Winkel α zum Horizonte geneigten Ebene, an ihm wirke eine Kraft P so, dass

ihre Richtung in der Vertikalebene durch die Linie des schnellsten Falles der geneigten Ebene liegt und mit dieser Linie den Winkel β einschliesst. 1) Wie gross muss bei vorhandener Reibung die Kraft P sein, um den materiellen Punkt die geneigte Ebene hinaufzuziehen? 2) Wie gross muss unter denselben Verhältnissen P sein, damit der Punkt durch sie im Gleichgewichte erhalten werde?

Ist G das Gewicht des materiellen Punktes M, dann greifen an dem Punkte M vier Kräfte an, nämlich G, P, und die zu AB senkrechten Reaktionen N_1, N_2 entgegenwirkend den in die Normale zu AB fallenden Componenten von G und P, so dass die Gesamtreaktion der geneigten Ebene $(N_1 - N_2)$. Der Druck $(N_1 - N_2)$ erzeugt die entlang der Ebene wirkende Reibung, welche sich als eine Kraft μ $(N_1 - N_2)$ repräsentiert, und ist diese Kraft im ersten Falle als Widerstand der Kraft P, im zweiten als Hilfskraft von P anzusehen.



Figur 205.

Indem wir die Kräfte parallel und senkrecht zur geneigten Ebene zerlegen, MBX als Abscissenaxe, die zu ihr senkrechte Gerade MY als Ordinatenaxe ansehen (Fig. 205), erhalten wir

Kräfte	X	Y	Kräfte	X	Y
G	$-G\sin\alpha$	$-G\cos\alpha$	N_1	0	$+N_1$
P	$+P\cos\beta$	$+P\sin\beta$	N_2	0	$-N_2$
			$(N_1 - N_2)\mu$	$\mp(N_1 - N_2)\mu$	0,

womit sich die Gleichgewichtsbedingungen ergeben

$$P\cos\beta - G\sin\alpha \mp \mu(N_1 - N_2) = 0, \quad (1)$$

$$P\sin\beta - G\cos\alpha + (N_1 - N_2) = 0. \quad (2)$$

Für den Druck auf die schiefe Ebene folgt aus (2)

$$(N_1 - N_2) = G\cos\alpha - P\sin\beta. \quad (3)$$

Durch (1) haben wir $(N_1 - N_2) = \dfrac{P\cos\beta - G\sin\alpha}{\pm\mu}$. (4)

Daher ist mit (3) und (4)

$$\pm\mu(G\cos\alpha - P\sin\beta) = P\cos\beta - G\sin\alpha,$$

woraus

$$P = G\frac{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}{\cos\beta \pm \mu\sin\beta}. \quad (5)$$

Durch diese Gleichung ist die Kraft P für beide Fälle bestimmt, das obere Zeichen entspricht dem Falle der Bewegung die geneigte Ebene hinauf, das untere der Gleichgewichtslage. Führen wir an Stelle des Reibungscoëfficienten μ den Reibungswinkel ϱ ein, dann ist $\mu = tg\,\varrho$, und wir erhalten

$$P = G\frac{\sin\alpha \pm \frac{\sin\varrho}{\cos\varrho}\cos\alpha}{\cos\beta \pm \frac{\sin\varrho}{\cos\varrho}\sin\beta} = G\frac{\sin\alpha\cos\varrho \pm \cos\alpha\sin\varrho}{\cos\beta\cos\varrho \pm \sin\beta\sin\varrho},$$

$$P = G\frac{\sin(\alpha \pm \varrho)}{\cos(\beta \mp \varrho)}. \tag{6}$$

Für einige spezielle Fälle ergeben sich damit folgende Resultate:

Ist die Richtung der Kraft P parallel zur Falllinie der geneigten Ebene, dann ist $\beta = 0$, folglich

$$P = G(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha) = G\frac{\sin(\alpha \pm \varrho)}{\cos\varrho}.$$

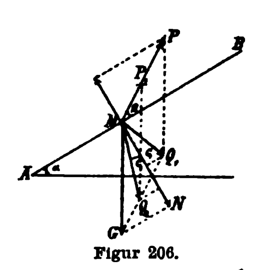
Wirkt die Kraft P in horizontaler Richtung, dann ist $\beta = -\alpha$, $\cos\beta = \cos\alpha$, $\sin\beta = -\sin\alpha$, daher

$$P = G\frac{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}{\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha} = G\,tg(\alpha \pm \varrho).$$

Befindet sich der materielle Punkt auf einer horizontalen Ebene, so wird $\alpha = 0$, die Kraft zum Fortschieben ist

$$P = G\frac{\mu}{\cos\beta + \mu\sin\beta} = G\frac{\sin\varrho}{\cos(\beta - \varrho)},$$

und wenn in diesem Falle $\beta = 0$ ist, so wird $P = \mu G = G\,tg\,\varrho$.



Figur 206.

Zu denselben Resultaten können wir auch auf rein geometrischem Wege gelangen. Stellen wir uns die Reibung als eine am Punkte M thätige Kraft vor, welche mit der Normalen MN zu der schiefen Ebene AB den Reibungswinkel ϱ einschliesst, dann ist im ersten Falle MQ_1, im zweiten MQ_2 die Richtung dieser Kraft, wobei $\sphericalangle NMQ_1 = \sphericalangle NMQ_2 = \varrho$ (Fig. 206) und es muss im ersten Falle MQ_1, und im zweiten MQ_2 die Resultante aus P und G sein. Der verlangte Zustand ist also hergestellt, wenn das Parallelogramm GQ_1PM, resp. GQ_2P_1M so beschaffen, dass die Resultante MQ_1, resp. MQ_2 mit der Normalen den Reibungswinkel ϱ einschliesst. Im ersten Falle wirkt die Reibung der Kraft P entgegen, es ist daher die Richtung der Resultanten so anzutragen, dass dieselbe zwischen N und P fällt und GQ_1PM das verlangte Parallelogramm ist, aus welchem sich ergiebt:

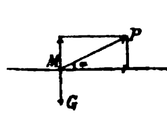
$$P : G = \sin\sphericalangle GMQ_1 : \sin\sphericalangle PMQ_1.$$

Nun ist aber $\sphericalangle GMQ_1 = \sphericalangle GMN + \sphericalangle NMQ_1 = \alpha + \varrho$,

$$\sphericalangle PMQ_1 = \sphericalangle PMB + \sphericalangle BMN = \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right).$$

womit $$P : G = sin\,(\alpha + \varrho) : sin\left\{\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right\},$$
$$P : G = sin\,(\alpha + \varrho) : cos\,(\beta - \varrho),$$
folglich $$P = G\,\frac{sin\,(\alpha + \varrho)}{sin\,(\beta - \varrho)}.$$
Im zweiten Falle ist eine kleinere Kraft nötig, wir haben die Richtung der Resultante MQ_2 so an die Normale MN anzutragen, dass sie zwischen dieselbe und G fällt, sodann aus G, der Richtung von MQ_2 und der Richtung von P das Parallelogramm MP_1Q_2G zu bilden. Wir bekommen damit auf gleiche Weise wie vorhin, oder wenn wir in der soeben gefundenen Gleichung an die Stelle von ϱ $-\varrho$ setzen, $P = G\,\frac{sin(\alpha - \varrho)}{cos(\beta + \varrho)}$. Diese Werte sind mit den oben gefundenen identisch. Die kleinste Vergrösserung der ersten Kraft bewirkt eine Bewegung die geneigte Ebene hinauf, die kleinste Verminderung der zweiten eine solche die schiefe Ebene hinab. Der materielle Punkt bleibt demnach in Ruhe solange als $P \leqq G\,\frac{sin\,(\alpha + \varrho)}{cos\,(\beta - \varrho)}$ und $P \geqq G\,\frac{sin\,(\alpha - \varrho)}{cos\,(\beta + \varrho)}$.

2. Ein materieller Punkt vom Gewichte G wird auf einer horizontalen Ebene mit einer Kraft P fortgezogen, welche mit dieser Ebene den Winkel α einschliesst (Fig. 207). Bei welchem Winkel α wird die Zugkraft ein Minimum?

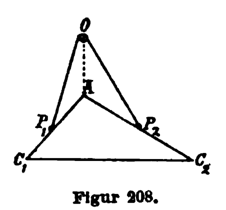


Figur 207.

Zerlegen wir P parallel und senkrecht zu der horizontalen Ebene, so ist der Druck auf dieselbe $(G - P\,sin\,\alpha)$, welcher die Reibung $\mu\,(G - P\,sin\,\alpha)$ erzeugt. Die Bewegung parallel zur Ebene erfolgt mit einer Kraft $P\,cos\,\alpha$, daher haben wir die Bedingung
$$P\,cos\,\alpha = \mu\,(G - P\,sin\,\alpha), \qquad \text{woraus} \qquad P = \frac{\mu\,G}{cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha}.$$
Der Zähler dieses Bruches ist konstant, so dass sein Wert nur von dem Nenner abhängen kann. Mit $y = cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha$, ist aber $\frac{dy}{d\alpha} = -\,sin\,\alpha + \mu\,cos\,\alpha$, $\frac{d^2y}{d\alpha^2} = -\,(cos\,\alpha + \mu\,sin\,\alpha)$. Die erste Ableitung wird gleich Null mit $tg\,\alpha = \mu$, in welchem Falle $\frac{d^2y}{d\alpha^2} = -\sqrt{1 + \mu^2}$, also negativ ist. Daher wird der Nenner mit $tg\,\alpha = \mu$ ein Maximum, folglich der Bruch ein Minimum. Der verlangte Minimalwert von P ist mithin
$$P_{min} = \frac{\mu\,G}{cos\,\alpha + tg\,\alpha\,sin\,\alpha} = \mu\,G\,cos\,\alpha = \frac{\mu\,G}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Für Fuhrwerke auf schlechten Strassen kann $\mu = 0{\cdot}1$ angenommen werden. Damit bekommen wir $tg\,\alpha = 0{\cdot}1$, $\measuredangle\,\alpha = 6^0$. Folglich ist die Richtung der Zugstange oder Zugseile bei Fahrwerken um 6^0 zur horizontalen Fahrbahn geneigt anzunehmen.

3. Zwei schwere Punkte P_1, P_2 (Fig. 208) ruhen auf zwei geneigten Ebenen $C_1 A$, $C_2 A$, sie sind durch einen gewichtslosen Faden verbunden, welcher über eine glatte Rolle O in der Vertikalen durch A läuft. Welches ist die Lage von P_1 und P_2, wenn P_1 von P_2 eben nur in der Ruhe erhalten wird?



Figur 208.

Es sei a die Länge des Fadens $P_1 O P_2$, T seine Spannung, welche durchweg dieselbe sein wird, G_1 das Gewicht von P_1, G_2 dasjenige von P_2. Ferner seien μ_1, μ_2 die Reibungscoëfficienten für die Ebenen $C_1 A$, $C_2 A$, R_1, R_2 die Reaktionen, α_1, α_2 die Vertikalneigungen der beiden Ebenen, ϑ_1, ϑ_2 die Vertikalneigungen der beiden Teile des Fadens.

Indem wir die am Punkte P_1 wirkenden Kräfte parallel und senkrecht zur Ebene $C_1 A$ zerlegen, erhalten wir für das Gleichgewicht dieses Punktes

$$\mu_1 R_1 + T\cos(\alpha_1 - \vartheta_1) = G_1 \cos\alpha_1, \tag{1}$$
$$R_1 + T\sin(\alpha_1 - \vartheta_1) = G_1 \sin\alpha_1. \tag{2}$$

Auf dieselbe Weise ist für das Gleichgewicht von P_2

$$\mu_2 R_2 + G_2 \cos\alpha_2 = T\cos(\alpha_2 - \vartheta_2), \tag{3}$$
$$R_2 + T\sin(\alpha_2 - \vartheta_2) = G_2 \sin\alpha_2. \tag{4}$$

Aus (1) und (2), sowie aus (3) und (4) folgt

$$T\left\{\cos(\alpha_1 - \vartheta_1) - \mu_1 \sin(\alpha_1 - \vartheta_1)\right\} = G_1(\cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1),$$
$$T\left\{\cos(\alpha_2 - \vartheta_2) + \mu_2 \sin(\alpha_2 - \vartheta_2)\right\} = G_2(\cos\alpha_2 + \mu_2 \sin\alpha_2),$$

und wenn wir T aus diesen beiden Gleichungen eliminieren,

$$G_2(\cos\alpha_2 + \mu_2 \sin\alpha_2)\left\{\cos(\alpha_1 - \vartheta_1) - \mu_1 \sin(\alpha_1 - \vartheta_1)\right\}$$
$$= G_1(\cos\alpha_1 - \mu_1 \sin\alpha_1)\left\{\cos(\alpha_2 - \vartheta_2) + \mu_2 \sin(\alpha_2 - \vartheta_2)\right\}.$$

Führen wir hier den Reibungswinkel ein, so ist $\mu_1 = tg\,\varrho_1$, $\mu_2 = tg\,\varrho_2$ und geht damit die Gleichung über in

$$G_2 \cos(\alpha_2 - \varrho_2)\cos(\alpha_1 - \vartheta_1 + \varrho_1)$$
$$= G_1 \cos(\alpha_1 + \varrho_1)\cos(\alpha_2 - \vartheta_2 - \varrho_2). \tag{5}$$

Ferner ist durch die Geometrie, wenn $OA = k$ gesetzt wird,

$$O P_1 = \frac{k \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \vartheta_1)}, \qquad O P_2 = \frac{k \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \vartheta_2)},$$

und daher, weil $OP_1 + OP_2 = a$ ist,

$$a = \frac{k \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \vartheta_1)} + \frac{k \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \vartheta_2)}. \quad (6)$$

Mittelst der Gleichungen (5) und (6) müssen die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 nun noch bestimmt werden.

4. Gegeben die halbe Summe und der halbe Unterschied des grössten und kleinsten Winkels, welchen die Richtung einer Kraft, einen schweren Punkt auf einer geneigten Ebene unterstützend, machen kann mit der Ebene, und die kleinste Elevation der Ebene, bei welcher der materielle Punkt, ohne irgendwie weiter unterstützt zu sein, auf ihr herabgleiten würde. Zu bestimmen den Winkel, bei welchem die nämliche Kraft denselben Punkt auf einer glatten geneigten Ebene von derselben Elevation halten würde.

Es bezeichne ε den kleinsten Winkel, welchen die Kraft mit der rauhen, den Punkt unterstützenden Ebene einschliessen kann, P die Grösse der Kraft, R die Reaktion der Ebene rechtwinkelig zu ihr selbst, μ den Reibungscoëfficienten, α die Horizontalneigung der Ebene, G das Gewicht des materiellen Punktes. Damit haben wir für das Gleichgewicht des materiellen Punktes durch Kräftezerlegung parallel und senkrecht zu der geneigten Ebene

$$P \cos \varepsilon = \mu R + G \sin \alpha, \qquad P \sin \varepsilon + R = G \cos \alpha.$$

Durch Elimination von R aus diesen Gleichungen bekommen wir

$$P(\cos \varepsilon + \mu \sin \varepsilon) = G(\mu \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (1)$$

Es sei nun ϱ die kleinste Elevation der Ebene für den nicht gehaltenen materiellen Punkt, bei welcher er auf ihr heruntergleitet, dann wird $tg\, \varrho = \mu$ sein, und wir erhalten vermöge (1)

$$P = G \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos(\varepsilon - \varrho)}. \quad (2)$$

Wenn ε' den grössten Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der Kraft mit der geneigten Ebene in Übereinstimmung mit dem Gleichgewichte des Punktes einschliessen kann, dann wird die Reibung mit der grössten Intensität, welche sie auszuüben vermag, die Ebene hinaufwirken, folglich erhalten wir durch (2), μ negativ nehmend, oder $-\varrho$ für ϱ setzend und ε' für ε wählend,

$$P = G \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos(\varepsilon' + \varrho)}. \quad (3)$$

Ist nun ε'' der Neigungswinkel von P im Falle einer glatten Ebene derselben Elevation, so bekommen wir mit (2), $\varrho = 0$ und ε'' für ε setzend,

$$P = G \frac{\sin \alpha}{\cos \varepsilon''}. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\cos(\varepsilon - \varrho) + \cos(\varepsilon' + \varrho) = \frac{P}{G}\left\{\sin(\alpha + \varrho) + \sin(\alpha - \varrho)\right\},$$

und daher bekommen wir, wenn $S = \frac{1}{2}\left(\varepsilon' + \varepsilon\right)$, $D = \frac{1}{2}\left(\varepsilon' - \varepsilon\right)$ gesetzt wird,

$$2 \cos S \cos(D + \varrho) = 2 \frac{G}{P} \sin \alpha \cos \varrho = 2 \cos \varepsilon'' \cos \varrho, \text{ mit (4)},$$

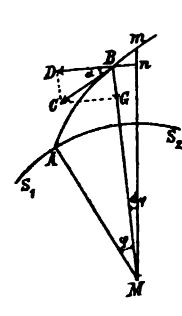
mithin ist

$$\cos \varepsilon'' = \frac{\cos S}{\cos \varrho} \cos(D + \varrho),$$

welche Gleichung den verlangten Winkel bestimmt.

3 und 4. Walton, p. 52—54.

5. Auf der Erdoberfläche befindet sich an einer gewissen Stelle ein Sandhaufen. Welches ist dessen Böschungslinie?



Figur 209.

Es sei Figur 209 ein Schnitt durch den Mittelpunkt M der Erde und den Sandkörper in vertikaler Richtung, so dass $S_1 S_2$ der Schnitt durch die Erdoberfläche, AB der Schnitt durch die Oberfläche des Sandkörpers, welcher aus einzelnen materiellen Punkten (Sandkörnern) besteht. Die Erde sei kugelförmig gedacht. Jedes materielle Teilchen des Sandkörpers befindet sich unter der Wirkung der Schwerkraft, welche nach dem Erdmittelpunkte M hin gerichtet ist. Denken wir uns an irgend einer Stelle der Böschungslinie des Sandkörpers ein materielles Teilchen B, so wird die Tangente BC im Punkte B an die Böschungslinie mit der durch den Kugelmittelpunkt gehenden Geraden BM stets denselben Winkel machen müssen, wenn Gleichgewicht sein soll. Mit $BD \perp BM$ muss also, wenn $\measuredangle CBD = \alpha$, $tg\, \alpha = \mu =$ dem Reibungscoëfficienten sein, damit ein Heruntergleiten des Punktes B auf der Linie BA nicht stattfinden kann. Es bezeichne $R = AM$ den Halbmesser der Erdkugel, $r = BM$ den Abstand des Punktes B von dem Erdmittelpunkte, φ den Winkel AMB. Lassen wir den Winkel φ zunehmen um $d\varphi = \measuredangle BMm$, schneidet die Richtung von BD in n den Fahrstrahl Mm, so haben wir $Bn = r\, d\varphi$, $mn = dr$, $tg\, \alpha = \frac{mn}{Bn} = \frac{dr}{r\, d\varphi}$. Da nun für den Gleichgewichtszustand $tg\, \alpha = \mu$ sein muss, so ergiebt sich die Bedingung

$$\frac{dr}{r} = \mu\, d\varphi.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$l(r) = \mu\varphi + C.$$

Mit $\varphi = 0$ ist $r = R$, daher $l(R) = C$, wodurch

$$l(r) = \mu\varphi + l(R), \qquad l\left(\frac{r}{R}\right) = \mu\varphi, \qquad \therefore r = R\, e^{\mu\varphi}.$$

Dieses ist die Gleichung der logarithmischen Spirale. Mithin ist unter den gemachten Voraussetzungen die Böschungslinie eines Sandhaufens eine logarithmische Spirale.

Für Flüssigkeiten ist der Reibungscoëfficient $\mu = 0$, folglich die Gleichung ihrer Böschungslinie $r = R$, d. h. die Oberfläche der Flüssigkeiten ist kugelförmig.

6. P ist der tiefste Punkt des rauhen Umfanges eines Kreises in einer vertikalen Ebene, auf welchem ein schwerer Punkt ruhen kann; die Reibung sei gleich dem Drucke. Welches ist die Horizontalneigung des Halbmessers durch P?

Der verlangte Winkel ist $= \frac{\pi}{4}$.

7. Eine gegebene Kraft P, welche in horizontaler Richtung wirkt, hält gerade einen Körper von gegebenem Gewichte G auf einer rauhen Ebene mit der Neigung ϑ. Derselbe Körper kann, ohne gehalten zu sein, nur auf einer Ebene von demselben Material mit der Neigung α ruhen. Welches ist der Winkel ϑ?

$$\vartheta = arc\left(tg = \frac{P + G\, tg\, \alpha}{G - P\, tg\, \alpha}\right).$$

8. Ein schwerer Punkt ist auf eine rauhe Ebene mit dem Neigungswinkel α gebracht worden. Zu ermitteln, ob es leichter sein wird, den Punkt aufzuheben, oder die Ebene entlang zu ziehen.

Es wird leichter sein, den schweren Punkt zu heben oder entlang zu ziehen,

je nachdem $\mu \lesseqgtr \dfrac{sin\left(\frac{\pi - 2\alpha}{4}\right)}{sin\left(\frac{\pi + 2\alpha}{4}\right)}$.

9. Ein Gewicht wird auf einer rauhen geneigten Ebene durch eine ihm genau gleiche Kraft gehalten. Welches ist die Richtung dieser Kraft?

Bezeichnet ϑ die Neigung der Kraft zu der schiefen Ebene, α die Neigung der Ebene, μ den Reibungscoëfficienten, so ist

$$\vartheta = \alpha - 2\beta + \frac{3}{2}\pi,$$

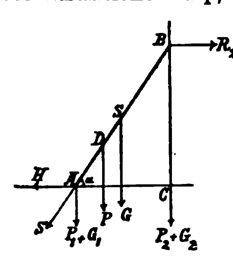
wo β irgend einen Wert zwischen $-arc\,(tg = \mu)$ und $+arc\,(tg = \mu)$ besitzen kann.

6—9. Walton, p. 54—55.

Zweiter Abschnttt.

Gleichgewicht eines einzelnen Körpers.

1. Ein gerader stabförmiger Körper AB vom Gewichte G stützt sich mit seinem unteren Ende gegen eine horizontale, mit seinem oberen Ende gegen eine vertikale rauhe Ebene (Fig. 210). Die vertikale Ebene durch AB ist senkrecht auf den beiden Stützflächen. Der Stab trägt in dem Abstande a von dem unteren Ende in dem Punkte D eine Last P; $2l$ ist die Länge des Stabes, welcher unter einem Winkel α zum Horizonte geneigt ist, und es greife G in seinem geometrischen Mittelpunkte an. Zu bestimmen die Gleichgewichtslage des Stabes AB und die Reaktionen R_1, R_2 der Ebenen in den Punkten A, B.



Figur 210.

Die Aufgabe lässt sich lösen 1) durch Kräftezerlegung, 2) durch Anwendung der Kräftepaare, 3) durch Benutzung der in den Stützpunkten entstehenden Reaktionen.

1) Zerlegung der Kräfte. Nach dem Hebelgesetze sind die in den Stützpunkten A und B vertikal abwärts wirkenden Kräfte, hervorgebracht durch P und G (Fig. 210),

$$P_1 = \frac{2l-a}{2l} P, \qquad P_2 = \frac{a}{2l} P, \qquad G_1 = G_2 = \frac{1}{2} G.$$

Sind μ_1, μ_2 die Reibungscoëfficienten für die horizontale und die vertikale Ebene, ist S der Druck in der Richtung des Stabes, H seine Horizontalcomponente, V seine Vertikalcomponente in A, so haben wir für den Druck in B

$$(P_2 + G_2 - \mu_2 R_2)\, cotg\, \alpha = R_2, \quad \text{woraus} \quad R_2 = \frac{(P_2 + G_2)\, cotg\, \alpha}{1 + \mu_2\, tg\, \alpha}.$$

Der Druck in der Richtung des Stabes ist

$$S = \frac{P_2 + G_2 - \mu_2 R_2}{sin\, \alpha},$$

und dessen genannte Componenten sind

$$V = S\, sin\, \alpha = P_2 + G_2 - \mu_2 R_2, \qquad H = (P_2 + G_2 - \mu_2 R_2)\, cotg\, \alpha.$$

Für das Gleichgewicht muss nun die Bedingung erfüllt werden

$$H = (P_1 + G_1 + V)\mu_1,$$

folglich muss sein:

$$\left(P\frac{a}{2l} + \frac{1}{2} G\right) \frac{cotg\, \alpha}{1 + \mu_2\, cotg\, \alpha}$$

$$= \mu_1 \left\{ \frac{2l-a}{2l} P + \frac{1}{2} G + \frac{a}{2l} P + \frac{1}{2} G - \mu_2 \frac{\frac{a}{2l} P + \frac{1}{2} G}{1 + \mu_2\, cotg\, \alpha}\, cotg\, \alpha \right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nach einer einfachen Rechnung

$$tg\,\alpha = \frac{(P a + G l)(1 + \mu_1 \mu_2)}{2 \mu_1 l (P + G)} - \mu_2,$$

womit die Gleichgewichtslage bestimmt ist.

Für dieselbe erhalten wir als Reaktionen in den Stützpunkten A und B

$$R_1 = P_1 + G_1 + V = \frac{(P + G)}{1 + \mu_1 \mu_2},$$

$$R_2 = \frac{(P_2 + G_2)\,cotg\,\alpha}{1 + \mu_2\,tg\,\alpha} = \frac{\mu_1 (P + G)}{1 + \mu_1 \mu_2}.$$

In dem besonderen Falle, wo die beiden Stützebenen von gleicher Beschaffenheit, also $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ist, bekommen wir durch diese Resultate

$$tg\,\alpha = \frac{(P a + G l)(1 + \mu^2)}{2 \mu l (P + G)} - \mu, \quad R_1 = \frac{P + G}{1 + \mu^2}, \quad R_2 = \frac{\mu (P + G)}{1 + \mu^2}.$$

2) **Anwendung der Kräftepaare.** Verlegen wir die beiden Kräfte P und G parallel ihrer Richtung nach dem Fusspunkte A des Stabes (Fig. 210 a), dann wirkt ausser der Kraft $P + G$ in A das Kräftepaar $(P a + G l) \cos \alpha$. Dieses Paar bringen wir auf die Breite $A C = 2 l \cos \alpha$, so ist die Kraft des neuen Paares $\frac{P a + G l}{2 l}$. Ein Teil dieser Kraft wird durch die Reibung an der vertikalen Wand absorbiert. Bringen wir das Paar auf die Breite $B C = 2 l \sin \alpha$, so wirken seine Kräfte normal zur vertikalen Ebene, und es muss sein

Figur 210 a.

$$R_2\, 2 l \sin a = \left(\frac{P a + G l)}{2 l} - \mu_2 R_2\right) 2 l \cos \alpha,$$

womit $$R_2 (tg\,\alpha + \mu_2) = \frac{P a + G l}{2 l}. \quad (1)$$

Die hierdurch bestimmte Kraft R_2 muss dem Reibungswiderstande in A gleich sein, welcher durch den Normaldruck $(P + G - \mu_2 R_2)$ hervorgebracht wird; dadurch ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$R_2 = \mu_1 (P + G - \mu_2 R_2), \quad \text{oder} \quad R_2 (1 + \mu_1 \mu_2) = (P + G) \mu_1,$$

d. h. $$R_2 = \frac{\mu_1 (P + G)}{1 + \mu_1 \mu_2}. \quad (2)$$

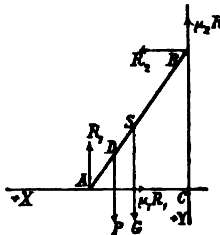
Mit (1) und (2) ist nun

$$\frac{P a + G l}{2 l} = \frac{\mu_1 (P + G)}{1 + \mu_1 \mu_2} (tg\,\alpha + \mu_2),$$

woraus folgt: $$tg\,\alpha = \frac{(P a + G l)(1 + \mu_1 \mu_2)}{2 \mu_1 l (P + G)} - \mu_2.$$

Noch ist der Druck auf die horizontale Ebene

$$R_1 = P + G - \mu_2 R_2 = \frac{P+G}{1+\mu_1 \mu_2}.$$



Figur 210 b.

3) Verwendung der in den Stützpunkten A und B entstehenden Reaktionen R_1 und R_2. Wir wählen die Ebene ACB (Fig. 210b) als Coordinatenebene mit C als Ursprung. CAX als Abscissen-, $CY \perp CX$, positiv abwärts, als Ordinatenaxe, womit wir das Kräfte- und Momententäfelchen bekommen:

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	0	G	$l \cos\alpha$	$-l \sin\alpha$	$G l \cos\alpha$
P	0	P	$-(2l-a)\cos\alpha$	$-(2l-a)\sin\alpha$	$P(2l-a)\cos\alpha$
R_1	0	$-R_1$	$2l\cos\alpha$	0	$-R_1 . 2l\cos\alpha$
R_2	R_2	0	0	$-2l\sin\alpha$	$R_2 . 2l\sin\alpha$
$\mu_1 R_1$	$-\mu_1 R_1$	0	$2l\cos\alpha$	0	0
$\mu_2 R_2$	0	$-\mu_2 R_2$	0	$-2l\sin\alpha$	0

Daraus ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$R_2 - \mu_1 R_1 = 0, \quad (1) \qquad P + G - R_1 - \mu_2 R_2 = 0, \quad (2)$$

$$G l \cos\alpha + P(2l - a)\cos\alpha - R_1 . 2l\cos\alpha + R_2 . 2l\sin\alpha = 0. \quad (3)$$

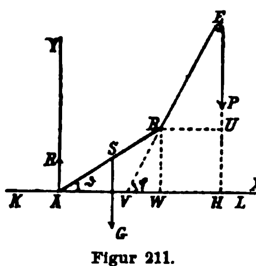
Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$R_1 = \frac{P+G}{1+\mu_1\mu_2}, \quad (4) \qquad R_2 = \frac{\mu_1(P+G)}{1+\mu_1\mu_2}, \quad (5)$$

und nun bekommen wir mit (3), (4), (5)

$$tg\,\alpha = \frac{(Pa + Gl)(1+\mu_1\mu_2)}{2\mu_1 l (P+G)} - \mu_2,$$

womit die Aufgabe analytisch vollständig gelöst ist.



Figur 211.

2. Ein gleichförmiger Stab AB (Fig. 211) stützt sich mit seinem tieferen Ende A auf eine rauhe, horizontale Ebene KL. Das andere Stabende B ist an einem gewichtslosen Seile befestigt, welches über eine in der vertikalen Ebene durch AB gelegene glatte Rolle E läuft und durch ein Gewicht P gespannt wird. Zu bestimmen die Lagen, in welchen der Stab folgerecht im Gleichgewichte sein kann.

Lasse sein S den Schwerpunkt des Stabes und G sein daselbst vertikal abwärts wirkendes Gewicht, ϑ, φ die Horizontalneigungen von AB, BE für irgend eine Gleichgewichtslage, $AS = BS = a$, F die Grösse der Reibung entlang LK, welche bei A hervorgerufen wird und rechtwinkelig zu der vertikalen Reaktion der Ebene auf den Stab wirkt.

Für das Gleichgewicht des Stabes haben wir, indem wir die Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegen und Momente um A nehmen,

$F = P\cos\varphi$, (1) $R + P\sin\varphi = G$, (2) $G a \cos\vartheta = P.2 a \sin(\varphi - \vartheta)$. (3)

Nehmen wir $F = \lambda R$, wo λ, wenn μ den Reibungscoëfficienten für die Reibung zwischen dem Stabende A und der Ebene bezeichnet, irgend einen Wert zwischen 0 und μ besitzen kann, so haben wir mit (1)

$$\lambda R = P\cos\varphi, \quad (4)$$

mit (2) und (4) $\qquad P\cos\varphi + \lambda P\sin\varphi = \lambda G,$

oder, mit $\lambda = tg\,\varepsilon$ $\qquad P\cos(\varphi - \varepsilon) = G\sin\varepsilon,$

welche Gleichung den Winkel φ bestimmt, da P, G, ε als bekannt vorausgesetzt werden. Ist ε bekannt, dann kann ϑ durch (3) ermittelt werden.

Dadurch, dass für ε irgend welche Werte zwischen Null und $arc(tg = \mu)$ gegeben sind, erhalten wir eine Reihe von Gleichgewichtslagen. Wird z. B. $\lambda = 0$ angenommen, so ist mit (4) $P\cos\varphi = 0$, und daher $\varphi = \frac{\pi}{2}$, folglich durch (3) $G\cos\vartheta = 2P\cos\vartheta$, demnach $G = 2P$, in welchem Falle ϑ unbestimmt bleibt und irgend einen Wert haben kann, oder $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (2) $R = G - P$, und daher müssen wir haben, wenn ϑ nicht gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, $R = P = \frac{1}{2}G$. Also sehen wir, dass das Ende B des Stabes in der vertikalen Linie durch E liegen muss und dass, wofern AB nicht vertikal gestellt ist, das Gewicht P dem halben Gewichte des Stabes gleich sein muss. Wenn der Stab vertikal gestellt ist, wird P irgend einen Wert zwischen 0 und G besitzen, aber nicht grösser als G sein, weil R nicht negativ sein kann.

Eine andere Lösung dieser Aufgabe ist die folgende. Wir nehmen die Coordinatenebene in der Ebene der Kräfte, den Stützpunkt A als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten mit ALX als Abscissenaxe, $AY \perp AX$, positiv nach oben, als Ordinatenaxe. Den Faden BEP denken wir uns zwischen B und E durchschnitten und an den Schnittpunkten die Kräfte T in den Richtungen BE und EB angebracht, wodurch das ganze System in zwei einzelne Systeme zerfällt, das erste ist der Stab mit den an ihm wirkenden Kräften $G, R, \mu R$ und T, das zweite die Rolle mit den Kräften T und P, so dass offenbar die Fadenspannung $T = P$ sein muss. Für die am ersten Systeme wirkenden Kräfte erhalten wir:

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	0	$-G$	$a\cos\vartheta$	$a\sin\vartheta$	$-Ga\cos\vartheta$
R	0	R	0	0	0
T	$P\cos\varphi$	$P\sin\varphi$	$2a\cos\vartheta$	$2a\sin\vartheta$	$2Pa\sin\varphi\cos\vartheta - 2Pa\cos\varphi\sin\vartheta$
μR	$-\mu R$	0	0	0	0

Daraus ergeben sich für das Gleichgewicht die Bedingungen

$$P\cos\varphi - \mu R = 0, \quad (1) \qquad P\sin\varphi + R - G = 0, \quad (2)$$

$$2P\sin(\varphi - \vartheta) - G\cos\vartheta = 0. \quad (3)$$

Ist das Gewicht P ausser dem Stabgewichte gegeben, so handelt es sich bei bekanntem Werte des Reibungscoëfficienten um die Bestimmung des Winkels ϑ.

Mit (1) und (2) ergiebt sich

$$P\cos\varphi = \mu R, \quad (4) \qquad P\sin\varphi = G - R. \quad (5)$$

Aus (5) folgt

$$\sin\varphi = \frac{G-R}{P}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{P^2-(G-R)^2}}{P}. \quad (6)$$

Durch Substitution des Wertes von $\cos\varphi$ aus (6) in (4) wird

$$\sqrt{P^2-(G-R)^2} = \mu R, \quad \text{oder} \quad R^2(1+\mu^2) - 2GR = P^2 - G^2,$$

woraus

$$R = \frac{1}{1+\mu^2}\left\{G \pm \sqrt{(1+\mu^2)P^2 - \mu^2G^2}\right\} = \frac{1}{1+\mu^2}\left\{G \pm M\right\}, \quad (7)$$

wenn $\sqrt{(1+\mu^2)P^2-\mu^2G^2} = M$ gesetzt wird

Führen wir nun diesen Wert der Reaktion in (4) und (5) ein, so kommt

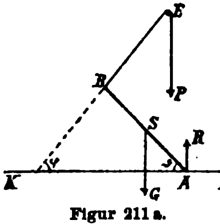
$$P\cos\varphi = \frac{\mu}{1+\mu^2}\left\{G \pm M\right\}, \quad (8) \quad P\sin\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}\left\{\mu^2 G \mp M\right\}, \quad (9)$$

Aus der Momentangleichung (3) bekommen wir

$$tg\,\vartheta = \frac{2P\sin\varphi - G}{2P\cos\varphi},$$

welche Gleichung mit den durch (8) und (9) gegebenen Werten von $P\cos\varphi$ und $P\sin\varphi$ übergeht in

$$tg\,\vartheta = \frac{(\mu^2-1)G \mp 2M}{2\mu(G \pm M)}. \quad (10)$$



Figur 211 a.

Da für die Reaktion R und die Tangente des Winkels ϑ zwei Werte sich ergeben, so ist klar, dass das System zwei Gleichgewichtslagen besitzt, das Gewicht P liegt dabei entweder ausserhalb (Fig. 211, S. 502) oder innerhalb des Flächenstreifens AB (Fig. 211a).

Für den Winkel φ bekommen wir mit (8) und (9)

$$tg\,\varphi = \frac{\mu^2G^2 \mp M}{\mu(G \pm M)}. \quad (11)$$

Ist die Richtung des Fadens, bei welcher Gleichgewicht stattfinden soll, gegeben, so haben wir, μ als bekannt vorausgesetzt, das Gewicht P und den Winkel ϑ zu ermitteln.

Zunächst ergiebt sich aus den Gleichungen (1) und (2) P und R. Mit (1) ist

$$R = \frac{P\cos\varphi}{\mu}, \tag{12}$$

welcher Wert, in (2) eingeführt, liefert

$$P = \frac{\mu G}{\mu\sin\varphi + \cos\varphi}. \tag{13}$$

Mit (12) und (13) wird

$$R = \frac{G}{1 + \mu\, tg\,\varphi}. \tag{14}$$

Die Gleichung (3) der Momente sagt uns, dass

$$tg\,\vartheta = \frac{2P\sin\varphi - G}{2P\cos\varphi},$$

und wenn wir den Wert von P aus (13) hier einsetzen, so wird

$$tg\,\vartheta = \frac{1}{2}\left\{tg\,\varphi - \frac{1}{\mu}\right\}, \tag{15}$$

womit auch der gesuchte Winkel bestimmt ist.

Endlich kann noch der Winkel ϑ, bei welchem Gleichgewicht stattfinden soll, gegeben sein, dann sind P, R und φ zu ermitteln.

Die Gleichungen (1) und (2) geben

$$P = \frac{\mu R}{\cos\varphi}, \qquad \mu R\, tg\,\varphi + R - G = 0,$$

so dass

$$R = \frac{G}{1 + \mu\, tg\,\varphi}, \quad (16) \qquad P = \frac{\mu G}{\mu\sin\varphi + \cos\varphi}, \tag{17}$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen (14) und (13) identisch sind

Mit diesem Werte von P gehen wir nun in die Gleichung (3), wodurch folgt

$$tg\,\varphi = \frac{2\mu\sin\vartheta + \cos\vartheta}{\mu\cos\vartheta} = 2\,tg\,\vartheta + \frac{1}{\mu}. \tag{18}$$

Diese Relation hätte auch aus (13) abgeleitet werden können. Wir sehen, dass in diesem und dem vorhergehenden Falle zwischen ϑ und φ eine von G und P unabhängige Beziehung besteht.

Mit (16), (17) und (18) erhalten wir nun für die Reaktion R und das Gewicht P die Gleichungen

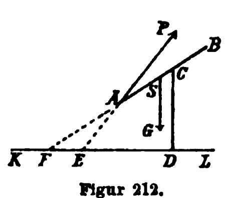
$$R = \frac{G}{2(1 + \mu\, tg\,\vartheta)}, \quad (19) \qquad P = \frac{G}{2(1 + \mu\, tg\,\vartheta)}\sqrt{\mu^2 + (1 + 2\mu\, tg\,\vartheta)^2}. \tag{20}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst und würde es sich noch darum handeln, spezielle Fälle zu betrachten, was jedoch dem Studierenden überlassen bleiben mag.

Erste Lösung: Walton, p. 77.

3. Ein Balken AB wird durch eine gegebene Kraft P, welche unter einem gegebenen Neigungswinkel zum Horizonte wirkt, und eine

Stütze CD gehalten. Die Lage des Balkens zu finden, wenn er in dem Zustande ist, über den Punkt C von A nach B zu gleiten. Die Stütze und der Balken seien relativ rauh.



Figur 212.

Es mögen (Fig. 212) BA, PA die horizontale Linie KL in den Punkten F, E treffen; S sei der Schwerpunkt des Balkens, G sein daselbst angreifendes Gewicht.

Lasse sein $AS = a$, $CS = x$, $\sphericalangle PEL = \alpha$, $\sphericalangle AFE = \vartheta$, $R =$ der Reaktion der Stütze, rechtwinkelig zu AB, dann wird μR der Reibungswiderstand sein, von welchem BA die Richtung ist.

Für das Gleichgewicht des Balkens haben wir, indem wir die Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung zerlegen und Momente um C nehmen,

$$P \cos\alpha - R \sin\vartheta - \mu R \cos\vartheta = 0, \ (1) \quad P \sin\alpha + R \cos\vartheta - G - \mu R \sin\vartheta = 0, \ (2)$$

$$G x \cos\vartheta - P(a + x) \sin(\alpha - \vartheta) = 0. \quad (3)$$

Durch die Gleichungen (1) und (2) ist hier

$$\frac{\cos\vartheta - \mu \sin\vartheta}{\sin\vartheta + \mu \cos\vartheta} = \frac{G - P \sin\alpha}{P \cos\alpha},$$

und daher

$$P \cos\alpha (1 + \mu \, tg\,\vartheta) = (G - P \sin\alpha)(tg\,\vartheta - \mu),$$

$$P(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - \mu G = \{G + P(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\} \, tg\,\vartheta.$$

$\mu = tg\,\varrho$ genommen, dann beide Seiten der Gleichung mit $\cos\varrho$ multipliziert, wird

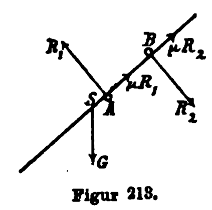
$$P \cos(\varrho - \alpha) - G \sin\varrho = \{P \sin(\varrho - \alpha) + G \cos\varrho\} \, tg\,\vartheta,$$

$$tg\,\vartheta = \frac{P \cos(\varrho - \alpha) - G \sin\varrho}{P \sin(\varrho - \alpha) + G \cos\varrho},$$

wodurch die Neigung des Stabes gegen den Horizont bestimmt ist.

Ist ϑ bekannt, dann können wir x durch die Gleichung (3) bestimmen, womit dann die Lage des Balkens vollständig gefunden ist. Wenn der Balken in dem Zustande ist, in der Richtung zu gleiten, welche der vorausgesetzten entgegengesetzt ist, so haben wir in den Formeln die Grösse μ durch $-\mu$ oder ϱ durch $-\varrho$ zu ersetzen, womit dieselben dann alle dem letzteren Falle angepasst sind.

Walton, p. 78.



Figur 213.

4. Ein gleichförmiger Stab liegt über einem festen Punkte A und unter einem festen Punkte B (Fig. 213) und wird im Gleichgewichte erhalten durch die Reibungswiderstände in den Punkten A und B. Unter welchen Verhältnissen ist der Stab im Gleichgewichte?

Lasse sein R_1, R_2 die Reaktionen der festen Punkte A, B auf den Stab, μR_1, μR_2 die Reibungswiderstände daselbst, S den Schwerpunkt des Stabes, G sein daselbst vertikal abwärts wirkendes Gewicht, $AB = a$, α = der Horizontalneigung von AB, $2b$ = der Länge des Stabes, $AS = x$. Zerlegen wir die an dem Stabe wirkenden Kräfte parallel und senkrecht zu seiner Richtung und nehmen wir Momente um S, so gelangen wir zu den Gleichgewichtsbedingungen

$$\mu(R_1 + R_2) - G \sin\alpha = 0, \quad (1) \qquad R_1 - G\cos\alpha - R_2 = 0, \quad (2)$$

$$R_1 x - R_2(x + a) = 0. \quad (3)$$

Mit (1) und (2), sowie mit (2) und (3) bekommen wir

$$2\mu R_2 = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \quad (4) \qquad a R_2 = G x \cos\alpha. \quad (5)$$

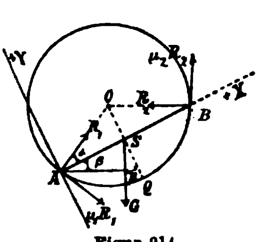
Daher ergiebt sich mit (4) und (5)

$$x = \frac{a}{2\mu}(tg\,\alpha - \mu). \quad (6)$$

Weil R_2 nicht negativ sein kann, so kann in (5) auch x nicht negativ sein. Überdies ist auch durch die Geometrie klar, dass $x < b - a$. Wenn $\frac{a}{2\mu}(tg\,\alpha - \mu) > b - a$, oder $\mu < \frac{a\,tg\,\alpha}{2b - a}$ ist, kann kein Gleichgewicht stattfinden.

Walton, p. 83.

5. Ein gleichförmiger Stab ruht innerhalb eines rauhen vertikalen Kreises. Die Lage des Stabes zu erforschen, wenn die Reibung eben nur das Gleichgewicht erhalten kann.



Figur 214.

Es sei (Fig. 214) die Länge des Stabes $AB = 2a$, sein Mittelpunkt S Angriffspunkt seines Gewichtes G, β die Horizontalneigung des Stabes, O der Mittelpunkt des Kreises, $OA = OB = r$ = dem Radius desselben, so dass auch $\measuredangle GSQ = \beta$, wo SQ die Gerade durch O. In den Stützpunkten A und B des Stabes wirken die Reaktionen R_1 und R_2 des Kreises, gerichtet nach seinem Centrum O, und es sei $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \alpha$. Die Coëfficienten der Reibung in den Punkten A, B seien verschieden, μ_1, μ_2, so dass die Widerstände der Reibung daselbst $\mu_1 R_1$, $\mu_2 R_2$; der erstere Widerstand wirkt senkrecht zu OA abwärts, der andere normal zu OB und aufwärts. Mit den in den Punkten S, A, B angreifenden Kräften G, R_1, $\mu_1 R_1$, R_2, $\mu_2 R_2$ erscheint der Stab als freies System, für welches die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen sind. Zu dem Ende sei A Ursprung des in der Ebene der Kräfte gelegenen Coordinatensystemes, AB der positive Teil der Abscissenaxe, $AY \perp AB$, positiv nach oben, die Ordinatenaxe. Damit bekommen wir das Kräfte- und Momententableau:

Kräfte	X	Y	x	y	$xY - yX$
G	$-G \sin\beta$	$-G\cos\beta$	a	0	$-Ga\cos\beta$
R_1	$R_1 \cos\alpha$	$R_1 \sin\alpha$	0	0	0
R_2	$-R_2\cos\alpha$	$R_2\sin\alpha$	$2a$	0	$2R_2 a \sin\alpha$
$\mu_1 R_1$	$\mu_1 R_1 \sin\alpha$	$-\mu_1 R_1 \cos\alpha$	0	0	0
$\mu_2 R_2$	$\mu_2 R_2 \sin\alpha$	$\mu_2 R_2 \cos\alpha$	$2a$	0	$2\mu_2 R_2 a\cos\alpha$

Aus dieser Aufstellung resultieren die drei Bedingungen

$$(\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2)\sin\alpha + (R_1 - R_2)\cos\alpha - G\sin\beta = 0, \tag{1}$$

$$(\mu_2 R_2 - \mu_1 R_1)\cos\alpha + (R_1 + R_2)\sin\alpha - G\cos\beta = 0, \tag{2}$$

$$2\mu_2 R_2 \cos\alpha + 2R_2\sin\alpha - G\cos\beta = 0. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) giebt

$$R_2 = \frac{G\cos\beta}{2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha)}. \tag{4}$$

Mit (2) und (4) erhalten wir

$$R_1 = \frac{G\cos\beta}{2(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)}. \tag{5}$$

Nun wird mit (1), (4) und (5)

$$tg\,\beta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\left\{\sin^2\alpha - (\mu_1 - \mu_2)\sin\alpha\cos\alpha - \mu_1\mu_2\cos^2\alpha\right\}}, \tag{6}$$

und wenn wir den Reibungswinkel einführen, also $\mu_1 = tg\,\varrho_1$, $\mu_2 = tg\,\varrho_2$ setzen,

$$tg\,\beta = \frac{\sin(\varrho_1 + \varrho_2)}{2\left\{\sin^2\alpha\cos\varrho_1\cos\varrho_2 - \sin\alpha\cos\alpha\sin(\varrho_1 - \varrho_2) - \cos^2\alpha\sin\varrho_1\sin\varrho_2\right\}}, \tag{7}$$

oder, mit $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, $\sin\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - a^2}$,

$$tg\,\beta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\left\{r^2 - a^2 - (\mu_1 - \mu_2)a\sqrt{r^2 - a^2} - \mu_1\mu_2 a^2\right\}}, \tag{6'}$$

$$tg\,\beta = \frac{\sin(\varrho_1 + \varrho_2)r^2}{2\left\{(r^2 - a^2)\cos\varrho_1\cos\varrho_2 - a\sqrt{r^2 - a^2}\sin(\varrho_1 - \varrho_2) - a^2\sin\varrho_1\sin\varrho_2\right\}}. \tag{7'}$$

Durch jede der Gleichungen (6) und (7) ist die Gleichgewichtslage bestimmt. Indem wir aus (6) oder (7) noch $\cos\beta$ ermitteln und seinen Wert in die (4) und (5) einführen, erhalten wir die Werte der Reaktionen für die Gleichgewichtslage.

Sind die Reibungscoëfficienten einander gleich, ist also $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, dann gehen die Gleichungen (4), (5), (6), (7) über in

$$R_2 = \frac{G\cos\beta}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}, \quad (8) \qquad R_1 = \frac{G\cos\beta}{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}, \tag{9}$$

$$tg\,\beta = \frac{\mu}{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha} = \frac{\mu r^2}{r^2 - (1 + \mu^2)a^2}, \tag{10}$$

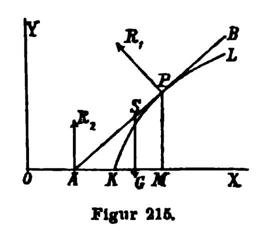
$$tg\,\beta = \frac{\sin 2\varrho}{\cos 2\varrho - \cos 2\alpha} = \frac{r^2\sin 2\varrho}{r^2\cos 2\varrho - 2a\sqrt{r^2 - a^2}}. \tag{11}$$

Würde in den Stützpunkten A, B keine Reibung stattfinden, dann wäre $\mu_1 = \mu_2 = 0$, mithin

$$tg\,\beta = \frac{0}{sin^2\alpha} = \frac{0}{r^2 - a^2} = 0,\ \measuredangle\beta = 0,\ R_1 = R_2 = \frac{G}{2\,sin\,\alpha} = \frac{G\,r}{2\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Die Gleichgewichtslage ist also in diesem Falle dann hergestellt, wenn der Stab horizontal liegt.

6. Ein gleichförmiger, schwerer Stab AB (Fig. 215) ist mit seinem Ende A auf eine rauhe horizontale Ebene OX gebracht worden und stützt sich gegen eine rauhe Curve KPL in einem beliebigen Punkte P. Die Mittellinie des Stabes und die Curve liegen in einer vertikalen Ebene. Der Stab ist immer im Gleichgewichte, gleichviel in welchem Punkt P er die Curve berührt; die Reibungscoëfficienten sind für die Curve und die horizontale Ebene von gleicher Grösse. Welches ist die Gleichung der Curve?



Figur 215.

Ziehe MP rechtwinkelig zu OX. Lasse sein S den Schwerpunkt des Stabes, in welchem sein Gewicht G angreife, $AS = a$, $\measuredangle BAX = \vartheta$, $OM = x$, $PM = y$, R_1, R_2 die normalen Reaktionen der Curve und der Ebene auf den Stab. Infolge der Reibung wird die Curve auf den Stab noch eine Kraft μR_1 entlang PB und die horizontale Ebene eine solche μR_2 entlang AX äussern. Indem wir die Kräfte parallel und senkrecht zu OX zerlegen und Momente um A nehmen, ist für das Gleichgewicht

$$R_1 sin\,\vartheta = \mu R_1 cos\,\vartheta + \mu R_2,\ \text{oder}\ R_1(sin\,\vartheta - \mu\,cos\,\vartheta) = \mu R_2,\quad (1)$$

$$R_1 cos\,\vartheta + \mu R_1 sin\,\vartheta + R_2 = G,\ \text{oder}\ R_1(cos\,\vartheta + \mu\,sin\,\vartheta) + R_2 = G,\quad (2)$$

$$R_1 . AP = G\,a\,cos\,\vartheta\quad \text{oder}\quad R_1 . AM = G\,a\,cos^2\vartheta.\quad (3)$$

Durch (1) und (2) bekommen wir

$$(1 + \mu^2) R_1\,sin\,\vartheta = \mu G,$$

und daher mit (3)

$$(1 + \mu^2) G\,a\,sin\,\vartheta\,cos^2\vartheta = \mu G . AM,\quad (1 + \mu^2)\,a\,sin\,\vartheta\,cos^2\vartheta = \mu . AM.$$

Aber es ist $sin\,\vartheta = \frac{dy}{ds}$, $cos\,\vartheta = \frac{dx}{ds}$, $AM = y\frac{dx}{dy}$,

folglich haben wir

$$(1 + \mu^2)\,a\frac{dy}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \mu y\frac{dx}{dy},$$

$$a(1 + \mu^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mu y\left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

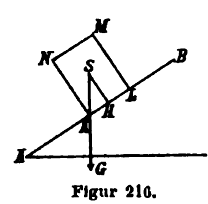
Mit $\mu = tg\,\varrho$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{2a}{sin\,2\varrho}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

welches die verlangte Differentialgleichung der Curve ist.

Wenn die Reibungscoëfficienten für die Curve und die Ebene verschieden sind, können wir die Differentialgleichung der Curve mit gleicher Leichtigkeit aufstellen.

Walton, p. 82.



Figur 216.

7. Eine homogene, rechtwinkelige Platte $KLMN$ (Fig. 216) ist auf eine rauhe geneigte Ebene AB gebracht worden. Angenommen, die Horizontalneigung der Ebene wachse allmählich; zu finden, ob das Gleichgewicht der Platte gestört werden wird durch den Beginn einer rollenden oder gleitenden Bewegung.

Zuerst setzen wir voraus, dass die Platte im Begriffe sei zu gleiten. Es sei R die ganze Reaktion der Ebene auf die Platte, rechtwinkelig zu ihr selbst, φ die Horizontalneigung der Ebene im Augenblicke des Gleitens. Durch Zerlegung der Kräfte parallel und senkrecht zu der geneigten Ebene bekommen wir

$$\mu R - G \sin\varphi = 0, \quad R - G \cos\varphi = 0, \quad \text{womit} \quad tg\,\varphi = \mu.$$

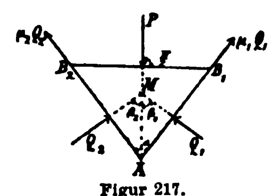
Jetzt nehmen wir an, dass die Platte um die Kante K vor dem Anfange des Gleitens rolle, dann wird die Vertikale durch S die Kante K schneiden, wenn φ den gehörigen Wert erlangt hat. Ziehe SH rechtwinkelig zu der Ebene, lasse sein $HK = a$, $SH = b$, dann ist

$$tg\,\varphi = tg\,\sphericalangle KSH = \frac{a}{b}.$$

Folglich wird, wenn $\mu < \frac{a}{b}$, Gleiten stattfinden, ehe Rollen eintritt, wenn $\mu > \frac{a}{b}$, Rollen ohne Gleiten eintritt. Ist $\mu = \frac{a}{b}$, so erfolgt gleichzeitiges Rollen und Gleiten.

Walton, p. 80.

8. Der Keil ist dazu bestimmt, eine Kraft in eine andere von anderer Richtung überzuführen. Er ist im allgemeinen ein normales, dreikantiges Prisma AB_1B_2 (Fig. 217), auf dessen einer Seitenfläche die Kraft P und auf dessen anderen Seitenflächen die zu überwindenden Widerstände angreifen, welche Q_1, Q_2 sein mögen. Der Rücken des Keiles, diejenige Seitenfläche B_1B_2, auf welche die Kraft P wirkt, ist schmäler als die beiden anderen Seitenflächen, die Keilflanken. Es seien die Kräfte P, Q_1, Q_2 so verteilt, dass ihre Richtungslinien in eine normale Ebene des Prismas hineinfallen, und P sei so gewählt, dass nur eine progressive Bewegung des Keiles erfolgen kann. Die Gleichgewichtsbedingungen für die drei Kräfte P, Q_1, Q_2 sollen entwickelt werden.



Figur 217.

Zu dem Ende seien die Winkel des Keiles bezeichnet wie folgt: $\sphericalangle B_1 A B_2 = \alpha$, $\sphericalangle B_2 B_1 A = \beta_1$, $\sphericalangle B_1 B_2 A = \beta_2$, $\sphericalangle Q_1 M Q_2 = \beta_1 + \beta_2$, das ist derjenige Winkel, unter welchem sich die Richtungslinien der Widerstände Q_1 und Q_2 schneiden, diese Richtungen sind senkrecht zu den Keilflanken, $\mu_1 Q_1$, $\mu_2 Q_2$ die Reibungswiderstände auf den Seitenflächen AB_1, AB_2. Für den Zustand des Gleichgewichtes muss die Summe aller Kraftcomponenten parallel zur Richtung von P und diejenige aller Componenten senkrecht dazu gleich Null sein, so dass

$$P - Q_1 \cos\beta_1 - Q_2 \cos\beta_2 - \mu_1 Q_1 \sin\beta_1 - \mu_2 Q_2 \sin\beta_2 = 0, \quad (1)$$

$$Q_1 \sin\beta_1 - Q_2 \sin\beta_2 - \mu_1 Q_1 \cos\beta_1 + \mu_2 Q_2 \cos\beta_2 = 0. \quad (2)$$

Mittelst dieser zwei Gleichungen lassen sich die Widerstände Q_1 und Q_2 berechnen. Aus der Gleichung (2) ergiebt sich

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\sin\beta_1 - \mu_1 \cos\beta_1}{\sin\beta_2 - \mu_2 \cos\beta_2}.$$

Den hieraus genommenen Wert von Q_2 führen wir in die Gleichung (1) ein, dann wird

$$P = Q_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) + Q_1(\cos\beta_2 + \mu_2 \sin\beta_2)\frac{\sin\beta_1 - \mu_1 \cos\beta_1}{\sin\beta_2 - \mu_2 \cos\beta_2}.$$

Nach einiger Umformung dieser Gleichung gelangen wir zu

$$\frac{P}{Q_1}(\sin\beta_2 - \mu_2 \cos\beta_2) = (1 - \mu_1 \mu_2)\sin(\beta_1 + \beta_2) - (\mu_1 + \mu_2)\cos(\beta_1 + \beta_2).$$

Es ist aber $\sphericalangle(\beta_1 + \beta_2) = 180^0 - \alpha$, also $\sin(\beta_1 + \beta_2) = \sin\alpha$, $\cos(\beta_1 + \beta_2) = -\cos\alpha$, folglich erhalten wir

$$\frac{P}{Q_1} = \frac{(1 + \mu_1 \mu_2)\sin\alpha + (\mu_1 + \mu_2)\cos\alpha}{\sin\beta_2 - \mu_2 \cos\beta_2}.$$

Hiernach hat die geringste Vergrösserung der Kraft P eine Bewegung des Keiles im Sinne dieser Kraft zur Folge. Diese Kraft ist zu bestimmen, wenn der Keil als Spaltungsmittel dienen soll. Wird aber der Keil als Befestigungsmittel verwendet, so sind die Reibungswiderstände im entgegengesetzten Sinne thätig, indem die Kraft dann ein Zurückgehen des Keiles zu verhindern hat. Wir haben dann nur nötig, in der obigen Gleichung μ_1 und μ_2 mit den entgegengesetzten Zeichen zu wählen und erhalten dadurch sofort die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{P}{Q_1} = \frac{(1 - \mu_1 \mu_2)\sin\alpha - (\mu_1 + \mu_2)\cos\alpha}{\sin\beta_2 + \mu_2 \cos\beta_2}.$$

In diesem Falle wird aber gewöhnlich verlangt, dass gar keine Kraft aufgewendet werden darf, um ein Zurückgehen des Keiles zu verhindern, dass derselbe vielmehr noch gewaltsam gelöst werden muss, wodurch P nicht nur Null, sondern einen negativen Wert annimmt. Es ist dieses der Fall, sobald der Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung negativ ausfällt, weshalb sein muss

$$(1-\mu_1\mu_2)\sin\alpha < (\mu_1+\mu_2)\cos\alpha, \quad \text{oder} \quad tg\,\alpha < \frac{\mu_1+\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}.$$

Bezeichnen wir die Reibungswinkel entsprechend mit ϱ_1, ϱ_2 dann muss also sein

$$tg\,\alpha < tg\,(\varrho_1+\varrho_2), \text{ oder } \alpha < \varrho_1+\varrho_2,$$

d. h. der Winkel α muss kleiner als die Summe der Reibungswinkel sein. In Gebrauchsfällen macht man diesen Winkel erheblich kleiner. Der Keil hat gewöhnlich zwei besondere Formen, das Dreieck AB_1B_2 ist entweder gleichschenkelig oder rechtwinkelig. Ist das Dreieck gleichschenkelig, so ist $\beta_1=\beta_2=\frac{\pi-\alpha}{2}$ und alsdann

$$Q_1=Q_2=Q, \quad \frac{P}{Q}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\mu\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Für das rechtwinkelige Dreieck haben wir, wenn $\beta_1=90^0$, $\beta_2=\frac{\pi}{2}-\alpha$,

$$Q_2=\frac{Q_1}{\cos\alpha\mp\mu\sin\alpha}, \quad \frac{P}{Q_1}=\frac{(1-\mu^2)\sin\alpha\pm2\mu\cos\alpha}{\cos\alpha\mp\mu\sin\alpha}=tg\,(\alpha\pm\varrho)\pm tg\,\varrho.$$

Die oberen Zeichen gelten für den Fall, dass der Keil eine Progressivbewegung im Sinne der Kraft P annehmen soll, die unteren Zeichen dafür, dass der Keil nicht zurückgeht, wenn auch keine Kraft P wirkt. Dient der Keil als Befestigungsmittel, dann hat er die Form eines rechtwinkeligen Prismas, soll sich derselbe von selbst nicht lösen, so muss die Bedingung erfüllt sein $tg\,\alpha<\frac{\mu_1+\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}$, oder $\alpha<\varrho_1+\varrho_2$. Ist nun beispielsweise der Keil von Schmiedeisen, dann können wir setzen $\mu_1=\mu_2=0{\cdot}16$ und es ist dann $tg\,\alpha<\frac{1}{3}$ zu nehmen. Da nun der Befestigungskeil so beschaffen sein soll, dass er sich von selbst nicht löst, wenn nicht besondere Umstände wirken, so fragt es sich noch, wie gross die Kraft P sein muss, um einen solchen Keil zu lösen. Für den Gleichgewichtszustand hat sich herausgestellt, dass

$$\frac{P}{Q_1}=tg\,(\alpha+\varrho)+tg\,\varrho=\frac{tg\,\alpha+\mu}{1+\mu\,tg\,\alpha}+\mu.$$

Für $\mu=0{\cdot}16$ und $tg\,\alpha=0{\cdot}04$ erhalten wir beispielsweise $P:Q_1=0{\cdot}36$. Die Kraft P_1, welche den Keil löst, muss in entgegengesetztem Sinne wie P wirken, so dass die Reibungswiderstände ebenfalls im entgegengesetzten Sinne wie vorhin wirken, weshalb sein muss

$$\frac{P_1}{Q_1}=-\left\{\frac{tg\,\alpha-\mu}{1-\mu\,tg\,\alpha}-\mu\right\}.$$

Für $\mu=0{\cdot}16$ und $tg\,\alpha=0{\cdot}04$ ergiebt sich $P_1:Q_1=0{\cdot}28$. Sonach werden

ungefähr $\frac{7}{9}$ der Kraft P genügen, um den Keil zu lösen. Die Neigung der Keilflanke zu der Länge des Keiles wird gewöhnlich $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{15}$ der Länge gemacht.

9. Ein Stab AB (Fig. 218) kann sich nach jeder Richtung frei um den Endpunkt A bewegen, welcher durch ein glattes Charnier an einer horizontalen Ebene befestigt ist, und stützt sich mit seinem Ende B gegen eine rauhe, vertikale Ebene LMN. Welches ist die äusserste Gleichgewichtslage des Stabes?

Figur 218.

Durch A ziehe AO rechtwinkelig zu der Ebene LMN, verbinde O mit B. Der Ort von B ist ein Kreis in der vertikalen Ebene LMN mit dem Mittelpunkte in O. Es sei S der Schwerpunkt des Stabes AB, in ihm wirke sein Gewicht G vertikal abwärts, AHV die Projektion von ASB auf die horizontale Ebene, H diejenige von S, und V diejenige von B. Ziehe HK rechtwinkelig zu AO und KS. R sei der Druck zwischen Stab und vertikaler Ebene, so dass μR der Reibungswiderstand, welcher in der Richtung der Tangente zu dem Orte von B, rechtwinkelig zu OB in der Ebene LMN und von L gegen M wirken wird. Ferner sei $AS = a$, $BS = b$, $\sphericalangle BAO = \alpha$, $\sphericalangle BOL = \vartheta$. Damit erhalten wir für das Gleichgewicht des Stabes, Momente um AO nehmend,

$$G.HK = \mu R.OB, \tag{1}$$

und die horizontale Linie durch A, welche rechtwinkelig zu AO ist, als Momentenaxe ansehend, dabei beachtend, dass die vertikale Componente von μR $\mu R \cos \sphericalangle BOV$ ist,

$$G.AK - R.BV - \mu R.AO.\cos \sphericalangle BOV. \tag{2}$$

Ferner ist durch die Geometrie

$$HK = SK.\cos\vartheta = a \sin\alpha \cos\vartheta,$$
$$OB = (a+b)\sin\alpha, \qquad AO.\cos\sphericalangle BOV = (a+b)\cos\alpha\cos\vartheta,$$
$$AK = a\cos\alpha, \qquad BV = OB.\sin\vartheta = (a+b)\sin\alpha\sin\vartheta.$$

Mit diesen Werten gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$G\,a\sin\alpha\cos\vartheta = \mu R(a+b)\sin\alpha, \tag{3}$$
$$G\,a\cos\alpha = R(a+b)\sin\alpha\sin\vartheta + \mu R(a+b)\cos\alpha\cos\vartheta. \tag{4}$$

Indem wir die Gleichung (4) durch die (3) dividieren, bekommen wir

$$tg\,\vartheta = \frac{1}{\mu}\,tg\,\alpha.$$

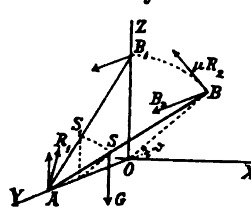
Dieses Problem können wir auch auf folgende Weise lösen. Nehmen wir Momente um die vertikale Linie durch A, so haben wir, weil $\mu R\sin\vartheta$ die Horizontalcomponente von μR ist,

$R.OV - \mu R \sin\vartheta . AO = 0$, und daher $OB.\cos\vartheta = \mu \sin\vartheta . AO$, aber weil $OB = OA.tg\,\alpha$, so ergiebt sich schliesslich

$$tg\,\vartheta = \frac{1}{\mu}\,tg\,\alpha.$$

Walton, p. 80.

Um die Aufgabe vollständig zu lösen, d. h. um auch die Reaktionen in den Stützpunkten A und B, welche wir jetzt mit R_1 und R_2 bezeichnen wollen, gleichzeitig mit der Gleichgewichtslage zu bestimmen, schlagen wir das analytische Verfahren ein.



Figur 218 a.

Der Stab AB (Figur 218 a) befindet sich zwischen zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen, welche wir als Coordinatenebenen wählen, und zwar die horizontale Ebene als Ebene der xy, die vertikale Ebene als Ebene xz. Die Anfangslage AB_1 des Stabes habe die Eigentümlichkeit, dass eine durch ihn gelegte vertikale Ebene die beiden Stützebenen in seinen Projektionen auf diese Ebenen schneidet, welche wir zu Axen der y und der z wählen, so dass O Ursprung des Coordinatensystemes. Bewegt sich der Stab und rückt der Punkt B_1 nach B, dann gelangt er in die Lage AB, welche wir als die äusserste Gleichgewichtslage ansehen wollen. Es beschreibt dabei der Stab einen Teil der Fläche eines Kreiskegels, der Punkt B_1 einen Kreisbogen in der Ebene der xz vom Halbmesser $OB_1 = OB = r$, und es sei $\measuredangle B_1AO = \measuredangle BAO = \alpha$, $\measuredangle BOX = \vartheta$. Das Gewicht G des Stabes greife wieder in seinem Schwerpunkte S an und es sei $AS = a$, $BS = b$. Im Punkte A wirkt auf den Stab der unbekannte Reaktionsdruck R_1 der horizontalen Ebene, seine Componenten parallel zu den Coordinatenaxen seien X, Y, Z. Im Punkte B wirkt die Reaktion R_2 der vertikalen Ebene senkrecht zu ihr, welche den Reibungswiderstand μR_2 erzeugt, thätig in der Richtung der Tangente in B an den Kreisbogen B_1B von B nach B_1.

Damit erhalten wir das Tableau

Kräfte	X	Y	Z	x	y	z
G	0	0	$-G$	$a \sin\alpha \cos\vartheta$	$b \cos\alpha$	$a \sin\alpha \sin\vartheta$
R_1	X	Y	Z	0	$(a+b)\cos a$	0
R_2	0	R_2	0	$r\cos\vartheta$	0	$r\sin\vartheta$
μR_2	$-\mu R_2 \sin\vartheta$	0	$\mu R_2 \cos\vartheta$	$r\cos\vartheta$	0	$r\sin\vartheta$

Kräfte	$yZ - zY$	$zX - xZ$	$xY - yX$
G	$-Gb\cos\alpha$	$Ga\sin\alpha\cos\vartheta$	0
R_1	$Z(a+b)\cos\alpha$	0	$-X(a+b)\cos\alpha$
R_2	$-R_2 r \sin\vartheta$	0	$R_2 r \cos\vartheta$
μR_2	0	$-\mu R_2 r$	0

aus welchem sich die Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

$$X - \mu R_2 \sin \vartheta = 0, \; (1) \quad Y + R_2 = 0, \; (2) \quad Z - G + \mu R_2 \cos \vartheta = 0, \; (3)$$

$$Z(a+b) \cos \alpha - G b \cos \alpha - R_2 r \sin \vartheta = 0, \tag{4}$$

$$G a \sin \alpha \cos \vartheta - \mu R_2 r = 0, \tag{5}$$

$$R_2 r \cos \vartheta - X(a+b) \cos \alpha = 0. \tag{6}$$

Für den Reaktionsdruck im Punkte B ergiebt sich durch (5)

$$R_2 = \frac{G a \sin \alpha \cos \vartheta}{\mu r} = \frac{G a \cos \vartheta}{\mu (a+b)}, \tag{7}$$

weil $r = (a+b) \sin \alpha$ ist.

Mit (1) und (5), (2) und (5), (3) und (5) erhalten wir:

$$X = G \frac{a}{r} \sin \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{G a \sin \vartheta \cos \vartheta}{a+b}, \tag{8}$$

$$Y = -R_2 = -\frac{G a \sin \alpha \cos \vartheta}{\mu r} = -\frac{G a \cos \vartheta}{\mu (a+b)}, \tag{9}$$

$$Z = G\left(1 - \frac{a \sin \alpha \cos^2 \vartheta}{r}\right) = G\left(1 - \frac{a \cos^2 \vartheta}{a+b}\right). \tag{10}$$

Durch (6), (7) und (8) finden wir:

$$tg\, \vartheta = \frac{1}{\mu} tg\, \alpha. \tag{11}$$

Diese Gleichung bestimmt die äusserste Gleichgewichtslage.

Da nun die äusserste Gleichgewichtslage bekannt ist, so können wir für dieselbe auch die Reaktion R_2 und die Componenten der Reaktion R_1 darstellen. Aus (11) folgt $\cos \vartheta = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + tg^2 \alpha}}$, $\sin \vartheta = \frac{tg\, \alpha}{\sqrt{\mu^2 + tg^2 \alpha}}$, womit die Relationen (7), (8), (9), (10) übergehen in

$$R_2 = \frac{G a}{(a+b)\sqrt{\mu^2 + tg^2 \alpha}} = -Y, \qquad X = \frac{G a}{a+b} \frac{\mu\, tg\, \alpha}{\mu^2 + tg^2 \alpha},$$

$$Z = G \frac{\mu^2 b + (a+b) tg^2 \alpha}{(a+b)(\mu^2 + tg^2 \alpha)},$$

so dass sämtliche gesuchten Grössen bekannt sind, denn es ist

$$R_1 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Befindet sich der Stab in der Lage $A B_1$, also in der Ebene der yz, dann ist $\vartheta = 0$, und demnach:

$$R_2 = \frac{G a}{\mu (a+b)}, \qquad X = 0, \qquad Y = -\frac{G a}{\mu (a+b)},$$

$$Z = \frac{G b}{a+b}, \quad R_1 = \frac{G}{\mu (a+b)} \sqrt{a^2 + \mu^2 b^2}.$$

10. Ein gleichförmiger Stab vom Gewichte G, welches in seiner Mitte angreift stützt sich mit seinem unteren Ende gegen eine rauhe, horizontale Ebene und gegen

eine rauhe, horizontale Linie. Die vertikale Ebene durch den Stab ist senkrecht auf der Stützebene und der stützenden Geraden. Zu bestimmen die Gleichgewichtslage, wenn im Abstande a von dem unteren Ende ein Gewicht P angreift und der Reibungscoëfficient für die sich berührenden Teile gleich ist.

Es sei $2l$ die Länge des Stabes, α seine Horizontalneigung, dann wird gefunden werden

$$\sin 2\alpha = 4\frac{\mu}{1+\mu^2}\cdot\frac{(P+G)\,l}{Pa+Gl}.$$

11. Ein Stab stützt sich auf zwei horizontale, parallele Zapfen in einer zu den Zapfen senkrechten Ebene. Die Möglichkeit des Gleichgewichtes und die Pressungen zu bestimmen.

Ist α die Horizontalneigung des Stabes, bestimmt durch die Lage der Zapfen, $2l$ die Länge des Stabes, b die Entfernung der Zapfen, a der Abstand des Schwerpunktes des Stabes vom nächsten Zapfen und G das Stabgewicht, so sind die Pressungen $\frac{1}{2}G\frac{\sin(\alpha\pm\varrho)}{\sin\varrho}$, und für das Gleichgewicht muss die Bedingung erfüllt sein

$$b\,tg\,\alpha \lesseqgtr (2a+b)\,tg\,\varrho.$$

12 Eine Platte von gleicher Dicke stütze sich mit ihrem Mittelpunkte auf einen rauhen, horizontalen Cylinder, beider Richtungen seien senkrecht zu einander. Zu finden das grösste Gewicht, welches an dem einen Ende der Platte angehängt werden kann, ohne dass dieselbe von dem Cylinder herabgleitet.

Es sei G das Gewicht der Platte, P die angehängte Last, r der Halbmesser des Cylinders, $2a$ die Länge der Platte, $tg\,\lambda$ der Reibungscoëfficient, dann wird P durch die Gleichung gegeben sein

$$\frac{P}{G}=\frac{r\lambda}{a-r\lambda}.$$

13. Ein Stab AB (Fig. 219), von welchem das Ende B gegen eine rauhe, vertikale Ebene CD drückt, wird durch einen an den festen Punkt C der Ebene gefesselten, gewichtslosen Faden gehalten. Zu finden die Lage des Stabes unmittelbar vor dem Eintritte einer Bewegung, wenn Faden und Stab in einer zu der Stützebene normalen, vertikalen Ebene liegen.

C B A D

Figur 219.

Es sei der Stützpunkt B des Stabes höher gelegen als der Punkt A, a die Länge des Stabes, $AC = l$, $\measuredangle ACB = \vartheta$, $\measuredangle ABD = \varphi$, dann kann ϑ durch die Gleichung gefunden werden

$$(4a^2 - 4l^2 - \mu^2 l^2)\,tg^2\vartheta - 2\mu l^2\,tg\,\vartheta + 4a^2 - l^2 = 0,$$

und sodann wird φ bestimmt sein durch die Gleichung $a\sin\varphi = l\sin\vartheta$.

Wenn B in dem Falle ist abwärts zu gleiten, so muss μ durch $-\mu$ ersetzt werden.

14. Ein stabförmiger Körper von durchweg gleichem Querschnitte ist zwischen zwei rauhe Ebenen gelegt, welche die Horizontalneigungen α_1, α_2 besitzen und denen die Reibungswinkel ϱ_1, ϱ_2 zukommen. Die vertikale Ebene durch den Stab ist senkrecht auf der Schnittlinie beider Ebenen. Den Grenzwert der Horizontalneigung des Stabes zu finden, bei welchem er ruhen wird, sowie die Relationen zwischen dem Körpergewichte und der Normalreaktion jeder der Ebenen.

Lasse sein $\vartheta =$ dem verlangten Grenzwinkel, R_1, R_2 die Normalreaktionen der Ebenen, G das Gewicht des Stabes, welches in seiner Mitte angreife. Damit wird sich ergeben

$$2\,tg\,\vartheta = cotg\,(\alpha_2 + \varrho_2) - cotg\,(\alpha_1 - \varrho_1),$$
$$\frac{R_1}{cos\,\varrho_1\,sin\,(\alpha_2 + \varrho_2)} = \frac{G}{sin\,(\alpha_1 - \varrho_1 + \alpha_2 + \varrho_2)} = \frac{R_2}{cos\,\varrho_2\,sin\,(\alpha_1 - \varrho_1)}.$$

15. Eine schwere, rauhe, gleichförmige Stange geht über dem einen und unter dem anderen von zwei festen, rauhen Zapfen hinweg, welche parallel und horizontal sind, in einer vertikalen Ebene rechtwinkelig zu ihnen. Die Länge der kürzesten Stange zu finden, welche in einer solchen Lage ruhen wird.

Es sei a die Entfernung der zwei Zapfen, α die Horizontalneigung der Stange, dann ist die gesuchte Länge der Stange gleich $a\left(1 + \frac{1}{\mu}\,tg\,\alpha\right)$.

16. Ein Stab ist an eine vertikale Wand gelehnt und steht auf einer horizontalen Ebene auf. Wie weit kann er sich wegen der Reibung von der vertikalen Lage entfernen?

Ist α die Horizontalneigung des Stabes, φ der Winkel der Vertikalebene durch ihn mit der auf beiden gegebenen Ebenen senkrechten Ebene, so ist

$$1 - 2\,\mu\,tg\,\alpha = \mu\sqrt{\mu^2\,cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi}$$

die Bedingung der äussersten Gleichgewichtslage, also jedenfalls $\varphi \leqq \varrho$.

17. Ein Stab, welcher um ein glattes Charnier an seinem tieferen Ende beweglich ist, ruht mit seinem anderen Ende auf der Oberfläche einer festen, rauhen Kugel. Der Mittelpunkt der Kugel und das Charnier liegen in einer horizontalen Linie. Welches ist die Grenzlage des Gleichgewichtes?

Es sei A das tiefere, B das höhere Ende des Stabes, C der Mittelpunkt der Kugel, $\measuredangle BAC = \beta$, $\measuredangle BCA = \alpha$, ϑ die Horizontalneigung der Ebene ABC bei einer Grenzlage des Stabes, dann ist

$$tg\,\vartheta = \frac{1}{\mu}\,cos\,\alpha\,tg\,\beta.$$

18. Eine Kugel mit dem Mittelpunkte C wird durch einen horizontalen Faden BC auf einer geneigten Ebene AB im Gleichgewichte erhalten. Welches ist die Spannung des Fadens?

Es sei G das Gewicht der Kugel, T die Spannung des Fadens, α die Horizontalneigung der schiefen Ebene, dann ist

$$T = G\,\frac{sin\,\alpha - \mu\,cos\,\alpha}{cos\,\alpha - \mu\,sin\,\alpha} = G\,\frac{sin\,(\alpha - \varrho)}{cos\,(\alpha + \varrho)}.$$

19. Eine homogene, starre Halbkugel kann mit ihrer krummen Oberfläche auf einer horizontalen Ebene rollen; die Reibung verhindere alles Gleiten. Das Moment eines Paares zu finden, welches sie in der Ruhe erhalten kann, wenn ihre Basis mit dem Horizonte einen Winkel von 30° einschliesst.

Ist G das Gewicht und a der Radius der Kugel, so wird das Moment des Paares gleich sein $\frac{3}{16}\,G\,a$.

20. Eine Kugel liegt zwischen zwei gleich geneigten Ebenen, welche sich in einer Horizontalen scheiden. Wie gross muss ein horizontaler Druck auf die Ebenen sein, damit die Kugel in die Höhe geht?

Ist G das Gewicht der Kugel, r ihr Radius, α die Vertikalneigung der Ebenen, d das Stück der Geraden, längs welcher der Druck stattfindet, zwischen den zwei Ebenen, dann ist der erforderliche Druck

$$\frac{G\, r \cos \varrho}{d \sin (\alpha - \varrho)}.$$

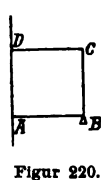
21. Eine Kugel vom Halbmesser a wird eben auf einer unter einem Winkel von 45^0 zum Horizonte geneigten Ebene durch einen gewichtslosen Stab gehalten. Das tiefere Ende des Stabes ist durch ein Charnier mit der geneigten Ebene, das höhere durch ein solches mit der Oberfläche der Kugel in einem Punkte, wo der Halbmesser parallel zu der Ebene ist, verbunden. Der Stab und der Kugelmittelpunkt liegen in einer vertikalen, die geneigte Ebene rechtwinkelig schneidenden Ebene. Die Länge des Stabes zu finden, wenn der Reibungswinkel gleich ϱ ist.

Die gesuchte Stablänge ist gleich $a \operatorname{cosec} \varrho$.

22. Ein gerader Kreiskegel befindet sich mit seiner Basis auf einer rauhen geneigten Ebene. Die Neigung der Ebene wächst stetig. Zu erforschen die Bedingung, unter welcher die beginnende Bewegung gleichzeitig rollend und gleitend ist.

Wenn β den Indifferenzwinkel bezeichnet und 2α der Vertikalwinkel des Kegels ist, so wird die verlangte Bedingung durch die Gleichung ausgedrückt

$$tg\, \beta = 4\, tg\, \alpha.$$

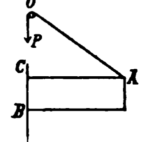


Figur 220.

23. Eine quadratische Platte $ABCD$ (Fig. 220) mit vertikaler Ebene stützt sich mit einer ihrer Seiten AD gegen eine vertikale Wand, welche zu der Ebene der Platte senkrecht ist. In B stützt sich die Platte auf einen rauhen Zapfen. Welches ist der kleinste Wert des Reibungscoëfficienten, wenn derselbe für die Wand und den Zapfen gleich gross ist?

$$\mu_{min} = \sqrt{2} - 1.$$

24. Eine homogene rechtwinkelige Platte AB (Fig. 221) von gegebenem Gewichte G wird eben an einer rauhen vertikalen Wand BC mittelst eines Gewichtes P gehalten, welches an einen Faden gefesselt ist, der durch einen glatten Ring O senkrecht über B läuft und in A angeknüpft ist.



Figur 221.

Den kleinsten Wert des Normaldruckes auf die Wand und die entsprechende Grösse von P zu finden.

Wenn ϱ den Reibungswinkel bezeichnet, so ist der kleinste Wert des Normaldruckes $\frac{1}{2}\, G \operatorname{cotg} \varrho$ und die entsprechende Grösse von $P = \frac{1}{2}\, G \operatorname{cosec} \varrho$.

25. Eine elliptische Platte mit vertikaler Ebene ruht auf einer rauhen horizontalen Ebene und lehnt sich gegen eine rauhe vertikale Wand; die drei Ebenen sind auf einander senkrecht. Die Coëfficienten der Reibung zwischen Platte und horizontaler Ebene, sowie zwischen Platte und vertikaler Wand sind μ_1 und μ_2. Die grosse Axe der Ellipse ist unter einem Winkel von 45^0 gegen den Horizont geneigt und die Platte eben im Begriff herabzugleiten. Welches ist die Excentricität der Ellipse?

$$e = \sqrt{\frac{2\, \mu_1 (1 + \mu_2)}{1 + \mu_1 \mu_2}}.$$

26. Ein elliptischer Cylinder liegt zwischen einer glatten vertikalen und einer rauhen horizontalen Ebene. Die grosse Axe der Ellipse ist unter einem Winkel von 45° zum Horizonte geneigt. Durch die Reibung ist der Cylinder gerade am Gleiten verhindert. Welches ist die Grösse des Reibungscoëfficienten?

Wenn e die Excentricität der Ellipse bezeichnet, so ist der verlangte Reibungscoëfficient gleich $\frac{1}{2} e^2$.

27. Wenn eine Person versucht, eine zweigriffige Schublade herauszuziehen durch den Zug an einem der Griffe in einer Richtung senkrecht zu ihrer Vorderseite, die Bedingung zu finden, unter welcher die Schublade feststecken wird.

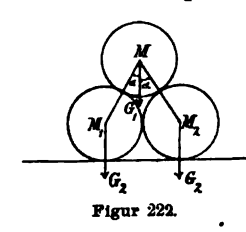
Die Schublade wird feststecken, welches auch die angewandte Kraft sei, wenn der Reibungscoëfficient nicht kleiner ist als das Verhältnis einer Seite der Schublade zu dem Abstande ihrer Griffe.

11—27. Walton, p. 84—88.

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht mehrerer Körper.

1. Zwei gleiche, homogene Kreiscylinder M_1, M_2 (Fig. 222) liegen mit ihren Axen parallel auf einer horizontalen rauhen Ebene und berühren sich. Auf diese Cylinder stützt sich ein dritter Cylinder so, dass alle drei Cylinderaxen zu einander parallel sind. Der Coëfficient der Reibung zwischen je zwei Cylindern ist μ_1, zwischen einem Cylinder und der Ebene μ_2. Welches sind die Gleichgewichtsbedingungen, sowie die Relation zwischen μ_1 und μ_2, wenn alle Berührungspunkte zugleich fortgleiten?



Figur 222.

Es sei G_1 das Gewicht des oberen, G_2 dasjenige eines der unteren Cylinder, R_1 die gegenseitige Wirkung zwischen dem oberen und einem der unteren Cylinder, F_1 der Reibungswiderstand zwischen je zwei Cylindern, R_2 die Reaktion der horizontalen Ebene auf einen der unteren Cylinder, F_2 der Reibungswiderstand für einen Cylinder und die Ebene, die Winkel, welchen die Verbindungslinien MM_1, MM_2 der Cylindermittel in einer Ebene senkrecht zu den Cylinderaxen mit der Vertikalen einschliessen $\sphericalangle M_1 M G_1 = \sphericalangle M_2 M G_1 = \alpha$, r_2 sei der Radius eines der unteren Cylinder. Der obere Cylinder ist der Bedingung unterworfen

$$G_1 - 2 R_1 \cos\alpha - 2 F_1 \sin\alpha = 0, \tag{1}$$

oder, weil $F_1 = \mu_1 R_1$ ist,

$$G_1 - 2 R_1 (\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha) = 0,$$

woraus

$$R_1 = \frac{G_1}{2(\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha)}. \tag{2}$$

Damit einer der unteren Cylinder im Gleichgewichte sei, ist den Bedingungen Genüge zu leisten

$$G_2 - R_2 + R_1 \cos\alpha + F_1 \sin\alpha = 0, \quad (3) \quad F_2 - R_1 \sin\alpha + F_1 \cos\alpha = 0, \quad (4)$$

$$F_2 r_2 - F_1 r_2 = 0. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) ergiebt sich

$$\frac{F_1}{R_1} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = tg\frac{\alpha}{2}, \quad \text{oder} \quad \mu_1 = tg\frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Nun erhalten wir mit (2) und (5)

$$R_1 = \frac{G_1}{2}. \quad (7)$$

Mit (1), (3) und (5) wird

$$R_2 = \frac{2\,G_2 + G_1}{2}. \quad (8)$$

Durch (4), (5) und (7) bekommen wir

$$F_1 = F_2 = \mu_1 R_1 = \mu_2 R_2 = \frac{G_1 \sin\alpha}{2\,(1 + \cos\alpha)} = \frac{G_1}{2}\, tg\frac{\alpha}{2}, \quad (9)$$

mithin ist

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{G_1}{2\,G_2 + G_1}\, tg\frac{\alpha}{2}, \quad \text{oder} \quad \mu_2 = \frac{G_1}{2\,G_2 + G_1}\, tg\frac{\alpha}{2}. \quad (10)$$

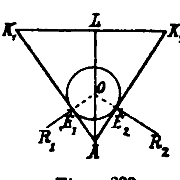
Für den Zustand des Gleichgewichtes müssen daher die Bedingungen erfüllt sein

$$tg\frac{\alpha}{2} \leqq \mu_1, \quad \frac{G_1}{2\,G_2 + G_1}\, tg\frac{\alpha}{2} \leqq \mu_2.$$

Weil $G_1 < 2\,G_2 + G_1$ ist, so werden die Berührungspunkte der unteren Cylinder zuerst fortgleiten, wenn $\mu_1 = \mu_2$ und G_1 allmählich grösser wird. Sollen alle Berührungspunkte zu gleicher Zeit fortgleiten, dann muss sein

$$tg\frac{\alpha}{2} = \mu_1, \text{ und } \frac{G_1}{2\,G_2 + G_1}\, tg\frac{\alpha}{2} = \mu_2, \text{ also } \frac{G_2}{G_1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\,\mu_2}.$$

2. Die höheren Enden K_1, K_2 zweier gleichförmiger Stäbe AK_1, AK_2 (Fig. 223), welche sich in einer vertikalen Ebene um den festen Punkt A drehen können, an welchem ihre tieferen Enden befestigt sind, sind durch einen gewichtslosen Faden K_1K_2 verbunden. Eine schwere Kugel ist zwischen die beiden Stäbe gelegt und der Faden sei verkürzbar. Welches ist die Spannung des Fadens in dem Momente, wo die Kugel im Begriffe ist, aufwärts zu springen, wenn die Coëfficienten der Reibung zwischen der Kugel und den Stäben gegeben sind.



Figur 223.

Lasse sein R_1, R_2 die Reaktionen der Stäbe auf die Kugel, rechtwinkelig zu ihren Längen, F_1, F_2 die Reibungswiderstände entlang den

Stäben, $2\alpha =$ dem von beiden Stäben eingeschlossenen Winkel, $T =$ der Spannung des Fadens $K_1 K_2$, $G =$ dem Gewichte der Kugel, $G_1 =$ demjenigen eines Stabes, $2a =$ der Länge eines jeden der Stäbe, AL das Lot von A auf $K_1 K_2$.

Für das Gleichgewicht der Kugel haben wir, die Kräfte parallel und rechtwinkelig zu AL zerlegend und Momente um den Mittelpunkt O der Kugel nehmend,

$$(F_1 + F_2)\cos\alpha + G - (R_1 + R_2)\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

$$(F_2 - F_1)\sin\alpha - (R_1 - R_2)\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

$$F_1 . OE_1 - F_2 . OE_2 = 0, \quad \text{oder} \quad F_1 - F_2 = 0. \qquad (3)$$

Mit (2) und (3) bekommen wir

$$R_2 = R_1. \qquad (4)$$

Nun nehmen wir an, dass die Kugel in dem Zustande sei, durch das Zusammenziehen des Fadens in ihrer Lage gestört zu werden, einer oder beide der Berührungspunkte E_1, E_2 der Kugel und der Stäbe müssen dann im Zustande des Gleitens entlang dem entsprechenden Stabe sein. Das Gleiten sei im Begriffe bei E_1 Platz zu greifen, dann haben wir, wenn μ_1 der Coëfficient der Reibung zwischen dem Stabe K_1 und der Kugel ist, $F_1 = \mu_1 R_1$, und daher durch (1), (3), (4)

$$2\mu_1 R_1 \cos\alpha + G - 2R_1 \sin\alpha = 0$$

und, wenn wir noch $\mu_1 = tg\,\varrho_1$ setzen,

$$R_1 = \frac{G}{2(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)} = \frac{G\cos\varrho_1}{2\sin(\alpha - \varrho_1)}. \qquad (5)$$

Ferner ist mit (3) und (4)

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{F_1}{R_1} = \mu_1, \quad \text{und mithin} \quad F_2 = \mu_1 R_2.$$

Wir sehen folglich, dass, wenn μ_2 der Coëfficient der Reibung zwischen der Kugel und dem Stabe AK_2 ist, μ_1 nicht grösser als μ_2 ist, weil der grösste Wert von F_2 $\mu_2 R_2$ sein wird. Wenn μ_1 kleiner als μ_2 wäre, so würde die Kugel bei dem geringsten Wachstum der Spannung von $K_1 K_2$ beginnen entlang AK_2 zu rollen ohne zu gleiten, und wenn $\mu_1 = \mu_2$ würde, so würde die Kugel gleichzeitig in beiden Punkten zu gleiten beginnen.

Weiter haben wir für das Gleichgewicht von AK_1, Momente um A nehmend, wobei daran erinnert sei, dass die Aktionen und Reaktionen zwischen Kugel und Stab gleich und entgegengesetzt sind,

$$R_1 . AE_1 + G_1 . a\sin\alpha - T . 2a\cos\alpha = 0$$

und daher, wenn r der Halbmesser der Kugel ist,

$$R_1 r \cot g\,\alpha + G_1 a\sin\alpha - 2Ta\cos\alpha = 0,$$

folglich, für R_1 seinen durch (5) gegebenen Wert setzend,

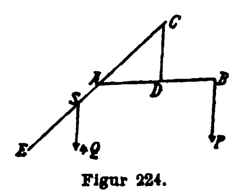
$$\frac{G\,r\cos\varrho_1\cos\alpha}{2\sin\alpha\sin(\alpha-\varrho_1)}+G_1 a\sin\alpha-2\,T a\cos\alpha=0,$$

und daher

$$T=\frac{G\,r\cos\varrho_1}{4\,a\sin\alpha\sin(\alpha-\varrho_1)}+\frac{1}{2}G_1\,tg\,\alpha.$$

Walton, p. 98.

3. AB (Fig. 224) ist ein gleichförmiger, um seinen Mittelpunkt D beweglicher Stab, CE ist ein zweiter Stab, welcher um ein Charnier in der vertikalen Linie durch D drehbar und gegen den Stab AB drückt. An das Ende B von AB ist ein Gewicht P gehängt und beide Stäbe sind in einer vertikalen Ebene gelegen. CD, AD, BD sind Linien gleicher Länge. Die Grösse des Winkels ACD ist in dem Augenblicke beobachtet worden, wo der Stab AB in dem Zustande ist, in welchem sein Ende A in der Richtung CE zu gleiten beginnt. Welches ist der Coëfficient der Reibung zwischen den zwei Stäben?



Figur 224.

Es sei S der Schwerpunkt des Stabes CE, R die gegenseitige Wirkung der zwei Stäbe, rechtwinkelig zu CE, $\sphericalangle ACD=\beta=\sphericalangle CAD$, $AD=a=BD$, $CS=b$, $4\,Q$ das in S angreifende Gewicht des Stabes CE. Für das Gleichgewicht von CE ist, Momente um C nehmend,

$$R.2\,a\cos\beta=4\,Q.b\sin\beta,\quad\text{oder}\quad a\,R\cos\beta=2\,b.Q\sin\beta \qquad (1)$$

und für das Gleichgewicht von AB, Momente um D nehmend,

$$R.a\cos\beta=\mu R.a\sin\beta+P.a\sin 2\beta\ \text{oder}\ R(\cos\beta-\mu\sin\beta)=P\sin 2\beta. \quad (2)$$

Mit (1) und (2) ist nun hier

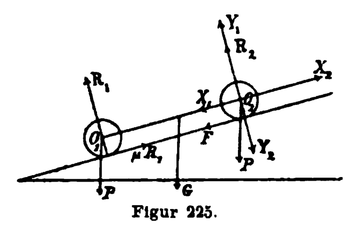
$$\frac{2\,b\,Q\sin\beta}{a\cos\beta}(\cos\beta-\mu\sin\beta)=2\,P\sin\beta\cos\beta,\ b\,Q(1-\mu\,tg\,\beta)=a\,P\cos\beta,$$

woraus

$$\mu=\frac{b\,Q-a\,P\cos\beta}{b\,Q\,tg\,\beta}.$$

Walton, p. 100.

4. Ein Gewicht G ist in dem Mittelpunkte eines starren, gewichtslosen Stabes O_1O_2 aufgehängt (Fig. 225), welcher die Mittelpunkte O_1, O_2 zweier gleicher, gleich schwerer Räder verbindet, die sich auf einer rauhen geneigten Ebene befinden. Das Rad O_1 ist gehemmt. Zu finden die grösste Neigung der schiefen Ebene für das Gleichgewicht des Gestelles.



Figur 225.

Es sei P das Gewicht, r der Halbmesser eines jeden der Räder,

$O_1 O_2 = 2a$, $\varphi =$ der Horizontalneigung der Ebene. Ferner seien R_1, R_2 die Reaktionen der Ebene auf die Räder, rechtwinkelig zu ihr selbst. μR_1, F die Reibungswiderstände an den Rädern O_1, O_2 parallel zur Ebene wirkend, X_1, Y_1 die Componenten der Wirkung des Rades O_2 auf den Stab $O_1 O_2$ parallel und senkrecht zu der Ebene, X_2, Y_2 die gleichen Componenten der Reaktion.

Für das Gleichgewicht des Rades O_1 und des Stabes $O_1 O_2$, beide als ein System betrachtet, bestehen die Bedingungen, indem wir die Kräfte parallel und senkrecht zu der schiefen Ebene zerlegen und Momente um O_1 nehmen

$$\mu R_1 = X_1 + (P + G) \sin \varphi, \quad (1) \qquad R_1 + Y_1 = (P + G) \cos \varphi, \quad (2)$$

$$\mu R_1 r + 2a Y_1 = G a \cos \varphi. \quad (3)$$

Weiter ist für das Gleichgewicht des Rades O_2, Momente um den Berührungspunkt dieses Rades mit der Ebene nehmend,

$$X_2 r = P r \sin \varphi, \quad \text{oder} \quad X_2 = P \sin \varphi. \quad (4)$$

Mit den Gleichungen (1) und (4), beachtend, dass X_2 durch die Beschaffenheit der Aktion und Reaktion gleich X_1 ist, bekommen wir

$$\mu R_1 = (2P + G) \sin \varphi. \quad (5)$$

Ferner ist vermöge (2) und (3)

$$\mu R_1 r = 2a(P + G) \cos \varphi - 2a R_1 = G a \cos \varphi,$$

$$(2a - \mu r) R_1 = a(2P + G) \cos \varphi. \quad (6)$$

Nun erhalten wir durch (5) und (6) für die verlangte Neigung der Ebene

$$tg\, \varphi = \frac{\mu a}{2a - \mu r}.$$

Haben wir φ bestimmt, dann kennen wir R_1 durch (5) und X_2 oder X_1 durch (4), daher Y_1 zufolge (2). Auch ist es, wenn F die einzige Kraft, welche an dem Rade O_2 wirkt, die nicht durch seinen Mittelpunkt geht, offenbar, dass dann F gleich Null sein muss.

Walton, p. 101.

5. Auf einer rauhen horizontalen Ebene liegen n homogene Kugeln gleicher Grösse und gleichen Gewichtes so in Berührung, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmässigen Polygones bilden. Auf diese Kugeln wird eine weitere Kugel von anderer Grösse und anderem Gewicht so gebracht, dass sie jede der unteren Kugeln berührt. Die Berührungspunkte der oberen Kugel und der unteren Kugeln sind dann offenbar die Eckpunkte eines dem ersteren Polygone ähnlichen Polygones. Der Coëfficient für die Reibung zwischen der oberen und jeder der unteren Kugeln ist μ_1, zwischen jeder der unteren Kugeln und der Ebene μ_2. Welches sind die Gleichgewichtsbedingungen, sowie die Relation zwischen μ_1 und μ_2, wenn alle Berührungspunkte zugleich fortgleiten?

Es sei G_1 das Gewicht der oberen, G_2 dasjenige jeder der unteren Kugeln, R_1 die gegenseitige Wirkung zwischen der oberen und einer der unteren Kugeln, F_1 der Reibungswiderstand daselbst, R_2 die Reaktion der Ebene auf jede der unteren Kugeln, F_2 der Reibungswiderstand daselbst, a_1 der Halbmesser der oberen, a_2 derjenige einer der unteren Kugeln. Die Mittelpunkte sämtlicher Kugeln liegen in den Eckpunkten einer regulären n-seitigen Pyramide, von welcher eine Seite der Grundfläche gleich $2\,a_2$, der Mittelpunkt der oberen Kugel die Spitze, die Kante zweier Seitenflächen gleich $(a_1 + a_2) = b$. Das Gewicht der oberen Kugel wirkt in der Höhenlinie dieser Pyramide vertikal abwärts und zerlegt sich in Componenten, deren Richtungen mit den Kanten der Seitenflächen zusammenfallen; diese sind gleich und entgegengesetzt den Reaktionen R_1. Der Reibungswiderstand F_1 in dem Berührungspunkte zwischen der oberen und einer der unteren Kugeln wirkt senkrecht zu R_1 in der Ebene durch die Höhenlinie und die entsprechende Kante der Pyramide nach oben. In dem Berührungspunkte einer der unteren Kugeln mit der Ebene wirkt vertikal aufwärts die Reaktion R_2 der Ebene und der Reibungswiderstand F_2 der Ebene in der Richtung nach der Horizontalprojektion der Spitze der Pyramide. Der Winkel, welchen eine Seitenkante der Pyramide mit ihrer Höhenlinie einschliesst, sei α.

Sehen wir die obere Kugel als ein freies System an, so wirken an demselben das Gewicht G_1, die n Kräfte R_1 und die n Kräfte F_1, welche unter sich im Gleichgewichte sein müssen. Zerlegen wir daher diese Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung, dann ist die Gleichgewichtsbedingung für die obere Kugel

$$G_1 - n\,R_1 \cos\alpha - n\,F_1 \sin\alpha = 0, \text{ oder } G_1 - n\,R_1\,(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) = 0, \quad (1)$$

weil $F_1 = \mu_1 R_1$ ist.

Betrachten wir jede der unteren Kugeln als ein freies System, so wirken an demselben die Kräfte G_2, R_1, R_2, F_1, F_2. Indem wir diese Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung zerlegen und Momente um den Kugelmittelpunkt nehmen, erhalten wir für dasselbe die Gleichgewichtsbedingungen

$$G_2 - R_2 + R_1 \cos\alpha + F_1 \sin\alpha = 0, \quad (2) \qquad F_2 - R_1 \sin\alpha + F_1 \cos\alpha = 0, \quad (3)$$

$$F_2\,a_2 - F_1\,a_2 = 0, \quad \text{oder} \quad F_2 - F_1 = 0. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{F_1}{R_1} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = tg\,\frac{\alpha}{2}, \quad \text{oder} \quad \mu_1 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = tg\,\frac{\alpha}{2}, \quad (5)$$

so dass mit (1) und (5)

$$R_1 = \frac{G_1}{n\,(\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha)} = \frac{1}{n}\,G_1. \quad (6)$$

Durch (1), (2) und (4) ergiebt sich

$$R_2 = \frac{n\,G_2 + G_1}{n}. \qquad (7)$$

Mit (3), (4) und (6) erhalten wir

$$F_1 = F_2 = \mu_1 R_1 = \mu_2 R_2 = \frac{G_1 \sin\alpha}{n(1+\cos\alpha)} = \frac{G}{n}\,tg\frac{\alpha}{2}. \qquad (8)$$

und nun ist mit (7) und (8)

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{G_1}{n\,G_2 + G_1}\,tg\frac{\alpha}{2} = \mu_2 = \frac{G_1}{n\,G_2 + G_1}\,\mu_1. \qquad (9)$$

Die Gleichungen (5) und (9) geben die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen. Damit alle Berührungspunkte zu gleicher Zeit fortgleiten, muss gleichzeitig den Gleichungen (5) und (9) Genüge geschehen und folgt aus ihnen dafür die Bedingung

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{n\,\mu_2}. \qquad (10)$$

Es handelt sich jetzt noch darum, $tg\frac{\alpha}{2}$ durch bekannte Grössen auszudrücken. Ist r der Halbmesser des dem Polygone der Mittelpunkte der unteren Kugeln umschriebenen Kreises, dann haben wir

$$\sin\alpha = \frac{r}{a_1 + a_2} = \frac{r}{b}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - r^2},$$

also

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{r}{b + \sqrt{b^2 - r^2}},$$

folglich ist auch

$$\mu_1 = \frac{r}{b + \sqrt{b^2 - r^2}}, \; (5') \quad \mu_2 = \frac{G_1}{n\,G_2 + G_1}\,\frac{r}{b + \sqrt{b^2 - r^2}}. \qquad (9')$$

In dem besonderen Falle, wo die Kugeln sämtlich von gleicher Grösse und gleichem Gewichte, also $a_1 = a_2 = a$, $b = 2a$, $G_1 = G_2 = G$, erhalten wir

$$R_1 = \frac{1}{n}G, \; (6') \qquad R_2 = \frac{n+1}{n}G, \qquad (7')$$

$$\mu_1 = tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2a + \sqrt{4a^2 - r^2}}, \qquad (5'')$$

$$\mu_2 = \frac{1}{n+1}\,tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{n+1}\,\frac{r}{2a + \sqrt{4a^2 - r^2}} = \frac{1}{n+1}\,\mu_1. \qquad (9'')$$

Daraus erkennen wir, dass in diesem Falle μ_2 nur gleich dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Teile von μ_1 zu sein hat für den Gleichgewichtszustand, was überdies durch die Gleichung (10) sich ergiebt, denn aus ihr folgt $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{n+1}$.

Ruht die obere Kugel auf drei ihr gleichen Kugeln, dann sind die Mittelpunkte der vier Kugeln Eckpunkte eines Tetraeders mit den Kanten-

längen $2a$, es ist $n = 3$, $r = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, daher $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2a}{\left(2a + \sqrt{4a^2 - \frac{4a^2}{3}}\right)\sqrt{3}}$
$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 0{\cdot}32$, und mithin

$$R_1 = \frac{1}{3}G, \quad R_2 = \frac{4}{3}G, \quad \mu_1 \geqq 0{\cdot}32, \quad \mu_2 \geqq \frac{1}{4}\mu_1 \geqq 0{\cdot}08.$$

Stützt sich die obere Kugel auf vier ihr gleiche Kugeln, dann liegen die Mittelpunkte aller Kugeln in den Ecken einer regulären vierseitigen Pyramide, es ist $b = 2a$, $n = 4$, $r = a\sqrt{2}$, womit $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1{\cdot}42$, daher

$$R_1 = \frac{1}{4}G, \quad R_2 = \frac{5}{4}G, \quad \mu_1 \geqq 0{\cdot}42, \quad \mu_2 \geqq \frac{1}{5}\mu_1 \geqq 0{\cdot}084.$$

Liegen fünf Kugeln auf der horizontalen Ebene, so haben wir, da jetzt die in Frage kommende reguläre Pyramide fünfseitig ist, $b = 2a$, $r = 5$,
$r = a\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. Damit ist $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}}{2 + \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}}$,

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = 0{\cdot}56, \text{ folglich}$$

$$R_1 = \frac{1}{5}G, \quad R_2 = \frac{6}{5}G, \quad \mu_1 \geqq 0{\cdot}56, \quad \mu_2 \geqq \frac{1}{6}\mu_1 \geqq 0{\cdot}094.$$

6. Zwei gleiche Balken AC, BC, verbunden durch ein glattes Charnier bei C, sind in eine vertikale Ebene gebracht und stützen sich mit ihren tieferen Enden A und B auf eine rauhe horizontale Ebene. Es sei der grösste Wert des Winkels ACB bekannt, für welchen Gleichgewicht möglich ist, und soll der Coëfficient der Reibungswiderstände an den Enden A und B bestimmt werden.

Wenn β der grösste Wert des Winkels ACB und μ der Reibungscoëfficient für die Balkenenden A, B ist, so wird gefunden werden

$$\mu = \frac{1}{2}\, tg\frac{\beta}{2}.$$

7. Zwei gleiche Halbcylinder sind in der nämlichen vertikalen Höhe horizontal gelegt, ihre rauhen flachen Flächen stützen sich gegen zwei vertikale, parallele, ebene Flächen, der Abstand dieser Flächen ist nur wenig grösser als der Diameter eines der Cylinder. Ein glatter Keil mit abwärts gekehrter Spitze ruht zwischen den zwei Halbcylindern an ihren krummen Oberflächen. Man soll den vertikalen Winkel des Keiles unter der Voraussetzung bestimmen, dass die Cylinder in dem Zustande seien, abwärts zu gleiten.

Es sei G das Gewicht eines der Cylinder, G_1 dasjenige des Keiles, 2ϑ sein vertikaler Winkel, dann ist

$$tg\,\vartheta = \frac{\mu G_1}{2G + G_1}.$$

6 u. 7. Walton, p. 102.

Zweites Kapitel.

Schwerpunkt.

Schon **Archimedes** gelangte zu der Vorstellung von dem „Schwerpunkte“ oder „Mittelpunkte der Masse“ materieller Körper oder eines Systemes materieller Punkte. Derselbe bestimmte bereits die Schwerpunkte verschiedener Flächen, wie aus seiner Abhandlung, betitelt „Ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν ἢ κέντρα παρῶν ἐπιπέδων“, zu ersehen ist; er ermittelte unter anderem den Schwerpunkt des parabolischen Konoides. Der Gedanke zur Bestimmung des Schwerpunktes krummer Linien tauchte in **La-Faille**, einem niederländischen Mathematiker, zuerst auf; er ermittelte den Schwerpunkt von Teilen des Kreises und der Ellipse und veröffentlichte darüber im Jahre 1632 das Werk „De centro gravitatis partium circuli et ellipsis theoremata“. Die Theoreme von La-Faille wurden später in einer eleganteren Gestalt und mit Erweiterungen durch Guldin bekannt gegeben (Centrobaryca, 1635, Lib. I, cap. 4, 5, 6, 7). Von den Nachfolgern des Archimedes, welche die Lehre vom Schwerpunkte weiter ausbildeten, mögen noch genannt werden: Pappus (Mathemat. Collect. Lib. 8, veröffentlicht in der ersten Zeit des Jahres 1588), Guido Ubaldi (In duos Archimedis Aequiponderantium libros Paraphrasis, 1588), Lucas Valerius (De Centro Gravitatis Solidorum, 1604), Wallis (Opera, Tom. I, cap. 4 et 5, 1670), Carré (Mésure des Surfaces, 1700), Varignon (Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1714), Clairaut (Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1731, p. 159).

Für ein schweres, aus einzelnen materiellen Punkten bestehendes System bezeichne m die Masse eines seiner Punkte, M die Gesamtmasse des Systemes, P_1 das Gewicht eines Punktes, P das Gesamtgewicht, V_1 das Volumen eines Punktes, V das Gesamtvolumen, ϱ die mittlere Dichtigkeit. Bezüglich eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Systempunktes, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten des Schwerpunktes des Systemes. Damit sind für ein beliebiges heterogenes oder homogenes System die Schwerpunktscoordinaten

$$\bar{x} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m},$$

oder

$$\bar{x} = \frac{\Sigma P_1 x}{\Sigma P_1}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma P_1 y}{\Sigma P_1}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma P_1 z}{\Sigma P_1}.$$

Mit $\Sigma m = M$, $\Sigma P_1 = P$ ergeben sich hieraus die Momentengleichungen

$$M\bar{x} = \Sigma m x, \quad M\bar{y} = \Sigma m y, \quad M\bar{z} = \Sigma m z,$$

oder

$$P\bar{x} = \Sigma P_1 x, \quad P\bar{y} = \Sigma P_1 y, \quad P\bar{z} = \Sigma P_1 z.$$

Für ein homogenes System ist $M = \varrho V$, oder $\varrho = M : V$. Die mittlere Dichtigkeit eines Systemes, welches aus einem Aggregate homogener Massen $M', M'', M''', \ldots,$

deren Volumina V', V'', V''', ... sind, zusammengesetzt ist, bestimmt sich durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{M' + M'' + M''' + \ldots}{V' + V'' + V''' + \ldots} = \frac{\varrho' V' + \varrho'' V'' + \varrho''' V''' + \ldots}{V' + V'' + V''' + \ldots}.$$

Die Dichtigkeit eines kontinuierlichen heterogenen Systemes in einem bestimmten Punkte ist $\varrho = \frac{d m}{d v}$, gleich dem Massenelement daselbst, geteilt durch sein Volumenelement.

Handelt es sich um ein kontinuierliches heterogenes oder homogenes System, so gehen die Summationen in Integrationen über und können wir sowohl Parallel- als auch Polarcoordinaten zugrunde legen.

a) Anwendung von Parallelcoordinaten

I. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen, doppelt gekrümmten Curvenbogens von der Masse m, der Länge s und der nach irgend einem Gesetze veränderlichen Dichtigkeit ϱ bestimmen sich durch die Gleichungen

$$m = \int_{x'}^{x''} \varrho \, d s, \quad m \bar{x} = \int_{x'}^{x''} \varrho \, x \, d s, \quad m \bar{y} = \int_{x'}^{x''} \varrho \, y \, d s, \quad m \bar{z} = \int_{x'}^{x''} \varrho \, z \, d s,$$

wobei der Zusammenhang zwischen x, y, z durch die Gleichungen der Curve und $d s = \sqrt{d x^2 + d y^2 + d z^2}$ gegeben ist.

Für eine homogene Linie ist ϱ konstant, so dass

$$m = \varrho s, \quad s = \int_{x'}^{x''} d s, \quad s \bar{x} = \int_{x'}^{x''} x \, d s, \quad s \bar{y} = \int_{x'}^{x''} y \, d s, \quad s \bar{z} = \int_{x'}^{x''} z \, d s.$$

Liegt insbesondere die Curve in einer Ebene, dann ist $z = 0$, $\bar{z} = 0$, und das letzte Integral fällt fort.

II. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen eben- oder krummflächigen Flächenstückes bestimmen sich, wenn M die Masse, $d\omega$ ein Element der Fläche bezeichnet, durch die Gleichungen

$$M = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, d \omega, \quad M \bar{x} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, x \, d \omega, \quad M \bar{y} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, y \, d \omega,$$

$$M \bar{z} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, z \, d \omega.$$

Mit $U = 0$ als Gleichung der Fläche, $d \omega = \frac{d x \, d y}{\cos \gamma}$, wo γ der Winkel ist, welchen das Flächenelement mit der zur Ebene der $x y$ parallelen Ebene einschliesst, und $\frac{d z}{d x} = p$, $\frac{d z}{d y} = q$, also $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, erhalten wir

$$M = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, d x \, d y \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad M \bar{x} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, x \, d x \, d y \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$M \bar{y} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, y \, d x \, d y \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad M \bar{z} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, z \, d x \, d y \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Befindet sich das Flächenstück von der Grösse F in einer Ebene, nehmen wir dieselbe zur Ebene der $x y$, dann sind alle z und $\bar{z} = 0$, $\cos \gamma = 1$, $d \omega = d x \, d y$, womit die vorstehenden Gleichungen übergehen in

$$M = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, d x \, d y, \quad M \bar{x} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, x \, d x \, d y, \quad M \bar{y} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \varrho \, y \, d x \, d y.$$

Ist insbesondere das Flächenstück homogen, also ϱ konstant, dann wird $M = \varrho F$, wodurch

$$F = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} dx\,dy, \quad F\bar{x} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} x\,dx\,dy, \quad F\bar{y} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} y\,dx\,dy,$$

oder

$$F = \int_{x'}^{x''}(y''-y')\,dx, \quad F\bar{x} = \int_{x'}^{x''} x(y''-y')\,dx, \quad F\bar{y} = \int_{x'}^{x''}(y''^2-y'^2)\,dx.$$

III. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen, beliebig begrenzten Körpers haben wir mittelst der Gleichungen zu bestimmen

$$M = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho\,dx\,dy\,dz, \qquad M\bar{x} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho\,x\,dx\,dy\,dz,$$

$$M\bar{y} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho\,y\,dx\,dy\,dz, \qquad M\bar{z} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho\,z\,dx\,dy\,dz.$$

Bei homogenen Körpern ist $\varrho = M : V$, mithin

$$V = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dx\,dy\,dz, \qquad V\bar{x} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$V\bar{y} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} y\,dx\,dy\,dz, \qquad V\bar{z} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} z\,dx\,dy\,dz.$$

Die auf z bezüglichen Integrationen lassen sich hier sofort ausführen und erhalten wir dadurch

$$V = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}(z''-z')\,dx\,dy, \qquad V\bar{x} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} x(z''-z')\,dx\,dy,$$

$$V\bar{y} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} y(z''-z')\,dx\,dy, \qquad V\bar{z} = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}(z''^2-z'^2)\,dx\,dy.$$

Wenn der homogene Körper ein Rotationskörper ist, dessen Rotationsaxe mit der Axe der x zusammenfällt, wird $\bar{y} = \bar{z} = 0$, $z' = -z''$,

$$V = \pi\int_{x'}^{x''}(y''^2-y'^2)\,dx, \qquad V\bar{x} = \pi\int_{x'}^{x''} x(y''^2-y'^2)\,dx.$$

b) Anwendung von Polarcoordinaten.

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, anstatt Parallelcoordinaten Polarcoordinaten zu verwenden. Bezeichnet r den Radiusvektor, ϑ den Winkel zwischen ihm und der Polaraxe, φ den Winkel zwischen der Ebene von ϑ und der Fundamentalebene, dann ist $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = r\sin\vartheta\sin\varphi$, womit die Formeln für Polarcoordinaten aus den obigen leicht abgeleitet werden können.

Für einen Körper von der Masse M ergiebt sich, da dessen Volumenelement $dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$,

$$M = \iiint \varrho\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi, \qquad M\bar{x} = \iiint \varrho\,r^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

$$M\bar{y} = \iiint \varrho\,r^3\sin^2\vartheta\cos\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi, \qquad M\bar{z} = \iiint \varrho\,r^3\sin^2\vartheta\sin\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Ist die Dichtigkeit ϱ konstant, dann sind nur die Formeln erforderlich

$$V = \iiint r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi, \qquad M\bar{x} = \iiint r^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

$$M\bar{y} = \iiint r^3\sin^2\vartheta\cos\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi, \qquad M\bar{z} = \iiint r^3\sin^2\vartheta\sin\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Die Grenzen der Integrationen sind hier bei jedem besonderen Falle in Erwägung zu

ziehen, jedoch sind die Integrationen bezüglich r allgemein ausführbar, wenn ϱ konstant ist, so dass mit r' und r'' als Grenzen von r noch geschrieben werden kann

$$V = \frac{1}{3}\iint (r''^3 - r'^3) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \qquad V\bar{x} = \frac{1}{4}\iint (r''^4 - r'^4) \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

$$V\bar{y} = \frac{1}{4}\iint (r''^4 - r'^4) \sin^2\vartheta \cos\varphi \, d\vartheta \, d\varphi, \quad V\bar{z} = \frac{1}{4}\iint (r''^4 - r'^4) \sin^2\vartheta \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Erste Abteilung.

Schwerpunkte homogener Systeme.

Erster Abschnitt.

Schwerpunkte von Linien.

1. Der Schwerpunkt einer homogenen, geraden Linie fällt mit ihrem geometrischen Mittelpunkte zusammen.

a) Analytischer Beweis.

Die Gleichung der geraden Linie sei $y = ax + b$, die Coordinaten der Endpunkte der von ihr in Frage kommenden Strecke seien (x', y'), (x'', y''). Damit erhalten wir

$$s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + a^2}\int_{x'}^{x''} dx = \sqrt{1 + a^2}\,(x'' - x'),$$

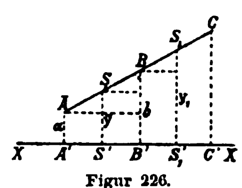
$$s\bar{x} = \sqrt{1 + a^2}\int_{x'}^{x''} x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1 + a^2}\,(x''^2 - x'^2),$$

$$s\bar{y} = \sqrt{1 + a^2}\int_{x'}^{x''} (ax+b)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1 + a^2}\,(x'' - x')(y' + y''),$$

so dass $\bar{x} = \frac{s\bar{x}}{s} = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $\qquad \bar{y} = \frac{s\bar{y}}{s} = \frac{1}{2}(y' + y'')$.

Die Werte von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ sind identisch mit den Werten der Mittelpunktscoordinaten der betrachteten Strecke, mithin liegt der gesuchte Schwerpunkt in ihrer Mitte.

b) Elementarer Beweis.



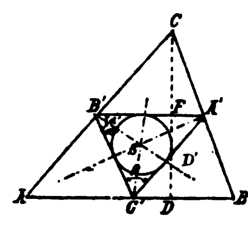
Figur 226.

Es sei m die Masse der Geraden AB (Figur 226), XX, eine mit ihr in einer Ebene gelegene Gerade, die Abscissenaxe, a, b seien die Ordinaten der Endpunkte A, B, $\bar{y}$ sei die Schwerpunktsordinate SS'. Wird AB um $BC = AB$ verlängert, bezeichnet y_1 die Ordinate $S_1 S'$ des Schwerpunktes S_1 der Strecke BC, y_2 diejenige des Schwerpunktes der Strecke $AC = 2 . AB$, so muss der Momentengleichung genügt werden $m\bar{y} + m y_1 = (m + m)\, y_2$, wodurch $\bar{y} + y_1 = 2 y_2$. Ferner besteht, weil die Schwerpunkte ähnliche Lage haben, die Relation $(\bar{y} - a) : (y_1 - b) : (y_2 - a)$

$= 1:1:2$. Aus diesen zwei Gleichungen folgt $y = \frac{1}{2}(a + b)$. Da nun $\mathfrak{y} = SS'$ die Mittellinie des Trapezes $A\,B\,B'\,A'$ ist, so liegt der Schwerpunkt S der Geraden $A\,B$ in ihrer Mitte.

Schell, Theorie der Bewegung etc.

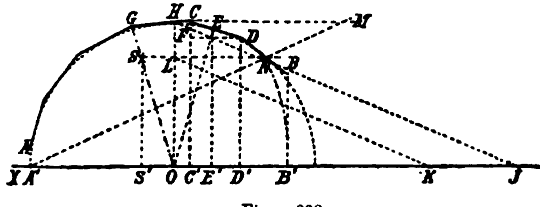
2. Der Schwerpunkt eines homogenen Dreiecksumfanges fällt mit dem Mittelpunkte desjenigen Kreises zusammen, welcher dem Dreiecke der Seitenmittelpunkte eingeschrieben werden kann.



Figur 227.

Ist für das Dreieck $A\,B\,C$ (Fig. 227) $A'\,B'\,C'$ das Dreieck der Seitenmittelpunkte, $B\,C = a$, $A\,C = b$, $A\,B = c$, $C\,D \perp A\,B = h$, der Abstand des Schwerpunktes S von $A\,B = \mathfrak{y}$, von $A'\,B' = \mathfrak{z}$, so haben wir folgendes. Die Massen der Dreiecksseiten a, b, c, proportional deren Längen, können in ihren Mittelpunkten A', B', C' angreifend gedacht werden. Die Resultante aus den Kräften a und c in den Punkten A' und C' geht durch einen Punkt D' von $A'\,C'$, für denselben ist $A'\,D' : C'\,D' = c : a = A\,B : B\,C = A'\,B' : B'\,C'$, so dass $B'\,D'$ eine Schwerlinie des Systemes ist. Mit Rücksicht auf die Figur ist nun $\sin\alpha' : \sin(\beta + \alpha'') = A'\,D' : A'\,B'$, $\sin\alpha'' : \sin(\beta + \alpha'') = C'\,D' : B'\,C' = A'\,D' : A'\,B'$, daher $\sin\alpha' = \sin\alpha''$, d. i. $\alpha' = \alpha''$, d. h. die Schwerlinie $B'\,D'$ halbiert den Winkel $A'\,B'\,C'$. Für die Resultante der Kräfte b, c in den Punkten B', C', sowie diejenige der Kräfte a, b in A', B' gilt das entsprechende Der Durchschnittspunkt der Halbierungslinien der Innenwinkel des Dreieckes der Seitenmittelpunkte giebt mithin die Lage des Schwerpunktes S, er fällt zusammen mit dem Mittelpunkte des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises. Um noch den Halbmesser r dieses Kreises zu finden, sei $A\,B$ Momentenaxe, für dieselbe ist, mit $a + b + c = u$, $u\,\mathfrak{y} = (a + b)\frac{h}{2}$, also $\mathfrak{y} = \frac{(a + b)\,h}{2\,u}$, $\mathfrak{z} = \frac{h}{2} - \mathfrak{y} = \frac{c\,h}{2\,u} = \frac{F}{u}$, d. h. der Abstand des Schwerpunktes S von den Seiten des Mittelpunktsdreieckes ist konstant, gleich der Fläche des Dreieckes $A\,B\,C$ geteilt durch seinen Umfang, folglich $r = \mathfrak{z} = F : u$.

3. Der Abstand des Schwerpunktes eines homogenen, regulären Polygonzuges von einer in seiner Ebene gelegenen, durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises gehenden Geraden ist gleich dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises mal den Quotienten aus der Projektion des Zuges auf diese Gerade und der Länge desselben, und liegt der Schwerpunkt S auf der durch den Kreismittelpunkt gehenden Symmetrieaxe des Zuges.



Figur 228.

Ist (Fig. 228) $A\,B = l$ der gegebene Polygonzug, $X\,O\,X$ die gegebene Gerade, wobei O der Mittelpunkt des dem Zuge eingeschriebenen Kreises, so ziehe, beachtend, dass der Schwerpunkt einer jeden Polygonseite, etwa $C\,D = \Delta l$, in ihrer Mitte E

liegt, CC', DD', $EE' \perp XX$, $DF \parallel XX$ und $OE = r =$ dem Radius des eingeschriebenen Kreises, alsdann ist mit $DF = \Delta p$, $EE' = y$, $\Delta l : \Delta p = r : y$, oder $y = (\Delta p : \Delta l) . r$, daher die Momentangleichung mit XX als Axe $l\bar{y} = \Sigma\left(\Delta l \frac{\Delta p}{\Delta l}\right) r = r \Sigma \Delta p$, woraus folgt $\bar{y} = r \frac{\Sigma \Delta p}{l}$, so dass, weil $\Sigma \Delta p = A'B' = p =$ der Projektion des Polygonzuges auf die Gerade XOX,

$$\bar{y} = r \frac{p}{l}.$$

Im vorliegenden Falle befindet sich S auf der Geraden OG, denn dieselbe ist Symmetrielinie des Zuges, und mit $SS' \perp XX$ und $= \bar{y}$ ist S der verlangte Punkt

Durch Konstruktion lässt sich nun S wie folgt finden. Man mache, nachdem $OH \perp XX$ gezogen worden ist, $OJ = l = ACDB$, $OK = A'B' = p$, $KL \parallel HJ$, $LS \parallel XX$, so ist S der gewünschte Punkt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OHJ und OKL folgt nämlich $OL : OK = OH : OJ$, d. i. $\bar{y} : p = r : l$. Wenn $l > r$ ist, kann auch so verfahren werden. Man ziehe an den eingeschriebenen Kreisbogen eine Tangente $\parallel XX$, mache $A'M = l$, $A'N = p$, $NS \parallel XX$, dann ist S auf OG der verlangte Punkt. Denkt man sich nämlich $A'A$, MH und NS verlängert, bis sie sich schneiden, so ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der dadurch entstehenden Dreiecke, dass $\bar{y} : r = p : l$ ist.

4. Der Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens liegt auf dem zu seiner Sehne senkrechten Halbmesser und ist seine Entfernung von dem Mittelpunkte des Bogens gleich dem Produkte aus dem Halbmesser und dem Quotienten der Sehnen- und Bogenlänge.

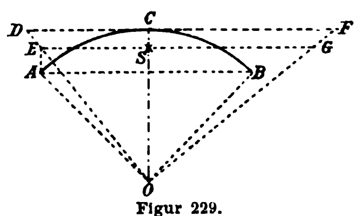
Denkt man sich in der vorhergehenden Aufgabe die Gerade XOX parallel zur Diagonale AB, die Seiten des Polygonzuges unendlich klein, so dass der Zug und der ihm eingeschriebene Kreisbogen zusammenfallen, dann ist hier die Formel unter 3 direkt anwendbar, denn man hat offenbar mit r als Halbmesser, s als Bogen- und a als Sehnenlänge

$$\bar{y} = r \frac{a}{s}.$$

Bezeichnet 2α den Centriwinkel des Bogens, dann ist $a = 2r \sin\alpha$, $s = 2r\alpha$, mithin auch

$$\bar{y} = r \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

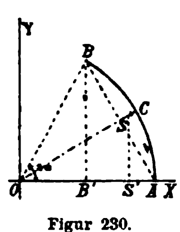
Durch Konstruktion ist nach der ersten Formel die Lage des Schwerpunktes S rasch auffindbar.



Figur 229.

a) Auf der Mitteltangente des Bogens AB (Fig. 229) mache $CD =$ Bogen AC, ziehe OD, $AE \parallel OC$, $ES \parallel AB$, dann ist S auf OC der verlangte Punkt, denn es besteht die Proportion $OS : ES = OC : CD$, oder $\bar{y} : \frac{a}{2} = r : \frac{s}{2}$, d. i. $\bar{y} = r \frac{a}{s}$.

b) Ist der Bogen $AB > r$, so ziehe die Mitteltangente durch C, mache $OF =$ Bogen AB, $OG =$ Sehne AB und $GS \parallel AB$, dann ist S auf OC der gewünschte Punkt, denn infolge der Konstruktion besteht die Relation $OS : OC = OG : OF$, d. i. $y : r = a : s$.



Figur 230.

5. Gegeben ein homogener Kreisbogen AB (Fig. 230) vom Halbmesser r mit dem Mittelpunkte O und dem Centriwinkel 2α; verlangt die rechtwinkeligen Coordinaten seines Schwerpunktes S für einen der diesen Winkel einschliessenden Halbmesser als Axe der x mit dem Ursprunge in O und den Abstand des Schwerpunktes von O.

a) Das für rechtwinkelige Coordinaten uns zu Gebote stehende Gleichungensystem ist

$$x^2 + y^2 = r^2,\quad s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,\quad s\bar{x} = \int_{x'}^{x''} x\, ds,\quad s\bar{y} = \int_{x'}^{x''} y\, ds.$$

Mit $BB' \perp OX$ ist $x' = OB' = r\cos 2\alpha$, $x'' = r$. Aus der Gleichung des Kreises ziehen wir $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, womit wir erhalten

$$s = r\int_{r\cos 2\alpha}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r\alpha,\quad s\bar{x} = r\int_{r\cos 2\alpha}^{r} \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r^2 \sin 2\alpha,$$

$$s\bar{y} = r\int_{r\cos 2\alpha}^{r} dx = 2r^2 \sin^2 \alpha.$$

Mit diesen Werten folgt

$$\bar{x} = \frac{s\bar{x}}{s} = \frac{r\sin 2\alpha}{2\alpha},\qquad \bar{y} = \frac{s\bar{y}}{s} = \frac{r\sin^2\alpha}{\alpha}.$$

Nun ist

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{2r\sin^2\alpha}{r\sin 2\alpha} = tg\,\alpha = tg \measuredangle AOS,$$

es halbiert sonach die durch S und O gehende Schwerlinie den Centriwinkel 2α, also auch den Bogen AB. Bezeichnet $\bar{z}$ den Abstand des Schwerpunktes vom Coordinatenanfange, dann ist

$$\bar{z}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2\left(\frac{\sin^2 2\alpha}{4\alpha^2} + \frac{\sin^4\alpha}{\alpha^2}\right) = \frac{r^2 \sin^2\alpha}{\alpha^2},\quad \bar{z} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} = r\frac{a}{s}.$$

Daraus folgt, dass der Schwerpunkt S auf dem den Bogen AB halbierenden Radius OC liegt und sein Abstand vom Mittelpunkte des Bogens gleich der vierten Proportionalen zu dem Radius, der Sehne und der Bogenlänge ist.

b) Indem wir Polarcoordinaten zugrunde legen, haben wir

$$s = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta,\quad s\bar{x} = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} r\cos\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta,$$

$$s\bar{y} = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} r\sin\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta.$$

Für die Kreislinie ist der Fahrstrahl konstant, $\frac{dr}{d\vartheta} = 0$, so dass

$$s = r\int_0^{2\alpha} d\vartheta = 2r\alpha, \quad s\bar{x} = r^2\int_0^{2\alpha} \cos\vartheta\, d\vartheta = r^2 \sin 2\alpha,$$

$$s\bar{y} = r^2\int_0^{2\alpha} \sin\vartheta\, d\vartheta = 2r^2 \sin^2\alpha,$$

womit sich ergiebt

$$\bar{x} = \frac{s\bar{x}}{s} = \frac{r\sin 2\alpha}{2\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{s\bar{y}}{s} = \frac{r\sin^2\alpha}{\alpha}.$$

Den Wert von $\bar{z}$ erhalten wir wie vorhin.

Guldin, Centrobaryca, Lib. I, cap. 5, p. 59.
Wallis, Opera, Tom. I, p. 712.

6. Zu finden den Schwerpunkt eines von den Punkten (x', y'), (x'', y'') begrenzten Parabelbogens, wenn die Gleichung der Curve ist $y^2 = 2px$.

Aus der Gleichung der Parabel ergiebt sich $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$, so dass

$$\begin{aligned} s &= \int_{y'}^{y''} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \frac{1}{p}\int_{y'}^{y''} \sqrt{p^2 + y^2}\, dy \\ &= \frac{1}{2p}\,{}_{y'}\Big\{ y\sqrt{p^2+y^2} + p^2 l(y + \sqrt{p^2+y^2}) + C\Big\}^{y''} \\ &= \frac{1}{2}\,{}_{x'}\Big\{\sqrt{2px+4x^2} + \frac{1}{2}pl(p+4x+2\sqrt{2px+4x^2}) + C\Big\}^{x''}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s\bar{x} &= \int_{x'}^{x''} x\, ds = \frac{1}{2p^2}\int_{y'}^{y''} y^2\sqrt{p^2+y^2}\, dy \\ &= \frac{1}{2p^2}\,{}_{y'}\Big\{\frac{y^3}{4}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p^2}{8}[y\sqrt{p^2+y^2} - p^2 l(y+\sqrt{p^2+y^2})] + C\Big\}^{y''} \\ &= \frac{1}{16}\,{}_{x'}\Big\{2(p+4x)\sqrt{2px+4x^2} - p^2 l[p+4x+2\sqrt{2px+4x^2}] + C\Big\}^{x''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s\bar{y} &= \int_{y'}^{y''} y\, ds = \frac{1}{p}\int_{y'}^{y''} y\sqrt{p^2+y^2}\, dy = \frac{1}{3p}\,{}_{y'}\Big\{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + C\Big\}^{y''} \\ &= \frac{1}{3}\,{}_{x'}\Big\{(p + 2x)\sqrt{p^2 + 2px} + C\Big\}^{x''}. \end{aligned}$$

Mit diesen Resultaten erhalten wir für die Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen Parabelbogens die Werte

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{1}{8p}\Big\{ & y''\sqrt{p^2+y''^2}(2y''+p^2) - y'\sqrt{p^2+y'^2}(2y'+p^2) \\ & - p^4 l\frac{y''+\sqrt{p^2+y''^2}}{y'+\sqrt{p^2+y'^2}}\Big\} : \Big\{y''\sqrt{p^2+y''^2} \\ & - y'\sqrt{p^2+y'^2} + p^2 l\frac{y''+\sqrt{p^2+y''^2}}{y'+\sqrt{p^2+y'^2}}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3}\left\{(p^2 + y''^2)^{\frac{2}{3}} - (p^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\right\} : \left\{y''\sqrt{p^2 + y''^2} - y'\sqrt{p^2 + y'^2} + p^2 l \frac{y'' + \sqrt{p^2 + y''^2}}{y' + \sqrt{p^2 + y'^2}}\right\},$$

oder

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\left\{2(p + 4x'')\sqrt{2px'' + 4x''^2} - 2(p + 4x')\sqrt{2px' - 4x'^2} - p^2 l \frac{p + 4x'' + 2\sqrt{2px'' + 4x''^2}}{p + 4x' + 2\sqrt{2px' + 4x'^2}}\right\} :$$

$$\left\{2\sqrt{2px'' + 4x''^2} - 2\sqrt{2px' + 4x'^2} + pl\frac{p + 4x'' + 2\sqrt{2px'' + 4x''^2}}{p + 4x' + 2\sqrt{2px' + 4x'^2}}\right\},$$

$$\bar{y} = \frac{4}{3}\left\{(p + 2x'')\sqrt{p^2 + 2px''} - (p + 2x')\sqrt{p^2 + 2px'}\right\} : \left\{2\sqrt{2px'' + 4x''^2} - 2\sqrt{2px' + 4x'^2} + pl\frac{p + 4x'' + 2\sqrt{2px'' + 4x''^2}}{p + 4x' + 2\sqrt{2px' + 4x'^2}}\right\}.$$

Ist, einen speziellen Fall herausgreifend, der Schwerpunkt eines Bogens der Parabel vom Scheitel bis zum Parameter zu bestimmen, dann haben wir nur in den vorstehenden Formeln $x' = y' = 0$, $x'' = \frac{1}{4}p$, $y'' = \frac{1}{2}p$ zu setzen, womit sich für seine Coordinaten ergiebt

$$\bar{x} = \frac{1}{8}p\,\frac{3\sqrt{2} - l(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + l(1 + \sqrt{2})}, \qquad \bar{y} = \frac{2}{3}p\,\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + l(1 + \sqrt{2})}.$$

Für die Parabel ist die Abscissenaxe Symmetrielinie, so dass ihr Schwerpunkt sich in dieser Linie befindet, es ist dann $\bar{y} = 0$, der Wert von $\bar{x}$ bleibt derselbe.

7. Zu finden den Schwerpunkt eines homogenen elliptischen Bogens, wenn die Gleichung der Curve ist $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$.

Durch Einführung der Excentricität $e = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ geht diese Gleichung über in $y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$, womit sich ergiebt $ds = \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$, oder, mit $x = a \sin\varphi$, $ds = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$. Damit erhalten wir

$$s = a\int_{\varphi'}^{\varphi''} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\left\{E(\varphi'') - E(\varphi')\right\}, \tag{1}$$

wobei unter $E(\varphi)$ das elliptische Integral der zweiten Gattung zu verstehen ist.

Die Integralrechnung zeigt, dass die Länge des Bogens von $x = 0$ bis $x = x$, oder von $\varphi' = 0$ bis $\varphi'' = \varphi$ ausgedrückt ist durch

$$s = a\left\{\varphi - \frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right) - \frac{1.1}{2.4}e^4\left(\frac{1.3}{2.4}\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1.5}{4.6}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi\right) - \ldots\right\}.$$

Der vierte Teil des Umfanges der Ellipse ist

$$s = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}a\pi\left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2\right.$$
$$\left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - \ldots\right\} = E'.$$

$$s\bar{x} = \int_{x'}^{x''} x\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\,dx, \quad (2) \qquad s\bar{y} = \sqrt{1 - e^2}\int_{x'}^{x''}\sqrt{a^2 - e^2x^2}\,dx. \quad (3)$$

Durch die Gleichungen (1), (2) und (3) ergiebt sich

$$\bar{x} = \left\{\sqrt{a^2 - x''^2}\sqrt{a^2 - e^2x''^2} - \sqrt{a^2 - x'^2}\sqrt{a^2 - e^2x'^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a^2(1 - e^2)}{e}\, l\, \frac{e\sqrt{a^2 - x''^2} + \sqrt{a^2 - e^2x''^2}}{e\sqrt{a^2 - x'^2} + \sqrt{a^2 - e^2x'^2}}\right\} : \left\{2a\left[E(\varphi'') - E(\varphi')\right]\right\},$$

$$\bar{y} = \left\{\sqrt{1 - e^2}\left[x''\sqrt{a^2 - e^2x''^2} - x'\sqrt{a^2 - e^2x'^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{a^2}{e}\, arc\left(\sin = \frac{ex''\sqrt{a^2 - e^2x''^2} - ex'\sqrt{a^2 - e^2x'^2}}{a^2}\right)\right]\right\} :$$
$$\left\{2a\left[E(\varphi'') - E(\varphi')\right]\right\}.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes eines elliptischen Quadranten sind hiernach, mit $x' = 0$, $x'' = a$, $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \frac{\pi}{2}$,

$$\bar{x} = \frac{\frac{a(1 - e^2)}{e}\, l\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} - a}{2E'}, \quad \bar{y} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}\left\{\sqrt{1 - e^2}\frac{1}{e}\, arc(\sin = e)\right\}}{2E'}.$$

8. Zu bestimmen die Coordinaten des Schwerpunktes eines homogenen hyperbolischen Bogens, wenn die Gleichung der Hyperbel lautet $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$.

Mit $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ geht diese Gleichung über in $y^2 = (1 - e^2)(x^2 - a^2)$,

und wenn wir $x = \frac{a}{\sin\varphi}$ setzen, da stets $x > a$ ist, erhalten wir

$$ds = \sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\,dx = -e\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Damit ergiebt sich

$$s = \int_{x'}^{x''}\sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\,dx = -e\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Die Excentricität der Hyperbel ist stets grösser als die Einheit, so dass $\frac{1}{e^2}$ ein echter Bruch ist, wodurch mit $\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\sin^2\varphi}=\varDelta\varphi$

$$s=-e\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\varDelta\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Nun ist $-e\int\frac{\varDelta\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{e\cos\varphi}{\sin\varphi}\varDelta\varphi-\frac{e^2-1}{e}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}+e\int\varDelta\varphi\,d\varphi$, also

$$s=\frac{e\cos\varphi''\,\varDelta\varphi''}{\sin\varphi''}-\frac{e\cos\varphi'\,\varDelta\varphi'}{\sin\varphi'}-\frac{e^2-1}{e}\left\{F(\varphi'')-F(\varphi')\right\}$$
$$+e\left\{E(\varphi'')-E(\varphi')\right\}, \quad (1)$$

wo F die elliptische Funktion der ersten, E diejenige der zweiten Gattung bedeutet.

Für den vom Scheitel an gerechneten Bogen ist $x'=a$, $x''=x$, $\varphi'=\frac{\pi}{2}$, $\varphi''=\varphi$ zu nehmen, wodurch seine Länge

$$s=\frac{e\cos\varphi\,\varDelta\varphi}{\sin\varphi}-\frac{e^2-1}{e}\left\{F(\varphi)-F'\right\}+e\left\{E(\varphi)-E'\right\},$$

F' und E' bezeichnen hier die vollständigen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung.

Die Momente des Curvenbogens bezüglich der Ordinaten- und Abscissenaxe sind

$$s\bar{x}=\int_{x'}^{x''}x\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,dx=-ae\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\varDelta\varphi}{\sin^3\varphi}\,d\varphi, \quad (2)$$

$$s\bar{y}=\sqrt{e^2-1}\int_{x'}^{x''}\sqrt{e^2x^2-a^2}\,dx=ae\sqrt{e^2-1}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi. \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) ergeben sich die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\bar{x}=\frac{1}{2}\left\{\frac{ae\cos\varphi''\,\varDelta\varphi''}{\sin\varphi''^2}-\frac{ae\cos\varphi'\,\varDelta\varphi'}{\sin\varphi'^2}+\frac{a(e^2-1)}{e}\,l\,\frac{(\cos\varphi''+\varDelta\varphi'')\sin\varphi'}{(\cos\varphi'+\varDelta\varphi')\sin\varphi''}\right\}:$$
$$\left\{\frac{e\cos\varphi''\varDelta\varphi''}{\sin\varphi''}-\frac{e\cos\varphi'\varDelta\varphi'}{\sin\varphi'}-\frac{e^2-1}{e}\left\{F(\varphi'')-F(\varphi')\right\}+e\left\{E(\varphi'')-E(\varphi')\right\}\right\}.$$

$$\bar{y}=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{e^2-1}\left[\frac{e\varDelta\varphi''}{\sin^2\varphi''}-\frac{e\varDelta\varphi'}{\sin^2\varphi'}-\frac{1}{e}\,l\,\frac{(1+\varDelta\varphi'')\sin\varphi'}{(1+\varDelta\varphi')\sin\varphi''}\right]\right\}:$$
$$\left\{\frac{e\cos\varphi''\varDelta\varphi''}{\sin\varphi''}-\frac{e\cos\varphi'\,\varDelta\varphi'}{\sin\varphi'}-\frac{e^2-1}{e}\left\{F(\varphi'')-F(\varphi')\right\}+e\left\{E(\varphi'')-E(\varphi')\right\}\right\}.$$

Wird der Bogen vom Scheitel der Hyperbel an gerechnet, so ist $\varphi'=\frac{\pi}{2}$,

$\varphi'' = \varphi$ zu setzen, mithin $\int_{\varphi'}^{\varphi''} f(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\,d\varphi$, und es sind seine Schwerpunktscoordinaten

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left\{\frac{a\,e\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{a(e^2-1)}{e}\,l\,\frac{e(\cos\varphi+\Delta\varphi)}{\sqrt{e^2-1}\,\sin\varphi}\right\}:$$
$$\left\{\frac{e\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi} - \frac{e^2-1}{e}\left[F(\varphi)-F'\right] + e\left[E(\varphi)-E'\right]\right\},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}a\sqrt{e^2-1}\left\{\frac{e\,\Delta\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{e}\,l\,\frac{e(1+\Delta\varphi)}{(e+\sqrt{e^2-1}\,\sin\varphi)}\right\}:$$
$$\left\{\frac{e\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi} - \frac{e^2-1}{e}\left[F(\varphi)-F'\right] + e\left[E(\varphi)-E'\right]\right\}.$$

9. Zu finden den Schwerpunkt des Bogens der Curve $y = \sin x$ von $x = 0$ bis $x = \pi$.

Durch die Gleichung der Curve ist

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 = (1 + \cos^2 x)\,d x^2,$$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,d x = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,d x = \sqrt{2}\,E(\pi), \quad (1)$$

indem das Integral eine elliptische Funktion der zweiten Gattung ist.

Der Abstand des Schwerpunktes von der Abscissenaxe, seine Abscisse ist $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$, resultiert aus der Gleichung

$$s\bar{y} = \int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,d x = \sqrt{2} + l(1+\sqrt{2}).$$

womit und mit (1)

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{2}+l(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\,E(\pi)}.$$

Walton, p. 26.

10. Zu finden den Schwerpunkt eines Bogenstückes der Kettenlinie

$$y = \frac{1}{2}m\left\{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right\}.$$

Für einen Bogen von dem Punkte (x', y') bis zum Punkte (x'', y'') haben wir

$$s = \int_{x'}^{x''} d s = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)d x = \frac{1}{2}m\left\{e^{\frac{x''}{m}} - e^{-\frac{x''}{m}} - e^{\frac{x'}{m}} + e^{-\frac{x'}{m}}\right\}, \quad (1)$$

$$s\bar{x} = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''} x\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) d x$$

$$= \frac{1}{2} m\left\{(x''-m)\, e^{\frac{x''}{m}} - (x''+m)\, e^{-\frac{x''}{m}} - (x'-m)\, e^{\frac{x'}{m}} + (x'+m)\, e^{-\frac{x'}{m}}\right\}, \quad (2)$$

$$s\bar{y} = \frac{1}{4}\int_{x'}^{x''} \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 d x$$

$$= \frac{1}{8} m\left\{m e^{\frac{2x''}{m}} + 4x'' - m e^{-\frac{2x''}{m}} - \left(m e^{\frac{2x'}{m}} + 4x' - m e^{-\frac{2x'}{m}}\right)\right\}. \quad (3)$$

Mit (1), (2) und (3) ergiebt sich

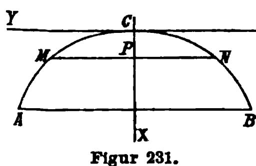
$$\bar{x} = \frac{(x''-m)\, e^{\frac{x''}{m}} - (x''+m) e^{-\frac{x''}{m}} - (x'-m)\, e^{\frac{x'}{m}} + (x'+m)\, e^{-\frac{x'}{m}}}{e^{\frac{x''}{m}} - e^{-\frac{x''}{m}} - e^{\frac{x'}{m}} + e^{-\frac{x'}{m}}},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\,\frac{m e^{\frac{2x''}{m}} + 4x'' - m e^{-\frac{2x''}{m}} - \left(m e^{\frac{2x'}{m}} + 4x' - m e^{-\frac{2x'}{m}}\right)}{e^{\frac{x''}{m}} - e^{-\frac{x''}{m}} - e^{\frac{x'}{m}} + e^{-\frac{x'}{m}}}.$$

Handelt es sich um den Bogen vom tiefsten Punkte bis zum Punkte (x, y) der Curve, so ist $x' = 0$, $y' = m$, $x'' = x$, $y'' = y$, womit sich für denselben ergiebt

$$\bar{x} = \frac{(x-m)\, e^{\frac{x}{m}} - (x+m) e^{-\frac{x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}, \qquad \bar{y} = \frac{m e^{\frac{2x}{m}} + 4x - m e^{-\frac{2x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}.$$

11. Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen, homogenen Cycloidenbogens.



Figur 231.

a) Wir nehmen (Fig. 231) den Scheitel C der Curve ACB als Coordinatenursprung, die Cycloidenaxe CX zur Abscissen-, die Tangente CY in C an die Curve zur Ordinatenaxe rechtwinkeliger Coordinaten, bezeichnen mit a den Halbmesser des Erzeugungskreises, mit (x', y'), (x'', y'') die Coordinaten des Endpunktes eines beliebigen Curvenbogens. Die Gleichung der Curve ist in diesem Falle

$$y = a\, arc\left(sin\, vers = \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt $ds = \sqrt{\frac{2a}{x}}\, dx$, so dass

$$s = \sqrt{2a}\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2a}\,(x'' - x'), \quad (1)$$

$$s\bar{x} = \sqrt{2a}\int_{x'}^{x''}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2a}\left\{x''\sqrt{x''} - x'\sqrt{x'}\right\}, \qquad (2)$$

$$s\bar{y} = \int_{x'}^{x''} y\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx = 2\sqrt{2a}\left\{\sqrt{x}\,y - \int\sqrt{2a-x}\,dx\right\}_{x'}^{x''}$$

$$= 2\sqrt{2a}\left\{\sqrt{x}\,y + \frac{2}{3}(2a-x)^{\frac{3}{2}} + C\right\}_{x'}^{x''}. \qquad (3)$$

Durch (1), (2) und (3) erhalten wir

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\,\frac{x''\sqrt{x''} - x'\sqrt{x'}}{\sqrt{x''} - \sqrt{x'}},$$

$$\bar{y} = \frac{3\sqrt{x''}\,y'' + 2(2a-x'')^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{x'}\,y' - 2(2a-x')^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{x''} - \sqrt{x'})}.$$

Für den Schwerpunkt des halben Cycloidenbogens AC sind die Coordinaten, indem dann $x' = 0$, $y' = 0$, $x'' = 2a$, $y'' = a\pi$,

$$\bar{x} = \frac{2}{3}a, \qquad \bar{y} = a\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Für einen in Beziehung auf den Scheitel symmetrischen Bogen ist $\bar{x} = \frac{1}{3}x$, $\bar{y} = 0$, wenn der ganze Cycloidenbogen in Frage kommt $\bar{x} = \frac{2}{3}a$, $\bar{y} = 0$.

b) Ist die Curve durch die Gleichungen gegeben

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi),$$

wobei die Leitlinie des erzeugenden Kreises Abscissenaxe, eine Spitze der Curve Coordinatenursprung, also die durch sie zur Leitlinie senkrecht gezogene Gerade Ordinatenaxe, positiv in der Richtung nach der Curve, dann gestaltet sich die Rechnung wie folgt.

Es ist $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, $dy = a\sin\varphi\,d\varphi$, so dass

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Nun erhalten wir

$$s = 2a\int_{\varphi'}^{\varphi''}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\int_{\varphi'}^{\varphi''}\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2} = 4a\left(\cos\frac{\varphi'}{2} - \cos\frac{\varphi''}{2}\right), \qquad (1)$$

$$s\bar{x} = 2a^2\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\varphi - \sin\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 4a^2\left\{-(\varphi - \sin\varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + 2\int\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2}\right\}_{\varphi'}^{\varphi''}$$

$$= 4\,a^2 \Big\{ -(\varphi - \sin\varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} + C\Big\}_{\varphi'}^{\varphi''}, \tag{2}$$

$$s\bar{y} = 2\,a^2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} (1 - \cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8\,a^2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin^3\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2}$$

$$= 8\,a^2 \Big\{ -\frac{1}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\cos\frac{\varphi}{2} + C\Big\}_{\varphi'}^{\varphi''}, \tag{3}$$

so dass mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\,a \Big\{ 4\left(\sin^3\frac{\varphi''}{2} - \sin^3\frac{\varphi'}{2}\right) - 3\,(\varphi'' - \sin\varphi'')\cos\frac{\varphi''}{2}$$

$$+ 3\,(\varphi' - \sin\varphi')\cos\frac{\varphi'}{2}\Big\} : \Big\{\cos\frac{\varphi'}{2} - \cos\frac{\varphi''}{2}\Big\},$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3}\,a \Big\{ \sin^2\frac{\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi'}{2} - \sin^2\frac{\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi'}{2}$$

$$+ 2\left(\cos\frac{\varphi'}{2} - \cos\frac{\varphi''}{2}\right)\Big\} : \Big\{\cos\frac{\varphi'}{2} - \cos\frac{\varphi''}{2}\Big\}.$$

Der halbe Cycloidenbogen besitzt, da für denselben $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \pi$, die Schwerpunktscoordinaten

$$\bar{x} = \frac{4}{3}\,a, \qquad \bar{y} = \frac{4}{3}\,a,$$

und für die ganze Cycloide ist, weil dann $\varphi' = 0$, $\varphi'' = 2\pi$,

$$\bar{x} = a\,\pi, \qquad \bar{y} = \frac{4}{3}\,a.$$

12. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes des halben Bogens eines Auges der Lemniscate von Johann Bernoulli?

Die Gleichung der krummen Linie ist

$$r^2 = a^2\cos 2\vartheta = a^2(1 - 2\sin^2\vartheta),$$

aus ihr folgt

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{a^2\sin 2\vartheta}{r}, \quad ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta = a\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\vartheta}},$$

so dass

$$s = a\int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\vartheta}},$$

die Länge des Curvenbogens. Da nun der Polarwinkel nicht über $\frac{\pi}{4}$ hinaus wachsen kann, so kann $\sin\vartheta$ nie grösser als $\sqrt{\frac{1}{2}}$ werden, weshalb $\sin\vartheta = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}$ gesetzt werden darf.

Damit geht die Gleichung für s über in

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{\psi'}^{\psi''} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left\{ F(\psi'') - F(\psi') \right\}, \tag{1}$$

wo $F(\psi)$ das elliptische Integral erster Gattung mit dem Modulus $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ bedeutet.

Die nötigen Momentengleichungen sind

$$s\bar{x} = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} r \cos\vartheta \, ds = a^2 \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \cos\vartheta \, d\vartheta = a^2 (\sin\vartheta'' - \sin\vartheta'), \tag{2}$$

$$s\bar{y} = \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} r \sin\vartheta \, ds = a^2 \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \sin\vartheta \, d\vartheta = a^2 (\cos\vartheta' - \cos\vartheta''). \tag{3}$$

Durch (1), (2) und (3) erhalten wir

$$\bar{x} = \frac{a\sqrt{2}\,(\sin\vartheta'' - \sin\vartheta')}{F(\psi'') - F(\psi')}, \qquad \bar{y} = \frac{a\sqrt{2}\,(\cos\vartheta' - \cos\vartheta'')}{F(\psi'') - F(\psi')}.$$

Handelt es sich um den halben Bogen eines Auges der Curve, so ist $\vartheta' = 0$, $\vartheta'' = \frac{\pi}{4}$, also $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ in diesen Relationen zu setzen, womit $F(\psi') = 0$, $F(\psi'') = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, also

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \bar{x} = \frac{a}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \bar{y} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

13. Bestimmung des Schwerpunktes eines homogenen Bogens der gemeinen Schraubenlinie.

a) Die Curve ist gegeben durch die Gleichungen

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = na\varphi.$$

Hieraus folgt $dx = -a\sin\varphi\,d\varphi$, $dy = a\cos\varphi\,d\varphi$, $dz = na\,d\varphi$, so dass

$$s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

$$= a\sqrt{1+n^2} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi = a\sqrt{1+n^2}\,(\varphi'' - \varphi'). \tag{1}$$

Ferner erhalten wir

$$s\bar{x} = a^2\sqrt{1+n^2} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \cos\varphi\,d\varphi = a^2\sqrt{1+n^2}\,(\sin\varphi'' - \sin\varphi'), \tag{2}$$

$$s\bar{y} = a^2\sqrt{1+n^2} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin\varphi\,d\varphi = a^2\sqrt{1+n^2}\,(\cos\varphi' - \cos\varphi''), \tag{3}$$

$$s\bar{z} = n a^2 \sqrt{1+n^2} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \varphi \, d\varphi = \frac{n a^2}{2} \sqrt{1+n^2} (\varphi''^2 - \varphi'^2). \tag{4}$$

Mit diesen vier Gleichungen ergiebt sich nun sofort

$$\bar{x} = a(\sin\varphi'' - \sin\varphi'), \quad \bar{y} = a(\cos\varphi' - \cos\varphi''), \quad \bar{z} = \frac{n a}{2}(\varphi'' + \varphi').$$

Für einen Bogen von $\varphi' = 0$ bis $\varphi'' = \varphi$ ist daher

$$\bar{x} = a \sin\varphi, \qquad \bar{y} = a(1 - \cos\varphi), \qquad \bar{z} = \frac{n a}{2}\varphi = \frac{z}{2}.$$

b) Sind die Gleichungen der krummen Linie

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad z = n a \, arc\left(\cos = \frac{x}{a}\right),$$

so bekommen wir

$$s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \, dx = a\sqrt{1+n^2} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a\sqrt{1+n^2} \left\{ arc\left(\cos = \frac{x'}{a}\right) - arc\left(\cos = \frac{x''}{a}\right) \right\}, \tag{1}$$

$$s\bar{x} = a\sqrt{1+n^2} \int_{x'}^{x''} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a\sqrt{1+n^2} \left\{ \sqrt{a^2 - x'^2} - \sqrt{a^2 - x''^2} \right\}, \tag{2}$$

$$s\bar{y} = a\sqrt{1+n^2} \int_{x'}^{x''} dx = a\sqrt{1+n^2} \left\{ x'' - x' \right\}, \tag{3}$$

$$s\bar{z} = n a^2 \sqrt{1+n^2} \int_{x'}^{x''} arc\left(\cos = \frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= n a^2 \sqrt{1+n^2} \left\{ arc\left(\cos^2 = \frac{x''}{a}\right) - arc\left(\cos^2 = \frac{x'}{a}\right) \right\}. \tag{4}$$

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{a^2 - x'^2} - \sqrt{a^2 - x''^2}}{arc\left(\cos = \frac{x'}{a}\right) - arc\left(\cos = \frac{x''}{a}\right)},$$

$$\bar{y} = \frac{x'' - x'}{arc\left(\cos = \frac{x'}{a}\right) - arc\left(\cos = \frac{x''}{a}\right)},$$

$$\bar{z} = \frac{n a}{2} \left\{ arc\left(\cos = \frac{x''}{a}\right) + arc\left(\cos = \frac{x'}{a}\right) \right\}.$$

Läuft der Bogen von $x' = a$ bis $x'' = x$, so sind hiernach die Coordinaten seines Schwerpunktes

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{arc\left(cos = \frac{x}{a}\right)} = \frac{n\,a\,y}{z}, \quad \bar{y} = \frac{a - x}{arc\left(cos = \frac{x}{a}\right)} = \frac{n\,a\,(a-x)}{z},$$

$$\bar{z} = \frac{n\,a}{2}\,arc\left(cos = \frac{x}{a}\right) = \frac{z}{2}.$$

c) Diese Aufgabe kann auch durch eine rein geometrische Betrachtung gelöst werden. Weil die Abgewickelte der Schraubenlinie eine gerade Linie ist, so liegt der Schwerpunkt der Curve offenbar in der zur Schraubenaxe senkrechten Ebene, welche die Curve halbiert, und ist der Schwerpunkt der Projektion der Curve auf diese Ebene der verlangte Schwerpunkt. Diese Projektion ist hier eine Kreislinie und daher erhalten wir für das Curvenstück von $x' = a$ bis $x'' = x$, wenn $2\,\alpha$ der von der Projektion umspannte Centriwinkel ist,

$$\bar{x} = \frac{a\,sin\,2\,\alpha}{2\,\alpha} = \frac{a\frac{y}{a}}{2\,\alpha} = \frac{y}{2\,\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{arc\left(cos = \frac{x}{a}\right)} = \frac{n\,a\,y}{z},$$

$$\bar{y} = \frac{a\,sin^2\alpha}{2\,\alpha} = a\frac{1 - cos\,2\,\alpha}{2\,\alpha} = a\frac{1 - \frac{x}{a}}{2\,\alpha} = \frac{a - x}{2\,\alpha} = \frac{a - x}{arc\left(cos = \frac{x}{a}\right)} = \frac{na(a-x)}{z},$$

$$\bar{z} = \frac{z}{2}.$$

14. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes der Durchschnittslinie der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a$ und des elliptischen Cylinders $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn $a > b$ ist?

Das Bogenelement der Schnittlinie ist hier $d\,s = a\frac{d\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, so dass

$$s = a\int\frac{d\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\,arc\left(sin = \frac{x}{a}\right) + C, \quad (1)$$

$$s\,\bar{x} = a\int\frac{x\,d\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = C - a\sqrt{a^2 - x^2}, \ (2) \quad s\bar{y} = \int b\,d\,x = b\,x + C, \ (3)$$

$$s\,\bar{z} = \int\sqrt{a^2 - b^2}\,d\,x = \sqrt{a^2 - b^2}\,x + C. \quad (4)$$

Für den vierten Teil der über der Ebene der $x\,y$ liegenden Durchschnittslinie sind die Grenzen der Integrale 0 und a, so dass in diesem Falle

$$s = \frac{1}{2}\,a\,\pi, \quad s\,\bar{x} = a^2, \quad s\,\bar{y} = a\,b, \quad s\,\bar{z} = a\sqrt{a^2 - b^2},$$

womit $\bar{x} = \frac{2a}{\pi}, \quad \bar{y} = \frac{2b}{\pi}, \quad \bar{z} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi}.$

15. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes der Durchschnittslinie eines parabolischen und eines cycloidischen Cylinders, wenn die Gleichungen der beiden Flächen sind $y = 2\sqrt{a x}$, $z = b \, arc\left(\cos = \frac{b - x}{x}\right) - \sqrt{2 b x - x^2}$?

Aus diesen Gleichungen folgt $d s = \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2} \, d x = \sqrt{\frac{a + b}{x}} \, d x$, so dass die Länge eines beliebigen Bogenstückes

$$s = \sqrt{a + b} \int_{x'}^{x''} \frac{d x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{a + b}\left(\sqrt{x''} - \sqrt{x'}\right). \tag{1}$$

Die nötigen Momentengleichungen sind

$$s\bar{x} = \sqrt{a + b} \int_{x'}^{x''} \sqrt{x} \, d x = \frac{2}{3}\sqrt{a + b}\left(\sqrt{x''^3} - \sqrt{x'^3}\right), \tag{2}$$

$$s\bar{y} = 2\sqrt{a(a + b)} \int_{x'}^{x''} d x = 2\sqrt{a(a + b)}\,(x'' - x'), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} s\bar{z} &= \sqrt{a + b} \int_{x'}^{x''} z \frac{d x}{\sqrt{x}} = \sqrt{a + b} \left\{ z \, 2\sqrt{x} - 2 \int \sqrt{x} \, d z \right\}_{x'}^{x''} \\ &= \sqrt{a + b} \left\{ 2 z \sqrt{x} - 2 \int \sqrt{b - x} \, d x \right\}_{x'}^{x''} \\ &= \sqrt{a + b} \left\{ 2 z \sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{(b - x)^3} + C \right\}_{x'}^{x''}. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun ergiebt sich mit (1) bis (4)

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{x''^3} - \sqrt{x'^3}}{\sqrt{x''} - \sqrt{x'}}, \qquad \bar{y} = \sqrt{a}\left(\sqrt{x''} + \sqrt{x'}\right),$$

$$\bar{z} = \frac{1}{3} \frac{3\{z''\sqrt{x''} - z'\sqrt{x'}\} + 2\{\sqrt{(b - x'')^3} - \sqrt{(b - x')^3}\}}{\sqrt{x''} - \sqrt{x'}}.$$

Damit erhalten wir für den Bogen von $x' = 0$ bis $x'' = b$, d. i. von $z' = 0$ bis $z'' = \frac{\pi}{2} b$,

$$\bar{x} = \frac{1}{3} b, \quad \bar{y} = \sqrt{a b}, \quad \bar{z} = \frac{b}{2}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

16. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes der Curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen?

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5} a.$$

17. AP ist ein Stück einer gewissen ebenen krummen Linie, gerechnet von einem festen Punkte A in der Linie an. O ist ein fester Punkt in der Ebene der Curve. Der Schwerpunkt von AP liegt stets in der geraden Linie, welche den Winkel AOP halbiert. Die Gestalt dieser Curve soll bestimmt werden.

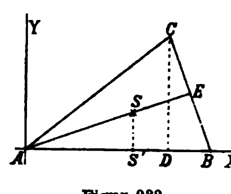
Der Bogen AP ist ein Teil der Lemniscate, von welcher O der Pol ist.

18. Zeige, dass der Schwerpunkt eines beliebigen Bogens der Curve $r^2 = a^3 \cos^3 \vartheta$ in der geraden Linie liegt, welche den Pol mit dem Schnittpunkte der Tangenten des Bogens in seinen Endpunkten verbindet.

Zweiter Abschnitt.

Schwerpunkte homogener, ebener Flächen.

1. Der Schwerpunkt einer beliebigen, homogenen Dreiecksfläche soll auf analytischem Wege bestimmt werden.



Figur 232.

Es sei ABC (Fig. 232) das gegebene Dreieck. Wir wählen eine Seite, etwa AB als Abscissenaxe, ihren Endpunkt A als Ursprung, $AY \perp AX$ in der Ebene des Dreieckes als Ordinatenaxe des Coordinatensystemes, machen $CD \perp AX$, setzen $AB = a$, $CD = h$, $DB = m$, also $AD = (a - m)$. Das zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunktes S, $\bar{x} = AS'$, $\bar{y} = S'S$, gegebene Gleichungensystem ist mit F als Fläche des Dreieckes

$$F = \int y\,dx, \quad F\bar{x} = \int xy\,dx, \quad F\bar{y} = \frac{1}{2}\int y^2\,dx.$$

Das Dreieck ABC besteht aus den zwei rechtwinkeligen Dreiecken ADC und BDC. Die Gleichungen der Geraden AC und BC sind $y = \frac{h}{a-m}x$ und $y = \frac{h}{m}(a - x)$. Damit erhalten wir

$$F = \frac{h}{a-m}\int_0^{a-m} x\,dx + \frac{h}{m}\int_{a-m}^{a}(a-x)\,dx = \frac{h}{2}(a-m) + \frac{h}{2}m = \frac{1}{2}ah, \quad (1)$$

$$F\bar{x} = \frac{h}{a-m}\int_0^{a-m} x^2\,dx + \frac{h}{m}\int_{a-m}^{a} x(a-x)\,dx = \frac{1}{3}ah\left(a - \frac{1}{2}m\right), \quad (2)$$

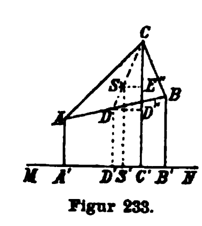
$$F\bar{y} = \frac{h^2}{2(a-m)^2}\int_0^{a-m} x^2\,dx + \frac{h^2}{2m^2}\int_{a-m}^{a}(a-x)^2\,dx = \frac{1}{6}ah^2. \quad (3)$$

Nun ergiebt sich mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{F\bar{x}}{F} = \frac{2}{3}\left(a - \frac{1}{2}m\right), \qquad \bar{y} = \frac{F\bar{y}}{F} = \frac{1}{3}h.$$

Legen wir durch die Punkte A und S einen Strahl, welcher die Dreiecksseite BC in E schneidet, so ist, weil $\bar{x}:\bar{y}=h:(2a-m)$, seine Gleichung $y=\frac{h}{2a-m}x$. Die Coordinaten x', y' des Punktes E folgen aus den Bedingungen $y'=\frac{h}{2a-m}x'$, $y'=\frac{h}{m}(a-x')$, sie sind $x'=a-\frac{1}{2}m$, $y'=\frac{1}{2}h$, welches die Coordinaten des Mittelpunktes der Seite BC sind. Nun ist ASE Schwerlinie des Dreieckes ABC, mithin läuft die durch jeden Eckpunkt des Dreieckes gezogene Schwerlinie nach dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Dreiecksseite. Der Durchschnittspunkt zweier solcher Schwerlinien giebt die Lage des Schwerpunktes, welcher von jeder Dreiecksseite um $\frac{1}{3}$ der zugehörigen Höhe entfernt ist.

2. Der Abstand des Schwerpunktes einer Dreiecksfläche von irgend einer in seiner Ebene gelegenen Geraden ist gleich dem dritten Teile der Summe der Abstände seiner Eckpunkte von dieser Geraden.



Figur 233.

Ist ABC (Fig. 233) das gegebene Dreieck, MN die gegebene Gerade, AA', BB', $CC' \perp MN$, $AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$, S der Schwerpunkt des Dreieckes, CSD Schwerlinie, SS', $DD' \perp MN$, $SS'=\bar{y}$, DD'', $SE'' \parallel MN$, so haben wir

$$AD=BD,\ DS=\frac{1}{3}CD,\ DS:CS=1:2,$$

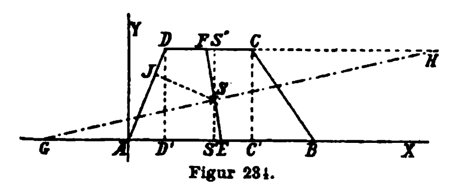
$$DD'=\frac{AA'+BB'}{2}=\frac{a+b}{2},$$

also

$$\bar{y}=CD''+D''E''=DD'+\frac{1}{3}(CC'-DD')=\left(1-\frac{1}{3}\right)DD'+\frac{1}{3}CC'=\frac{2.DD'+CC'}{3},$$

$$\bar{y}=\frac{2\frac{a+b}{2}+c}{3}=\frac{a+b+c}{3},\ \text{w. z. b. w.}$$

3. Die Lage des Schwerpunktes einer homogenen Trapezfläche soll auf analytischem und elementarem Wege bestimmt werden.



Figur 234.

Es sei $ABCD$ (Fig. 234) das gegebene Trapez mit den Parallelseiten AB, CD, $AB=a$, $CD=b$, $CC'=DD'$, beide senkrecht zu AB und $=h$, $AD'=m$, $BC'=n$.

Wir nehmen die Gerade AB zur Abscissen-, die zu ihr senkrechte Gerade AY in der Ebene des Trapezes zur Ordinatenaxe des Coordinatensystemes. Damit erhalten wir

$$F = \frac{h}{m}\int_0^m x\,dx + h\int_m^{m+b} dx + \frac{h}{n}\int_{a-n}^a (a-x)\,dx = \frac{a+b}{2}h, \tag{1}$$

$$F\bar{x} = \frac{h}{m}\int_0^m x^2\,dx + h\int_m^{m+b} x\,dx + \frac{h}{n}\int_{a-n}^a x(a-x)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}h\left\{3[an + (b+2m)b] + 2(m^2 - n^2)\right\}, \tag{2}$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{2}\left\{\frac{h^2}{m^2}\int_0^m x^2 dx + h^2\int_m^{m+b} dx + \frac{h^2}{n^2}\int_{a-n}^a (a-x)^2 dx\right\} = \frac{1}{6}h^2(a+2b). \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) ergiebt sich nun

$$\bar{x} = \frac{1}{3(a+b)}\left\{a^2 + ab + b^2 + (a+2b)m\right\}, \quad \bar{y} = \frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h.$$

Setzen wir den Abstand des Schwerpunktes von der Seite CD, das ist $SS'' = \bar{y}_1$, so ist

$$\bar{y}_1 = h - \frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h = \frac{1}{3}\frac{2a+b}{a+b}h, \quad \text{und} \quad \bar{y}:\bar{y}_1 = (a+2b):(2a+b).$$

Mit EF durch S und E, F als Halbierungspunkten der parallelen Trapezseiten ist $ES:FS = SS':SS'' = \left(\frac{1}{2}a + b\right):\left(a + \frac{1}{2}b\right)$. Mit $AG = CD = b$, auf der Verlängerung von AB, dem Strahle GS, welcher die Verlängerung von CD in H schneidet, ist $\triangle GSE \sim \triangle HFS$, also $FH:EG = FS:ES$, oder $FH = EG(FS:ES)$ $= \left(\frac{a}{2} + b\right)\left\{\left(a + \frac{b}{2}\right):\left(\frac{a}{2} + b\right)\right\} = a + \frac{b}{2}$. Daraus folgt die bekannte Konstruktion: Ziehe die die Halbierungspunkte der parallelen Seiten verbindende Gerade, mache auf den entgegengesetzten Verlängerungen der Parallelseiten $AG = CD = b$, $CH = AB = a$ und ziehe GH, so sind EF, GH Schwerlinien der Trapezfläche und ihr Schnittpunkt giebt den verlangten Schwerpunkt. Die Gleichungen der Geraden EF und GH sind $y = \frac{b}{b+2m-a}(2x-a)$ und $y = \frac{h}{a+2b+m}(x+b)$, hieraus ergeben sich als Coordinaten ihres Durchschnittspunktes $x = \frac{1}{3(a+b)}\left\{a^2 + ab + b^2 + (a+2b)m\right\}$, $y = \frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h$, welches diejenigen des Schwerpunktes sind.

Wenn die Seiten BC und AD einander gleich sind, dann ist $n = m$, womit die Formeln für die Schwerpunktscoordinaten sich jedoch nicht ändern.

Für das Parallelogramm ist $b = a$, $n = m$, also

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(a+m), \quad \bar{y} = \frac{1}{2}h,$$

sein Schwerpunkt fällt mit dem Schnittpunkte seiner Diagonalen zusammen. Geht das Parallelogramm in ein Rechteck über, dann wird $m = 0$, also

$$\bar{x} = \frac{1}{2}a, \quad \bar{y} = \frac{1}{2}h.$$

Ist noch $\bar{z} = SJ =$ dem Abstande des Schwerpunktes der Trapezfläche von der nicht parallelen Seite AD, nehmen wir $\measuredangle BAD = \alpha$, dann wird sein

$$F\bar{z} = \frac{bh}{2}\frac{b \sin\alpha}{3} + \frac{ah}{2}\frac{a \sin\alpha + b \sin\alpha}{3} = \frac{1}{6}(a^2 + ab + b^2)\, h \sin\alpha,$$

mithin

$$\bar{z} = \frac{1}{3}\frac{(a^2 + ab + b^2)\sin\alpha}{a+b} = \frac{1}{3}\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}\frac{h}{\sqrt{m^2 + h^2}}.$$

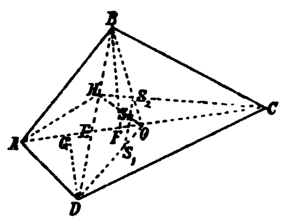
Die Ableitung der Schwerpunktscoordinaten auf elementarem Wege ist die kürzere. Wir erhalten nämlich mit Rücksicht auf das Resultat der Aufgabe 2

$$F\bar{x} = \frac{ah}{2}\frac{a+(b+m)}{3} + \frac{bh}{2}\frac{m+(b+m)}{3} = \frac{h}{6}\left\{a^2 + ab + b^2 + (a+2b)m\right\},$$

$$F\bar{y} = \frac{ah}{2}\frac{h}{3} + \frac{bh}{2}\frac{2}{3}h = \frac{h^2}{6}(a+2b),$$

womit $\bar{x} = \frac{1}{3(a+b)}\left\{a^2 + ab + b^2 + (a+2b)m\right\}$, $\bar{y} = \frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h$.

4. Der Schwerpunkt einer homogenen Vierecksfläche ist derjenige eines Dreieckes, dessen Eckpunkte die Endpunkte einer Diagonale und der auf der anderen Diagonale symmetrisch zu ihrer Mitte verlegte Schnittpunkt beider Diagonalen sind.



Figur 235.

Ist $ABCD$ (Fig. 235) das gegebene Viereck, so ziehe die Diagonalen AC, BD, bestimme die Schwerpunkte S_1, S_2 der Dreiecke ABC, ACD, mache $BH = DE =$ dem kleineren Abschnitte der Diagonale BD, verbinde den Halbierungspunkt O der Diagonale AC mit H, S_1 mit S_2, dann giebt der Schnittpunkt S der Linien $S_1 S_2$ und HO den verlangten Schwerpunkt.

Beweis: Mit BF und $DG \perp AC$ ist, da man in den Punkten S_1, S_2 die Massen der Dreiecke ACD, ACB vereinigt denken kann, und somit die Bedingung erfüllt sein muss $SS_1 . \triangle ABC = SS_2 . \triangle ACD$, $SS_1 : SS_2 = \triangle ACD : \triangle ABC = DG : BF = DE : BE = BH : DH$. Nun ist $S_1 S_2 \parallel BD$, also $HS : OS = 2 : 1$. Werden jetzt die Linien AH und CH gezogen, so ist auch S der Schwerpunkt des Dreieckes ACH, denn OH ist eine Schwerlinie desselben, mithin fällt der Schwerpunkt des Dreieckes ACH mit denjenigen des Viereckes $ABCD$ zusammen, w. z. b. w. Damit haben wir eine einfache Konstruktion für S. Nachdem die Diagonalen gezogen, mache, wenn $DE < BE$, $BH = DE$, ziehe nach dem Halbierungspunkte O der AC von H aus eine Gerade OH und teile dieselbe in drei gleiche Teile, dann ist der AC zunächst gelegene Teilpunkt S Schwerpunkt des Viereckes $ABCD$.

5. Zu finden den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes vom Centriwinkel 2α und der Länge $2a\alpha$ seines Bogens.

Da der Schwerpunkt auf der den Centriwinkel halbierenden Geraden liegen muss, weil diese Symmetrieaxe des Gebildes ist, so haben wir nur den Abstand $\bar{x}$ des Schwerpunktes S von dem Mittelpunkte des zum Bogen gehörenden Kreises zu bestimmen. Ist der Kreismittelpunkt Pol, die Symmetrieaxe Polaraxe, s die Bogenlänge, p die Länge der zu dem Bogen gehörigen Sehne, so erhalten wir

$$F = \frac{1}{2} a \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\vartheta = a^2 \alpha = \frac{1}{2} a s, \tag{1}$$

$$F\bar{x} = \frac{1}{2} a^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} x\, d\vartheta = \frac{1}{2} a^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} r \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{3} a^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{3} a^3 \sin\alpha, \tag{2}$$

weil der Abstand des Schwerpunktes eines unendlich schmalen Polardreiecks der Fläche um die Strecke $\frac{2}{3} r$ vom Pole entfernt ist. Mit (1) und (2) ergiebt sich nun sofort

$$\bar{x} = \frac{F\bar{x}}{F} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} a \frac{p}{s}.$$

Der Schwerpunkt eines Kreissektors fällt daher zusammen mit demjenigen eines schweren Bogens von gleichem Centriwinkel und einem Radius, welcher gleich ist dem $\frac{2}{3}$fachen des zum Ausschnitte gehörigen Halbmessers.

Wenn wir Doppelintegrale anwenden, so gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

$$F = \int_0^a \int_{-\alpha}^{+\alpha} r\, dr\, d\vartheta = 2\alpha \int_0^a r\, dr = a^2 \alpha,$$

$$F\bar{x} = \int_0^a \int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta = 2 \sin\alpha \int_0^a r^2\, dr = \frac{2}{3} a^3 \sin\alpha,$$

womit, wie vorhin, $\bar{x} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Wenden wir rechtwinkelige Coordinaten mit dem Mittelpunkte O als Ursprung, der Symmetrieaxe als Abscissenaxe, der zu ihr senkrechten Geraden in der Ebene der Fläche durch O als Ordinatenaxe an, dann haben wir folgendes. Die Gleichung der den Sektor begrenzten Geraden, welche mit der Axe der x den Winkel α einschliesst, und die Gleichung des Kreises sind $y = x \operatorname{tg} \alpha$ und $y^2 = a^2 - x^2$. Damit ergiebt sich, wenn hier F die halbe Fläche des Sektors bezeichnet,

$$F = \int_0^{a\cos\alpha} x \operatorname{tg}\alpha\, dx + \int_{a\cos\alpha}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}(a^2\alpha - a^2 \sin\alpha\cos\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \alpha,$$

$$F\bar{x} = \int_0^{a\cos\alpha} x^2\, tg\,\alpha\, dx + \int_{a\cos\alpha}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

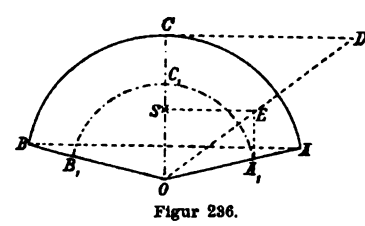
$$= \frac{1}{3} a^3 \sin\alpha \cos^2\alpha + \frac{1}{3} a^3 \sin^3\alpha = \frac{1}{3} a^3 \sin\alpha,$$

so dass
$$\bar{x} = \frac{F\bar{x}}{F} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Sind $\underline{x}, \underline{y}$ die Coordinaten des Schwerpunktes S, wenn ein den Sektor begrenzender Radius Abscissenaxe und der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises Coordinatenursprung, dann ist offenbar

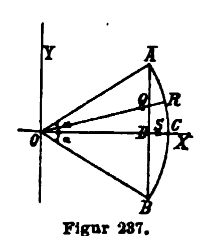
$$\underline{x} = \bar{x}\cos\alpha = \frac{1}{3} a \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} = \frac{1}{3}\frac{p\sqrt{4a^2 - p^2}}{s}, \quad \underline{y} = \bar{x}\sin\alpha = \frac{2}{3} a \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} = \frac{1}{3}\frac{p^2}{s}.$$

Für den vierten Teil der Kreisfläche ist $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin 2\alpha = 1$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so dass $\underline{x} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} = \underline{y}$, $\bar{x} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{a}{\pi}$. Die Schwerpunktscoordinaten der Halbkreisfläche sind, weil dann $2\alpha = \pi$, $\sin 2\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$, $\underline{x} = 0$, $\underline{y} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} = \bar{x}$. Endlich sind die Schwerpunktscoordinaten der ganzen Kreisfläche, indem hier $\alpha = \pi$, $\sin 2\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$, $\underline{x} = \underline{y} = \bar{x} = 0$, wie dem sein muss.



Figur 236.

Um den Schwerpunkt S eines Kreissektors OAB (Fig. 236) durch Konstruktion zu finden, machen wir $OA_1 = \frac{2}{3} OA$, so dass der Bogen $A_1C_1B_1$, geschlagen von dem Mittelpunkte O aus mit dem Radius OA_1, derjenige ist, mit dessen Schwerpunkt der Flächenmittelpunkt des Ausschnittes zusammenfällt, ziehen die zu AB parallele Mitteltangente CD des Bogens AB, machen $CD =$ Bogen AC, ziehen $A_1E \parallel OC$, $ES \parallel AB$, dann ist S auf der Symmetrieaxe OC der verlangte Punkt. Den Beweis siehe Aufgabe 4, Abschnitt I, dieses Teiles.



Figur 237.

6. Bestimmung des Schwerpunktes einer Kreissegmentfläche $ACBD$ (Fig. 237), für welche O der Mittelpunkt des begrenzenden Bogens AB ist.

Von O ziehe die gerade, die gegebene Fläche in zwei gleiche Teile zerlegende Linie OCX und OY rechtwinkelig zu OX in der Ebene der Fläche. Es sei $OC = a$, $\sphericalangle AOX = \alpha$, OX Abscissen-, OY Ordinatenaxe. Noch ziehe durch O einen beliebigen Strahl, welcher die Sehne AB in Q, den Bogen ACB in R schneidet, und setze $OQ = r'$.

Der Schwerpunkt S liegt offenbar auf der Abscissenaxe in einem Abstande $\bar{x}$ von O.

Zunächst haben wir für die Fläche des Segmentes

$$F=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{r'}^{a} r\,d\vartheta\,dr=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}(a^2-r'^2)d\vartheta=\frac{1}{2}a^2\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\vartheta}\right)d\vartheta,$$

weil $r'=a\dfrac{\cos\alpha}{\cos\vartheta}$ ist,

$$F=a^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha). \tag{1}$$

Ferner ist das Moment der Fläche in Beziehung auf die Ordinatenaxe

$$F\bar{x}=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{r'}^{r} r^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,dr=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{3}(a^3-r'^3)\cos\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\frac{1}{3}a^3\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(1-\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\vartheta}\right)\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

$$F\bar{x}=\frac{1}{3}a^3\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(\cos\vartheta-\frac{\cos^3\alpha}{\cos^2\vartheta}\right)d\vartheta=\frac{1}{3}a^3\Big\{\sin\vartheta-\cos^3\alpha\,tg\,\vartheta+C\Big\}_{-\alpha}^{+\alpha},$$

$$F\bar{x}=\frac{2}{3}a^3(\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha)=\frac{2}{3}a^3\sin^3\alpha. \tag{2}$$

Mit Hilfe von (1) und (2) erhalten wir nun

$$\bar{x}=\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{r'}^{a} r^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,dr}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{r'}^{a} r\,d\vartheta\,dr}=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin^3\alpha}{a^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)},\quad \bar{x}=\frac{2}{3}a\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{3}$$

Dieses Resultat kann ebenso leicht durch rechtwinkelige Coordinaten erlangt werden. Mit $OD=a'=a\cos\alpha$ bekommen wir, wenn jetzt F die halbe Fläche des Segmentes bezeichnet,

$$F=\int_{a'}^{a} y\,dx=\int_{a'}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big\{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\Big\}_{a'}^{a},$$

$$F=\frac{1}{2}\Big\{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 arc\left(\sin=\frac{x}{a}\right)+C\Big\}_{a'}^{a}=\frac{1}{2}a^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha). \tag{4}$$

Ferner ist die Momentangleichung

$$F\bar{x}=\int_{a'}^{a} xy\,dx=\int_{a'}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\Big\{-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C\Big\}_{a'}^{a},$$

$$F\bar{x}=\frac{1}{3}a^3\sin\alpha. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\bar{x}=\frac{F\bar{x}}{F}=\frac{2}{3}a\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha},$$

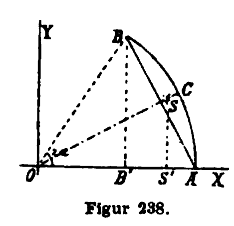
welches Resultat mit (3) identisch ist.

Bei den Integrationen mit Polarcoordinaten ist die Segmentfläche zusammengesetzt gedacht aus Teilen einer unendlichen Zahl von Infinitesimaldreiecken, deren gemeinschaftliche Spitze der Punkt O und Grundlinien einer Reihe von Elementen des

Bogen AB, abgeschnitten durch die Sehne AB. Beim Gebrauche rechtwinkeliger Coordinaten ist das Segment bestehend gedacht aus einer unendlichen Zahl unangebbar schmaler, zur Sehne AB paralleler Parallelogramme.

Guldin, Centrobaryca, Lib. I, cap. 9, p. 107. Walton, p. 6.

7. Welches sind die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes eines Kreisabschnittes, wenn ein zugehöriger äusserster Radius des begrenzenden Bogens Abscissenaxe, sein Mittelpunkt Coordinatenursprung ist? Welches ist der Abstand des Schwerpunktes vom Coordinatenursprunge?



Figur 238.

Es sei ABC (Fig. 238) das Segment, O der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, $OA = a$, $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, $BB' \perp OAX$, $OB' = x' = a \cos 2\alpha$, $BB' = y' = a \sin 2\alpha$.

Mit Beachtung, dass die Fläche des Segments ABC gleich dem Unterschiede aus der Fläche des Halbsegmentes $B'AB$ und des Dreieckes $B'AB$, erhalten wir

$$F = \int_{x'}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - \frac{y'}{a - x'} \int_{x'}^{a} (a - x)\, dx = a^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha). \quad (1)$$

Für die Momente der Fläche ergiebt sich

$$F\bar{x} = \int_{x'}^{a} x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - \frac{y'}{a - x'} \int_{x'}^{a} x (a - x)\, dx = \frac{2}{3} a^3 \sin^3\alpha \cos\alpha, \quad (2)$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{2} \int_{x'}^{a} (a^2 - x^2)\, dx - \frac{y'^2}{2(a - x')^2} \int_{x'}^{a} (a - x)^2\, dx = \frac{2}{3} a^3 \sin^4\alpha. \quad (3)$$

Durch (1), (2) und (3) sind nun die Schwerpunktscoordinaten

$$\bar{x} = \frac{2}{3} a \frac{\sin^3\alpha \cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{2}{3} a \frac{\sin^4\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

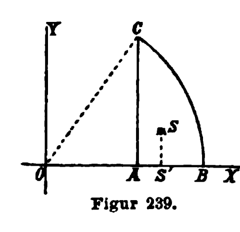
Damit folgt für den Abstand des Schwerpunktes S von dem Punkte O, wenn $OS = \bar{z}$ gesetzt wird,

$$\bar{z} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \frac{2}{3} a \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Für die Neigung der Linie OS zur Abscissenaxe haben wir die Beziehung

$$tg \sphericalangle SOA = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = tg\,\alpha, \quad \text{so dass} \quad \sphericalangle SOA = \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB,$$

d. h. die durch O gehende Halbierungslinie der Fläche ist die Schwerlinie, wie dem sein muss.



Figur 239.

8. Welches ist die Lage des Schwerpunktes der Fläche eines halben Kreissegmentes ABC (Fig. 239)?

Es sei O der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, $OB = OC = a$, $\sphericalangle COB = \alpha$, $OA = x' = a\cos\alpha$, $AC = y' = a \sin\alpha$, O Coordinaten-

ursprung, OBX Abscissenaxe des rechtwinkeligen Coordinatensystemes. Weil $y^2 = a^2 - x^2$ die Gleichung des zugehörigen Kreises, so ist hier

$$F = \int_{x'}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha), \tag{1}$$

$$F\bar{x} = \int_{x'}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{3} a^3 \sin^3\alpha, \tag{2}$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{2}\int_{x'}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{1}{6} a^3 (2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha). \tag{3}$$

Durch diese Resultate ergiebt sich

$$\bar{x} = \frac{2}{3} a \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{1}{3} a \frac{2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

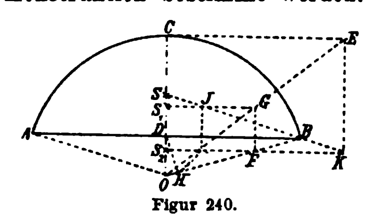
Mit $AC = \frac{p}{2}$, $a^2(\alpha \sin\alpha\cos\alpha) = F'$ erfolgt noch, indem $p = 2a\sin\alpha$ ist,

$$\bar{x} = \frac{8a^3\sin^3\alpha}{12a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} = \frac{p^3}{12F'}.$$

Die Abscisse des Schwerpunktes ist mithin gleich dem Kubus der Sehne, geteilt durch den zwölffachen Inhalt des ganzen Segmentes.

Für die Viertelkreisfläche ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$. Für die Halbkreisfläche ist $\alpha = \pi$, also $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$.

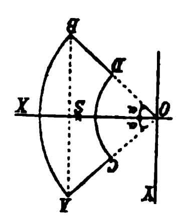
9. Die Lage des Schwerpunktes eines Kreissegmentes soll durch Konstruktion bestimmt werden.



Figur 240.

Das Segment ABC (Fig. 240) ist die Differenz des Sektors OAB und des Mittelpunktsdreieckes OAB, so dass das Moment des Segmentes in Bezug auf eine zu der Sehne AB parallele, durch O gehende Axe gleich ist dem Unterschiede der Momente des Sektors und des Dreieckes OAB für dieselbe Axe. Die Schwerpunkte aller drei Flächen befinden sich auf der gemeinschaftlichen Symmetrielinie OC. Machen wir auf der Mitteltangente des Bogens AB die Strecke $CE =$ Bogen BC, ziehen OE, durch F, mit $OF = \frac{2}{3}OB$, $FG \parallel OC$, GS_1 und $FS_2 \parallel AB$, dann sind S_1 und S_2 auf OC die Schwerpunkte des Sektors und des Mittelpunktsdreieckes. Machen wir jetzt $DH \perp OB$, $S_1J = DH$, $S_2K = CE$ und ziehen die Gerade JK, so schneidet dieselbe die Symmetrieaxe in dem verlangten Schwerpunkte S des Segmentes. Die Flächen des Sektors und des Mittelpunktsdreieckes sind proportional den Strecken $CE = S_2K$ und $DH = S_1J$, wodurch $SS_1 : SS_2 = S_1J : S_2K = DH : CE$, d. i. $SS_1 . CE = SS_2 . DH$, welche Bedingung für die Lage des Punktes S erfüllt sein muss.

10. Bestimmung des Schwerpunktes eines homogenen koncentrischen Ringstückes.



Figur 241.

Es sei der Mittelpunktswinkel des Ringstückes $ABDC$ (Fig. 241) $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, $OA = OB = a_1$, $OC = OD = a_2$. Der Schwerpunkt S dieser Fläche liegt offenbar auf der durch den Punkt O gehenden, zur Sehne AB senkrechten Geraden, welche als Polaraxe mit dem Pole in O dienen soll, so dass nur sein Abstand $OS = \bar{x}$ von O zu berechnen ist. Die zur Bestimmung des Flächenmittelpunktes gegebenen allgemeinen Gleichungen sind

$$F = \iint r\, d\vartheta\, dr, \qquad F\bar{x} = \iint r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr,$$

im vorliegenden Falle haben wir

$$F = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^{a_1} r\, d\vartheta\, dr - \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^{a_2} r\, d\vartheta\, dr$$

$$= \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2)\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\vartheta = (a_1^2 - a_2^2)\,\alpha, \tag{1}$$

$$F\bar{x} = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^{a_1} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr - \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^{a_2} r^2\cos\vartheta\, d\vartheta\, dr$$

$$= \frac{1}{3}(a_1^3 - a_2^3)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{3}(a_1^3 - a_2^3)\sin\alpha. \tag{2}$$

Nun ist mit (1) und (2)

$$\bar{x} = \frac{F\bar{x}}{F} = \frac{2}{3}\frac{a_1^3 - a_2^3}{a_1^2 - a_2^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \bar{x} = \frac{2}{3}\frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{a_1 + a_2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{3}$$

Wir können aber auch die Integration in folgender Weise bewirken. Es ist offenbar auch

$$F = \int_0^{a_1}\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\, dr\, d\vartheta - \int_0^{a_2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\, dr\, d\vartheta$$

$$= 2\alpha\left\{\int_0^{a_1} r\, dr - \int_0^{a_2} r\, dr\right\} = \alpha(a_1^2 - a_2^2), \tag{4}$$

$$F\bar{x} = \int_0^{a_1}\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\, dr \cos\vartheta\, d\vartheta - \int_0^{a_2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\, dr\cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 2\sin\alpha\left\{\int_0^{a_1} r^2\, dr - \int_0^{a_2} r^2\, dr\right\} = \frac{2}{3}\sin\alpha\,(a_1^3 - a_2^3). \tag{5}$$

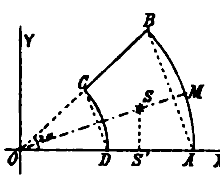
Durch (4) und (5) ist nun

$$\bar{x} = \frac{F\bar{x}}{F} = \frac{2}{3}\frac{a_1^3 - a_2^3}{a_1^2 - a_2^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \bar{x} = \frac{2}{3}\frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{a_1 + a_2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{6}$$

Die Gleichungen (3) und (6) sind identisch.

Gemäss der ersten Integrationsweise ist jeder Sektor zerlegt gedacht in eine unendliche Anzahl von Infinitesimaldreiecken, welche eine gemeinschaftliche Spitze O haben und deren Grundlinien Elemente der Bögen AB, CD sind. Gemäss der zweiten Integrationsweise denken wir uns jeden Sektor zusammengesetzt aus einer unendlich grossen Anzahl koncentrischer Ringstücke von unangebbar kleiner Breite.

11. Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunktes eines koncentrischen Ringstückes bezüglich einer der Begrenzungsgeraden als Abscissenaxe mit dem Mittelpunkte der begrenzten Bögen als Ursprung der Coordinaten.



Figur 242.

Es sei (Figur 242) $ABCD$ das gegebene Ringstück, O der Mittelpunkt der Bögen AB, CD, $OA = a_1$, $OD = a_2$, $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, OA die Polaraxe.

Mit Rücksicht darauf, dass die Fahrstrahlen der begrenzenden Bögen von konstanter Länge sind, kommen wir auch mit einfachen Integrationen zum Ziele.

Die Fläche des Ringstückes $ABCD$ ist

$$F = \frac{1}{2}(a_1{}^2 - a_2{}^2)\int_0^{2\alpha} d\vartheta = (a_1{}^2 - a_2{}^2)\,\alpha. \tag{1}$$

Die Momentengleichungen der Fläche bezüglich der Axen $OY \perp OX$ und OX sind

$$F\bar{x} = \frac{1}{2}a_1{}^2\int_0^{2\alpha}\frac{2}{3}a_1 \cos\vartheta\, d\vartheta - \frac{1}{2}a_2{}^2\int_0^{2\alpha}\frac{2}{3}a_2 \cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{3}(a_1{}^3 - a_2{}^3)\int_0^{2\alpha}\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

$$F\bar{x} = \frac{1}{3}(a_1{}^3 - a_2{}^3)\sin 2\alpha = \frac{2}{3}(a_1{}^3 - a_2{}^3)\sin\alpha\cos\alpha, \tag{2}$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{2}a_1{}^2\int_0^{2\alpha}\frac{2}{3}a_1 \sin\vartheta\, d\vartheta - \frac{1}{2}a_2{}^2\int_0^{2\alpha}\frac{2}{3}a_2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{3}(a_1{}^3 - a_2{}^3)\int_0^{2\alpha}\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{3}(a_1{}^3 - a_2{}^3)(1 - \cos 2\alpha) = \frac{2}{3}(a_1{}^3 - a_2{}^3)\sin^2\alpha. \tag{3}$$

Nun erhalten wir mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{a_1{}^3 - a_2{}^3}{a_1{}^2 - a_2{}^2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}, \qquad \bar{y} = \frac{2}{3}\frac{a_1{}^3 - a_2{}^3}{a_1{}^2 - a_2{}^2}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}.$$

Sind (x', y') die Coordinaten des Punktes B, resp. C, und ist s die Länge des Bogens AB, resp. CD, so ergieht sich noch

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{a_1{}^3 - a_2{}^3}{a_1{}^2 - a_2{}^2}\frac{y'}{s}, \qquad \bar{y} = \frac{2}{3}\frac{a_1{}^3 - a_2{}^3}{a_1{}^2 - a_2{}^2}\frac{a_1 - x'}{s}.$$

Für den Abstand $\bar{z}$ des Schwerpunktes S vom Coordinatenanfange haben wir nun

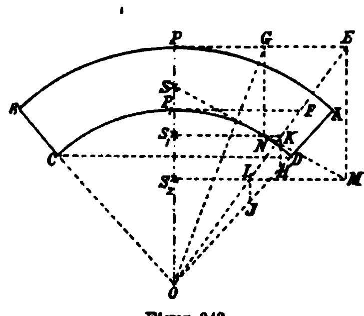
$$\bar{z} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \frac{2}{3}\frac{a_1{}^3 - a_2{}^3}{a_1{}^2 - a_2{}^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Ist β der Winkel, welchen der Strahl OSM mit der Abscissenaxe einschliesst, so muss sein

$$tg\,\beta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = tg\,\alpha, \qquad \text{d. h.} \qquad \sphericalangle\,\beta = \sphericalangle\,\alpha,$$

die Schwerlinie OS ist mithin Symmetrielinie des ebenen Gebildes $ABCD$.

12. Der Schwerpunkt eines koncentrischen Ringstückes soll durch Konstruktion gefunden werden.



Figur 243.

Das Moment des Ringstückes $ABCD$ (Fig. 243) ist die Differenz der Momente der Sektoren ABO, CDO. Die Schwerpunkte S_1, S_2 dieser Kreisausschnitte, welche auf der Symmetrielinie OP liegen, bestimmen wir in bekannter Weise. Auf der Mitteltangente machen wir $PE =$ Bogen PA, ziehen OE, machen $OH = \frac{2}{3}\cdot OA$, $OJ = \frac{2}{3}\cdot OD$, HK, $JL \parallel OP$ und ziehen KS_1, $LS_2 \parallel CD$, so sind S_1, S_2 die Schwerpunkte der Sektoren. Nun ziehen wir die Mitteltangente P_1F an den Bogen CD, so sind die Flächen der Dreiecke OPE, OP_1F proportional den Flächen der Sektoren OAB, OCD. Verwandeln wir jetzt das Dreieck OP_1F in ein solches, welches mit dem Dreiecke OPE dieselbe Grundlinie OP hat, und bei P rechtwinkelig ist, also in das Dreieck OPG, dann sind auch die Flächen der Sektoren proportional den Strecken PE, PG. Nun machen wir auf S_2L die Strecke $S_2M = PE$, auf S_1K die Strecke $S_1N = PG$ und ziehen MN, dann schneidet diese Linie die Gerade OP in dem verlangten Schwerpunkte S des gegebenen Ringstückes. Es ist nämlich $SS_1 : SS_2 = S_1N : S_2M$, oder $SS_1 : SS_2 = PG : PE =$ Sektor OCD : Sektor OAB, also $SS_1 \times$ Sektor $OAB = SS_2 \times$ Sektor OCD.

13. Zu finden den Schwerpunkt der Fläche, welche eingeschlossen ist von dem Bogen einer Parabel, ihrer Axe und zwei Ordinaten, wenn die Gleichung der Curve ist $y^2 = 2px$, die Coordinaten der Endpunkte des Bogens (x', y'), (x'', y'') sind.

Die allgemeinen Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunktes einer ebenen Fläche sind

$$F = \int\!\!\int dy\,dx, \qquad F\bar{x} = \int\!\!\int x\,dy\,dx, \qquad F\bar{y} = \int\!\!\int y\,dy\,dx.$$

Damit und mit der Gleichung der Curve erhalten wir

$$F = \int_{x'}^{x''}\int_0^y dx\,dy = \int_{x'}^{x''} y\,dx = \sqrt{2p}\int_{x'}^{x''}\sqrt{x}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,(x''^{\frac{3}{2}} - x'^{\frac{3}{2}}), \tag{1}$$

$$F\bar{x} = \int_{x'}^{x''}\int_0^y x\,dx\,dy = \int_{x'}^{x''} xy\,dx = \sqrt{2p}\int_{x'}^{x''} x^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{2p}\,(x''^{\frac{5}{2}} - x'^{\frac{5}{2}}), \tag{2}$$

$$F\bar{y} = \int_{x'}^{x''}\int_0^y y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''} y^2\,dx = p\int_{x'}^{x''} x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}p\,(x''^2 - x'^2). \tag{3}$$

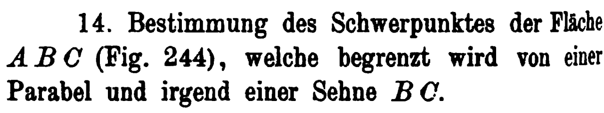
Daher sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\bar{x} = \frac{F\bar{x}}{F} = \frac{3}{5}\,\frac{x''^{\frac{5}{2}} - x'^{\frac{5}{2}}}{x''^{\frac{3}{2}} - x'^{\frac{3}{2}}}, \qquad \bar{y} = \frac{F\bar{y}}{F} = \frac{3}{8}\,\frac{\sqrt{2p}\,(x''^2 - x'^2)}{x''^{\frac{3}{2}} - x'^{\frac{3}{2}}}.$$

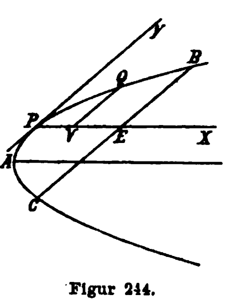
Für die Fläche vom Parabelscheitel bis zum Curvenpunkte (x, y) ist, weil dann $x' = y' = 0$, $x'' = x$, $y'' = y$,

$$\bar{x} = \frac{3}{5}x, \qquad \bar{y} = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8}y.$$

Handelt es sich um die von der Parabel und einer Doppelordinate eingeschlossenen Fläche, dann liegt der Schwerpunkt offenbar auf der Abscissenaxe in einem Abstande $\bar{x} = \frac{3}{5}x$ vom Parabelscheitel.



14. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche ABC (Fig. 244), welche begrenzt wird von einer Parabel und irgend einer Sehne BC.



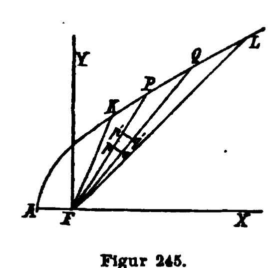
Figur 244.

Es sei PY die zur Sehne BC parallele Tangente der Parabel mit dem Berührungspunkte P, PX die zur Parabelaxe parallele Abscissenaxe, PY Ordinatenaxe, dann ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 4mx$, wenn m die Entfernung des Punktes P vom Brennpunkte bezeichnet. Demzufolge ist mit

$PE = a$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x y\, d x}{\int_0^a y\, d x} = \frac{\int_0^a x^{\frac{3}{2}} d x}{\int_0^a x^{\frac{1}{2}} d x} = \frac{\frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a.$$

Archimedes, Ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν, Lib. II, Prop. 8. Guldin, Centrobaryca, Lib. I, cap. 9, p. 121. Walton, p. 8.



Figur 245.

15. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche KFL (Fig. 245), welche begrenzt wird von dem Bogen KL einer Parabel und dem durch deren Focus F gezogenen Strahlen FK, FL.

Es sei F Coordinatenanfang, A Parabelscheitel, AFX die Axe der x, die zu AX senkrechte Gerade FY Axe der y, $FP = r$, $\sphericalangle AFP = \vartheta$, $AF = m$, $\sphericalangle AFK = \alpha$, $\sphericalangle AFL = \beta$, dann sind die Coordinaten des Schwerpunktes der gegebenen Fläche

$$\bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\vartheta\, d r}{\int_\alpha^\beta \int_0^r r\, d\vartheta\, d r}, \quad \bar{y} = \frac{\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \sin(\pi - \vartheta)\, d\vartheta\, d r}{\int_\alpha^\beta \int_0^r r\, d\vartheta\, d r}. \quad (\alpha)$$

Nun ist $\int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\vartheta\, d r = \frac{1}{3} r^3 \cos(\pi - \vartheta)\, d\vartheta = -\frac{1}{3} r^3 \cos\vartheta\, d\vartheta$

$= -\frac{1}{3} m^3 \frac{\cos\vartheta}{\cos^6 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$, weil $r = \frac{m}{\cos^6 \frac{\vartheta}{2}}$, daher

$$\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\vartheta\, d r = -\frac{1}{3} m^3 \int_\alpha^\beta \frac{\cos\vartheta}{\cos^6 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta,$$

aber weil

$$\frac{\cos\vartheta}{\cos^6 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{1 - tg^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + tg^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^6 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{1 - tg^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} = \left(1 + tg^2 \frac{\vartheta}{2}\right) sec^4 \frac{\vartheta}{2},$$

$$\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\vartheta\, d r = -\frac{1}{3} m^3 \int_\alpha^\beta sec^4 \frac{\vartheta}{2} \left(1 - tg^2 \frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{3} m^3 \int_{tg\frac{\alpha}{2}}^{tg\frac{\beta}{2}} \left(1 - tg^4 \frac{\vartheta}{2}\right) 2\, d\left(tg \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{3} m^3 \left\{ tg \frac{\beta}{2} - tg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{5}\left(tg^5 \frac{\beta}{2} - tg^5 \frac{\alpha}{2}\right)\right\}. \quad (1)$$

Weiter haben wir

$$\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 sin(\pi - \vartheta)\, d\vartheta\, dr = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3 sin\,\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{3} m^3 \int_\alpha^\beta \frac{sin\,\vartheta}{cos^6 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta = \frac{2}{3} m^3 \int_\alpha^\beta \frac{sin \frac{\vartheta}{2}}{cos^5 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$$

$$= -\frac{4}{3} m^3 \int_{cos\frac{\alpha}{2}}^{cos\frac{\beta}{2}} \frac{d\left(cos\frac{\vartheta}{2}\right)}{cos^5 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{3} m \left(sec^4 \frac{\beta}{2} - sec^4 \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (2)$$

Endlich ist

$$\int_\alpha^\beta \int_0^r r\, d\vartheta\, dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\vartheta = \frac{1}{2} m^2 \int_\alpha^\beta \frac{d\vartheta}{cos^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} m^2 \int_{tg\frac{\alpha}{2}}^{tg\frac{\beta}{2}} \left(1 + tg^2 \frac{\vartheta}{2}\right) 2\, d\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= m^2 \left\{ tg\frac{\beta}{2} - tg\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\left(tg^3 \frac{\beta}{2} - tg^3 \frac{\alpha}{2}\right)\right\}. \qquad (3)$$

Durch die Gleichungen (α), (1), (2) und (3) bekommen wir nun

$$\bar{x} = \frac{2}{3} m \frac{\frac{1}{5}\left(tg^5 \frac{\beta}{2} - tg^5 \frac{\alpha}{2}\right) - \left(tg\frac{\beta}{2} - tg\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{3}\left(tg^3 \frac{\beta}{2} - tg^3 \frac{\alpha}{2}\right) + \left(tg\frac{\beta}{2} - tg\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3} m \frac{sec^4 \frac{\beta}{2} - sec^4 \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{3}\left(tg^3 \frac{\beta}{2} - tg^3 \frac{\alpha}{2}\right) + \left(tg\frac{\beta}{2} - tg\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} m \frac{\frac{1}{2}\left(tg^4 \frac{\beta}{2} - tg^4 \frac{\alpha}{2}\right) + \left(tg^2 \frac{\beta}{2} - tg^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{3}\left(tg^3 \frac{\beta}{2} - tg^3 \frac{\alpha}{2}\right) + \left(tg\frac{\beta}{2} - tg\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

OF sei ein Radiusvektor sehr nahe bei FP, und es seien pq, $p'q'$ zwei aus dem Mittelpunkte F mit den beinahe gleichen Radien Fp, Fp' beschriebene Kreisbögen. Bei den Integrationen, welche wir für die Bestimmung der Werte von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ausgeführt haben, wurde zuerst gedacht, dass das unendlich schmale Dreieck PFQ zusammengesetzt sei aus einer unendlich grossen Anzahl von Infinitesimalparallelo-

grammen, so wie $p\,q\,q'\,p'$, und dann angenommen, dass die ganze Fläche $K\,F\,L$ zusammengesetzt sei aus einer unendlich grossen Anzahl von Dreiecken, so wie $P\,F\,Q$. Auf diese Weise repräsentieren die Ausdrücke

$$r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\,\vartheta\, d\,r, \qquad r^2 \sin(\pi - \vartheta)\, d\,\vartheta\, d\,r$$

die Momente der Fläche $p\,q\,p'\,q'$ für die Axen der y und der x, die Ausdrücke

$$\int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\,\vartheta\, d\,r, \qquad \int_0^r r^2 \sin(\pi - \vartheta)\, d\,\vartheta\, d\,r$$

die Momente der Fläche $P\,F\,Q$ und die Ausdrücke

$$\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\,\vartheta\, d\,r, \qquad \int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \cos(\pi - \vartheta)\, d\,\vartheta\, d\,r$$

die Momente der ganzen Fläche $K\,F\,L$ für dieselben Axen. Auch bezeichnen entsprechend die Grössen

$$r\,d\,\vartheta\,d\,r, \qquad \int_0^r r\,d\,\vartheta\,d\,r, \qquad \int_\alpha^\beta \int_0^r r\,d\,\vartheta\,d\,r$$

die Flächen $p\,q\,p'\,q'$, $P\,F\,Q$, $K\,F\,L$.

Walton, p. 12.

16. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche, die begrenzt ist von einem Bogen einer Ellipse, einem Teile ihrer grossen Axe und zwei zu dieser Linie senkrechten Geraden, wenn die Gleichung der Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ist und (x', y'), (x'', y'') die Coordinaten der Endpunkte des Bogens sind?

Das Element der Fläche ist $d\,F = y\,d\,x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x$, mithin

$$F = \frac{b}{a}\int_{x'}^{x''} \sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x = \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arc\left(sin = \frac{x}{a}\right) + C\right\}_{x'}^{x''}. \quad (1)$$

Die Momentengleichungen unserer Fläche bezüglich der Coordinatenaxen sind

$$F\bar{x} = \frac{b}{a}\int_{x'}^{x''} x\sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x = -\frac{b}{a}\left\{\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C\right\}_{x'}^{x''}, \quad (2)$$

$$F\bar{y} = \frac{b^2}{2\,a^2}\int_{x'}^{x''} (a^2 - x^2)\,d\,x = \frac{b^2}{2\,a^2}\left\{a^2 x - \frac{x^3}{3} + C\right\}_{x'}^{x''}. \quad (3)$$

Durch die Gleichungen (1), (2) und (3) erhalten wir nun

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\,\frac{(a^2 - x'^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2 - x''^2)^{\frac{3}{2}}}{x''\sqrt{a^2 - x''^2} - x'\sqrt{a^2 - x'^2} + a^2 arc\left(sin = \frac{x''\sqrt{a^2 - x'^2} - x'\sqrt{a^2 - x''^2}}{a^2}\right)},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\frac{b}{a}\,\frac{(x'' - x')(3\,a^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2)}{x''\sqrt{a^2 - x''^2} - x'\sqrt{a^2 - x'^2} + a^2 arc\left(sin = \frac{x''\sqrt{a^2 - x'^2} - x'\sqrt{a^2 - x''^2}}{a^2}\right)}.$$

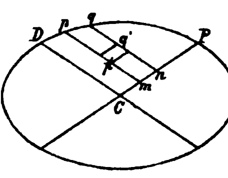
Damit ergiebt sich für die Fläche von $x' = 0$ bis $x'' = x$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \, arc\left(sin = \frac{x}{a}\right)},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3} \frac{b}{a} \cdot \frac{(3a^2 - x^2)\,x}{x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \, arc\left(sin = \frac{x}{a}\right)}.$$

Um den Schwerpunkt des vierten Teiles der elliptischen Fläche zu erhalten, ist zu integrieren von $x' = 0$ bis $x'' = a$, wodurch $\bar{x} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$, $\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}$. Die Schwerpunktscoordinaten der halben elliptischen Fläche sind, indem dann $x' = -a$, $x'' = a$ ist, $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}$.

Zu denselben Resultaten gelangen wir, wenn wir die Ellipsengleichung zugrunde legen $y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$.



Figur 246.

17. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche CPD (Fig. 246) einer Ellipse, für welche CP, CD zwei konjugierte Halbdiameter sind.

Wenn $CP = a$, $CD = b$, CP und CD unbestimmt angeordnet, als Axen der x und der y angenommen werden, so ist die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \tag{1}$$

und für die Lage des Schwerpunktes haben wir, die Integrationsgrenzen anzeigend,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^y x\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^y dx\,dy}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^a \int_0^y y\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^y dx\,dy}. \tag{2}$$

Der Wert von y für die Grenze ist in der Figur die Linie pm; in der Integration bezüglich y ist das unendlich schmale Trapez $pqnm$ zusammengesetzt gedacht aus einer unendlichen Anzahl unangebbar kleiner Parallelogramme, so wie $p'q'$, und in der Integration bezüglich x ist angenommen, dass die ganze Fläche CPD aus einer unendlich grossen Zahl unangebbarer Flächenstreifen, so wie $pqnm$, bestehe.

Für die Fläche CPD erhalten wir

$$F = \int_0^a \int_0^y dx\,dy = \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a b. \tag{3}$$

und für die Momente derselben

$$F\bar{x}=\int_0^a\int_0^y x\,d\,x\,d\,y=\int_0^a x\,y\,d\,x=\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,d\,x=\frac{1}{3}a^2b, \quad (4)$$

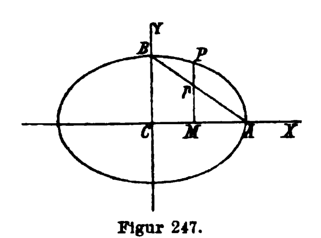
$$F\bar{y}=\int_0^a\int_0^y y\,d\,x\,d\,y=\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,d\,x=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,d\,x=\frac{1}{3}a\,b^2. \quad (5)$$

Nun ergiebt sich mit (2) bis (5)

$$\bar{x}=\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}, \qquad \bar{y}=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}.$$

Anstatt der gewählten Integrationsfolge hätte ebenso die umgekehrte genommen werden können, dann wären die Formeln für $\bar{x}$ und $\bar{y}$ gewesen

$$\bar{x}=\frac{\int_0^b\int_0^x x\,d\,y\,d\,x}{\int_0^b\int_0^x d\,y\,d\,x}, \qquad \bar{y}=\frac{\int_0^b\int_0^x y\,d\,y\,d\,x}{\int_0^b\int_0^x d\,y\,d\,x},$$



Figur 247.

18. Bestimmung des Schwerpunktes des Segmentes $APBp$ (Fig. 247) der Fläche einer Ellipse, welches von einer Quadrantalsehne abgeschnitten wird.

Es sei $CA=a$, $CB=b$, $CM=x$, $MP=y$, $Mp=y'$ dann sind die Gleichungen der Ellipse und der Sehne

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \qquad y'=\frac{b}{a}(a-x). \quad (1)$$

Für die Abscisse des Schwerpunktes haben wir die Gleichung

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a\int_{y'}^y x\,d\,x\,d\,y}{\int_0^a\int_{y'}^y d\,x\,d\,y}. \quad (2)$$

Nun ist $\int_0^a\int_{y'}^y d\,x\,d\,y=\int_0^a(y-y')dx=\frac{b}{a}\int_0^a\left\{\sqrt{a^2-x^2}-(a-x)\right\}dx$ mit (1),

$$=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx-\frac{b}{a}\left(a^2-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{b}{a}\left(\frac{\pi}{4}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{4}(\pi-2)\,a\,b, \quad (3)$$

$$\int_0^a\int_{y'}^y x\,d\,x\,d\,y=\int_0^a(y-y')\,x\,d\,x=\frac{b}{a}\int_0^a x\left\{\sqrt{a^2-x^2}-(a-x)\right\}d\,x \text{ mit (1)},$$

$$=\frac{b}{a}\left\{-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}a\,x^2+\frac{1}{3}x^3\right\}_0^a=\frac{1}{6}a^2b. \quad (4)$$

Durch (2), (3) und (4) erhalten wir sonach

$$\bar{x}=\frac{2}{3}\frac{a}{\pi-2}.$$

Augenscheinlich wird sich in ähnlicher Weise ergeben

$$\bar{y}=\frac{2}{3}\frac{b}{\pi-2}.$$

Walton, p. 11.

19. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche, welche begrenzt wird durch den Bogen einer Hyperbel, ihre reelle Axe und zwei zu dieser Linie senkrechte Gerade, wenn die Gleichung der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ ist und die Coordinaten der Endpunkte des Bogens (x', y'), (x'', y'') sind.

Das Element der zwischen zwei Ordinaten eingeschlossenen Fläche ist $dF = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx$, daher

$$F = \frac{b}{a}\int_{x'}^{x''}\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\Big\{\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}l(2x+2\sqrt{x^2-a^2}) + C\Big\}_{x'}^{x''}. \quad (1)$$

Die Momente der betrachteten Fläche bezüglich der Coordinatenaxen sind

$$F\bar{x} = \frac{b}{a}\int_{x'}^{x''} x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{3a}\Big\{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} + C\Big\}_{x'}^{x''}, \quad (2)$$

$$F\bar{y} = \frac{b^2}{2a^2}\int_{x'}^{x''}(x^2-a^2)\,dx = \frac{b^2}{2a^2}\Big\{\frac{x^3}{3} - a^2x + C\Big\}_{x'}^{x''}. \quad (3)$$

Nun erhalten wir durch die Gleichungen (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\,\frac{(x''^2-a^2)^{\frac{3}{2}} - (x'^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x''\sqrt{x''^2-a^2} - x'\sqrt{x'^2-a^2} - a^2 l\frac{x''+\sqrt{x''^2-a^2}}{x'+\sqrt{x'^2-a^2}}},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\frac{b}{a}\,\frac{(x''^3-x'^3) - 3a^2(x''-x')}{x''\sqrt{x''^2-a^2} - x'\sqrt{x'^2-a^2} - a^2 l\frac{x''+\sqrt{x''^2-a^2}}{x'+\sqrt{x'^2-a^2}}}.$$

Für die am Curvenscheitel beginnende und bis zum Curvenpunkte (x, y) reichende Fläche erhalten wir vermöge dieser Resultate, da dann $x' = a$, $x'' = x$,

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\,\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\frac{b}{a}\,\frac{(x^2-3a^2)x + 2a^3}{x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}}.$$

Zu denselben Resultaten gelangen wir mit der Gleichung der Curve
$y^2 = (e^2-1)(x^2-a^2)$.

20. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche, die eingeschlossen ist zwischen dem Bogen einer gleichseitigen Hyperbel $xy = a$, ihrer Abscissenaxe und zwei Ordinaten?

$$\bar{x} = \frac{x''-x'}{l(x'')-l(x')}, \quad \bar{y} = \frac{a}{2}\,\frac{x''-x'}{x'x''\{l(x'')-l(x')\}}.$$

21. Bestimmung des Schwerpunktes der homogenen Fläche, welche eingeschlossen ist zwischen einem Bogen der gemeinen Cycloide, ihrer Basis und zwei Normalen zur Basis, wenn die Curve durch die Gleichungen gegeben ist

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Das Element der Fläche ist $dF = y\,dx = a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\left(\frac{1}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi$, mithin der Inhalt der betrachteten Fläche

$$F = \int_{x'}^{x''} y\,dx = a^2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} \left(\frac{1}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi$$
$$= \frac{1}{4}a^2 \Big|_{\varphi'}^{\varphi''} \left\{6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi + C\right\}. \tag{1}$$

Die nötigen Momente dieser Fläche sind

$$F\bar{x} = \int_{x'}^{x''} x\,y\,dx = a^3 \int_{\varphi'}^{\varphi''} (\varphi - \sin\varphi)(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$
$$= a^3 \int_{\varphi'}^{\varphi''} \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi - 2\varphi\cos\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos 2\varphi + \sin 2\varphi + \sin^3\varphi\right)d\varphi$$
$$= \frac{a^3}{12} \Big|_{\varphi'}^{\varphi''} \left\{9\varphi^2 - 6\varphi(\sin\varphi - \sin 2\varphi) - 9\cos\varphi - 3\cos 2\varphi + \cos^3\varphi + C\right\}, \tag{2}$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''} y^2\,dx = \frac{1}{2}a^3 \int_{\varphi'}^{\varphi''} (1-\cos\varphi)^3\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}a^3 \int_{\varphi'}^{\varphi''} (1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{12}a^3 \Big|_{\varphi'}^{\varphi''} \left\{15\varphi - (22 - 9\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)\sin\varphi + C\right\}. \tag{3}$$

Mit (1), (2) und (3) ergiebt sich nun

$$\bar{x} = \frac{1}{3}a\,\frac{\Big|_{\varphi'}^{\varphi''}\left\{9\varphi^2 - 6\varphi(\sin\varphi - \sin 2\varphi) - 9\cos\varphi - 3\cos 2\varphi + \cos^3\varphi + C\right\}}{\Big|_{\varphi'}^{\varphi''}\left\{6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi\right\}},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}a\,\frac{\Big|_{\varphi'}^{\varphi''}\left\{15\varphi - (22 - 9\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)\sin\varphi + C\right\}}{\Big|_{\varphi'}^{\varphi''}\left\{6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi\right\}}.$$

Dadurch erhalten wir für die halbe Cycloidenfläche, weil hier $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \pi$ ist,

$$F = \frac{3}{2}a^2\pi, \qquad \bar{x} = \frac{1}{18}\frac{a}{\pi}(9\pi^2 + 16) = \frac{1}{2}a\pi + \frac{8a}{9\pi}, \qquad \bar{y} = \frac{5}{6}a.$$

Für die ganze Cycloidenfläche ist, weil in diesem Falle $\varphi' = 0$, $\varphi'' = 2\pi$ ist,

$$F = 3a^2\pi, \qquad \bar{x} = a\pi, \qquad \bar{y} = \frac{5}{6}a.$$

22. Bestimmung des Schwerpunktes eines Teiles der Fläche der Cissoide des Diocles, welcher zwischen zwei Ordinaten liegt, wenn die Gleichung der Curve ist $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.

Weil $dF = y\,dx = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax - x^2}}$, so ist

$$F = \int_{x'}^{x''} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \Big\{ -\frac{3a-2x}{4}\sqrt{ax-x^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2}{4} arc\left(sin = \frac{2x-a}{a}\right) + C \Big\}_{x'}^{x''}, \quad (1)$$

$$F\bar{x} = \int_{x'}^{x''} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \Big\{ -\sqrt{ax-x^2}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{12}ax + \frac{5}{8}a^2\right) + \frac{5}{16} arc\left(sin = \frac{2x-a}{a}\right) + C \Big\}_{x'}^{x''}, \quad (2)$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''} \frac{x^3\,dx}{a-x} = -\frac{1}{2}\Big\{ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + a^2x + a^3 l(a-x) + C \Big\}_{x'}^{x''}. \quad (3)$$

Damit lassen sich leicht die Coordinaten des Schwerpunktes für jeden speziellen Fall anschreiben. Die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ der Fläche von $x' = 0$ bis $x'' = a$ sind $\bar{x} = \frac{5}{6}a$, $\bar{y} = \infty$. Der Schwerpunkt der ganzen Cissoidenfläche befindet sich auf der Abscissenaxe in einem Abstande $\bar{x} = \frac{5}{6}a$ vom Coordinatenursprunge.

Handelt es sich nur um den Schwerpunkt der ganzen Cissoidenfläche, so bestimmt sich derselbe am einfachsten in folgender Weise. Es ist seine Abscisse

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}}}{\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}}},$$

aber $$\int \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}} = -2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{a-x} + 5\int x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\,dx,$$

daher $$\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}} = 5\int x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\,dx$$

$$= 5a\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}} - 5\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}} = \frac{5}{6}a\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{\sqrt{a-x}}$$

so dass
$$\bar{x} = \frac{5}{6}a\frac{\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}}{\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}} = \frac{5}{6}a.$$

23. Die Kettenlinie sei gegeben durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}m(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$ und es soll der Schwerpunkt eines zwischen zwei Ordinaten liegenden Flächenstückes bestimmt werden.

Im vorliegenden Falle ist

$$F = \frac{1}{2}m\int_{x'}^{x''}(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})\,dx = \frac{1}{2}m^2\left\{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} + C\right\}_{x'}^{x''} \tag{1}$$

$$F\bar{x} = \frac{1}{2}m\int_{x'}^{x''}(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})x\,dx = \frac{1}{2}m^2\left\{(x-m)e^{\frac{x}{m}} - (x+m)e^{-\frac{x}{m}} + C\right\}_{x'}^{x''} \tag{2}$$

$$F\bar{y} = \frac{1}{8}m^2\int_{x'}^{x''}(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})^2\,dx = \frac{1}{8}a^2\left\{\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{m}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{m}} + C\right\}_{x'}^{x''} \tag{3}$$

Nun ergiebt sich mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{(x''-m)e^{\frac{x''}{m}} - (x''+m)e^{-\frac{x''}{m}} - (x'-m)e^{\frac{x'}{m}} + (x'+m)e^{-\frac{x'}{m}}}{e^{\frac{x''}{m}} - e^{-\frac{x''}{m}} - e^{\frac{x'}{m}} + e^{-\frac{x'}{m}}},$$

$$\bar{y} = \frac{me^{\frac{2x''}{m}} + 4x'' - me^{-\frac{2x''}{m}} - me^{\frac{2x'}{m}} - 4x' + me^{-\frac{2x'}{m}}}{e^{\frac{x''}{m}} - e^{-\frac{x''}{m}} - e^{\frac{x'}{m}} + e^{-\frac{x'}{m}}}.$$

Beginnt die Fläche im tiefsten Punkte der Curve und reicht sie bis zum Punkte (x, y) derselben, so ist $x' = 0$, $x'' = x$, daher sind die Coordinaten ihres Schwerpunktes

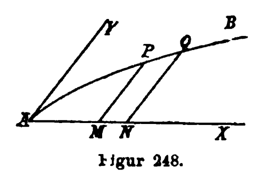
$$\bar{x} = \frac{(x-m)e^{\frac{x}{m}} - (x+m)e^{-\frac{x}{m}} + 2m}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}, \quad \bar{y} = \frac{me^{\frac{2x}{m}} + 4x - me^{-\frac{2x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}.$$

24. Die Punkte D, E, F teilen die Seiten BC, AC, AB eines Dreieckes ABC proportional, nämlich in der Weise, dass $BD:CE:AF = DE:EA:FB$ ist. Zeige, dass der Schwerpunkt der Dreiecksfläche DEF mit demjenigen der Dreiecksfläche ABC zusammenfällt.

25. Von einem Quadrate $ABCD$ ist ein Dreieck AEF so abgeschnitten, dass $AE = \frac{1}{4}.AD$, $AF = \frac{3}{4}\cdot AB$. Wo liegt der Schwerpunkt der bleibenden Fläche $BCDEF$?

Wenn a die Seitenlänge des Quadrates bezeichnet, dann sind die Abstände des Schwerpunktes von AB und AD gleich $\frac{63}{116}a$ und $\frac{61}{116}a$.

26. Die Spitze eines Dreieckes befindet sich in einem festen Punkte des Umfanges eines Kreises, seine Basis ist eine Sehne dieses Kreises. Beweise, dass — wenn der Winkel in der Spitze von gegebener Grösse ist — der Ort des Schwerpunktes der Dreiecksfläche ein anderer Kreis ist.



Figur 248.

27. AB (Fig. 248) ist eine Parabel mit der Gleichung $a^{m-1}y = x^m$. Welches ist der Schwerpunkt der zwischen zwei Ordinaten eingeschlossenen Fläche $PMNQ$?

Ist $AM = x'$, $AN = x''$, dann wird gefunden werden

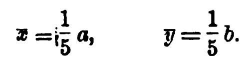
$$\overline{x} = \frac{m+1}{m+2}\,\frac{x''^{m+2} - x'^{m+2}}{x''^{m+1} - x'^{m+1}},\ \overline{y} = \frac{m+1}{2(2m+1)a^{m-1}}\,\frac{x''^{2m+1} - x'^{2m+1}}{x''^{m+1} - x'^{m+1}}$$

Carré, Mésure des Surfaces, etc. p. 80.

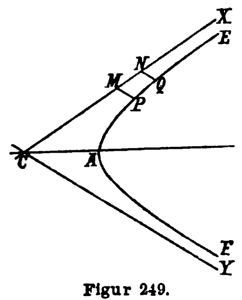
28. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche, die begrenzt wird von einer geraden Linie $y = \beta x$ und einer Parabel $y^2 = 2px$?

$$\overline{x} = \frac{4}{5}\frac{p}{\beta^2},\qquad \overline{y} = \frac{p}{\beta}.$$

29. Bestimme den Schwerpunkt der Fläche, welche eingeschlossen wird von den Coordinatenaxen und der parabolischen Curve $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$.



$$\overline{x} = \frac{1}{5}a,\qquad \overline{y} = \frac{1}{5}b.$$



Figur 249.

30. CX, CY (Fig. 249) sind die Asymptoten einer Hyperbel EAF, PM, QN sind zu CY parallele Linien. Man soll den Schwerpunkt der Fläche $PMNQ$ bestimmen.

Wenn a, b die Halbaxen der Hyperbel, CX, CY als Axen der x, der y genommen und CM, CN mit x', x'' bezeichnet sind, dann ist

$$\overline{x} = \frac{x'' - x'}{l(x'') - l(x')},\qquad \overline{y} = \frac{1}{8}\,\frac{a^2 + b^2}{x'\,x''}\,\frac{x'' - x'}{l(x'') - l(x')}.$$

31. Den Schwerpunkt der Fläche zu finden, welche von einer durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ gehenden und unter einem Winkel ϑ gegen die Axe geneigten Sehne abgeschnitten wird.

$$\overline{x} = \frac{p}{10}(3 + 8\,cotg^2\,\vartheta),\qquad \overline{y} = p\,cotg\,\vartheta.$$

32. Bestimme den Schwerpunkt eines Quadranten der Fläche, deren Curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ist, wenn die Coordinatenaxen Grenzlinien sind.

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{256}{315}\frac{a}{\pi}.$$

33. Welches sind die Schwerpunktscoordinaten des Teiles der Fläche der Curve $y = sin\,x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$?

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\pi,\qquad \overline{y} = \frac{1}{8}\pi.$$

34. Es soll bestimmt werden der Schwerpunkt eines Auges der Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ von Jakob Bernoulli.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi a, \qquad y = 0.$$

24—33. Walton, Collection of Problemes of Theoretical Mechanics.

Anmerkung. Weitere hieher gehörige Aufgaben findet der Leser in der Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung von L. A. Sohnke.

Dritter Abschnitt.

Schwerpunkte homogener Rotationsflächen.

1. Bestimmung des Schwerpunktes der Oberfläche des geraden Stumpfes eines Kreiskegels und desjenigen seines ganzen Mantels.

Der Schwerpunkt liegt auf der Rotationsaxe, welche wir als Abscissenaxe wählen, die Gleichung der die Rotationsfläche O erzeugenden Geraden ist dann

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Damit erhalten wir für den Mantel des Kegelstumpfes

$$O = 2\pi\int_{x'}^{x''} y\,ds = 2\pi a\sqrt{1+a^2}\int_{x'}^{x''}(ax+b)\,dx$$

$$= \pi a\sqrt{1+a^2}\,(x''-x')\left\{a(x''+x')+2b\right\}, \tag{2}$$

$$O\bar{x} = 2\pi\int_{x'}^{x''} xy\,ds = 2\pi a\sqrt{1+a^2}\int_{x'}^{x''}(ax+b)\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi a\sqrt{1+a^2}\,(x''-x')\left\{2a(x''^2+x''x'+x'^2)+3b(x''+x')\right\}. \tag{3}$$

Mithin ist die Abscisse des Flächenmittelpunktes mit (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{O\bar{x}}{O} = \frac{1}{3}\,\frac{2a(x''^2+x''x'+x'^2)+3b(x''+x')}{a(x''+x')+2b}. \tag{4}$$

Beginnt der Kegelstumpf in der Ebene der yz und ist seine Höhe gleich h, dann haben wir in (4) $x'=0$, $x''=h$ zu setzen, womit sich ergiebt

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\,\frac{2ah+3b}{ah+b}\,h. \tag{5}$$

Bezeichnet $\underline{x}$ den Abstand des Schwerpunktes dieses Stumpfes von der grösseren Begrenzungsfläche, dann ist

$$\underline{x} = h - \bar{x} = \frac{1}{3}\,\frac{ah^2}{ah+b}.$$

Mit $b=0$, $x'=0$, $x''=h$ giebt (4) die Abscisse des Schwerpunktes des Kegelmantels von der Höhe h, sie ist $\bar{x} = \frac{2}{3}h$, d. h. der Schwerpunkt ist um $\frac{1}{3}$ seiner Höhe von seiner Basis entfernt.

Mit $a=0$ geht der Kegel in einen Cylinder über, für ihn ist vermöge (4)

$$\bar{x}=\frac{1}{2}(x''+x'),$$

und wenn die Cylinderfläche in der Ebene der yz beginnt, in welchem Falle $x'=0$, $x''=h$ ist, $\bar{x}=\frac{1}{2}h$, d. h. der Schwerpunkt der Fläche eines Kreiscylinders fällt mit dem Mittelpunkte seiner Axe zusammen.

2. Bestimmung des Schwerpunktes der Flächenzone einer Kugel vom Halbmesser a, wenn h die Höhe der Zone ist.

Die Mittelpunktsgleichung des erzeugenden Kreises ist $y^2=a^2-x^2$, so dass

$$O=2\pi a\int_{x'=x}^{x''=x+h}dx=2\pi a h,\quad O\bar{x}=2\pi a\int_{x}^{x+h}x\,dx=\pi a h(2x+h),$$

mithin

$$\bar{x}=\frac{O\bar{x}}{O}=x+\frac{1}{2}h,$$

d. h. der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Höhe der Zone Mit $x'=x$, $x''=x+h=a$ ergiebt sich zufolge dieses Resultates für das Kugelsegment $\bar{x}=\frac{1}{2}(x+a)$. Für die Halbkugelfläche ist $x'=0$, $x''=a$, daher $\bar{x}=\frac{1}{2}a$.

3. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche eines Rotationsparaboloides zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen, wenn die Gleichung der erzeugenden Parabel $y^2=2px$ ist und die Abscissenaxe als Rotationsaxe angesehen wird.

Die Lage des mit der Abscissenaxe zusammenfallenden Schwerpunktes ist allgemein gegeben durch

$$\bar{x}=2\pi\int xy\,ds:2\pi\int y\,ds=\int_{x'}^{x''}xy\,ds:\int_{x'}^{x''}y\,ds. \tag{1}$$

Im vorliegenden Falle erhalten wir $ds=\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx$, $yds=\sqrt{p}\sqrt{2x+p}\,dx$, $xy\,ds=\sqrt{p}\sqrt{2x+p}\,x\,dx$, daher

$$\int_{x'}^{x''}y\,ds=\sqrt{p}\int_{x'}^{x''}\sqrt{2x+p}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{p}\left\{(2x''+p)^{\frac{3}{2}}-(2x'+p)^{\frac{3}{2}}\right\}, \tag{2}$$

$$\int_{x'}^{x''}xy\,ds=\sqrt{p}\int_{x'}^{x''}x\sqrt{2x+p}\,dx=\frac{1}{30}\sqrt{p}\Big\{3\big[(2x''+p)^{\frac{5}{2}}-(2x'+p)^{\frac{5}{2}}\big]$$
$$-5p\big[(2x''+p)^{\frac{3}{2}}-(2x'+p)^{\frac{3}{2}}\big]\Big\}, \tag{3}$$

so dass mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\,\frac{3\left[(2x''+p)^{\frac{5}{2}}-(2x'+p)^{\frac{5}{2}}\right]-5p\left[(2x''+p)^{\frac{3}{2}}-(2x'+p)^{\frac{3}{2}}\right]}{(2x''+p)^{\frac{3}{2}}-(2x'+p)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Fläche des Paraboloides von der Höhe x ist, da dann $x'=0$, $x''=x$,

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\,\frac{3(2x+p)^{\frac{5}{2}}-5p(2x+p)^{\frac{3}{2}}+2p^{\frac{5}{2}}}{(2x+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrieren wir nicht zwischen den Abscissen, sondern zwischen den Ordinaten, dann haben wir

$$\int_0^y y\,ds = \frac{1}{p}\int_0^y y\sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{1}{3p}\left\{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right\},$$

$$\int_0^y xy\,ds = \frac{1}{2p^2}\int_0^y y^3\sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{1}{30p^2}\left\{(3y^2-2p^2)(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+2p^5\right\},$$

folglich

$$\bar{x} = \frac{1}{10p}\,\frac{(3y^2-2p^2)(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+2p^5}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-p^3}.$$

4. Dreht sich eine Ellipse um ihre grosse Axe, so erzeugt sie das Rotationsellipsoid. Es soll der Schwerpunkt der zu den Abscissen x', x'' gehörigen Rotationsfläche bestimmt werden, wenn die Gleichung der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ ist.

Durch die Gleichung der Erzeugungslinie erhalten wir $ds = \sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$,

$$y\,ds = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx, \qquad xy\,ds = \frac{b}{a}x\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx,$$

mit $(a^2-b^2):a^2 = e^2$, so dass

$$O = 2\pi\int_{x'}^{x''} y\,ds = 2\pi\frac{be}{a}\int_{x'}^{x''}\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\frac{be}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}+\frac{a^2}{2e^2}\,arc\left(sin=\frac{ex}{a}\right)+C\right\}_{x'}^{x''},$$

$$O\bar{x} = 2\pi\int_{x'}^{x''} xy\,ds = 2\pi\frac{be}{a}\int_{x'}^{x''} x\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}\,dx = 2\pi\frac{be}{a}\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{e^2}-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C\right\}_{x'}^{x''},$$

mit welchen Werten sich ergiebt

$$\bar{x} = \frac{O\bar{x}}{O} = \frac{2}{3e^2}\times$$

$$\frac{(a^2-e^2x'^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2-e^2x''^2)^{\frac{3}{2}}}{x''\sqrt{a^2-e^2x''^2}-x'\sqrt{a^2-e^2x'^2}+\frac{a^2}{e}\,arc\left(sin=\frac{ex''\sqrt{a^2-e^2x'^2}-ex'\sqrt{a^2-e^2x''^2}}{a^2}\right)}.$$

Für die Abscisse des Schwerpunktes der Fläche des halben Rotationsellipsoides erhalten wir dadurch, indem dann $x'=0$, $x''=a$ ist,

$$\bar{x}=\frac{2}{3}a\frac{1-(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2\sqrt{1-e^2}+e\,arc\,(sin=e)}.$$

5. Dreht sich eine Hyperbel um ihre reelle Axe, so entsteht das Rotationshyperboloid. Welches ist die Abscisse des Schwerpunktes des zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen eingeschlossenen Stückes der Oberfläche und diejenige der Fläche vom Scheitel bis zu einer dieser Ebenen, wenn die Gleichung der erzeugenden Curve $y^2=(e^2-1)(x^2-a^2)$ ist?

Man wird finden

$$\bar{x}=\frac{2}{3e^2}\frac{(e^2x''^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-(e^2x'^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x''\sqrt{e^2x''^2-a^2}-x'\sqrt{e^2x'^2-a^2}-\frac{a^2}{e}l\frac{ex''+\sqrt{e^2x''^2-a^2}}{ex'+\sqrt{e^2x'^2-a^2}}},$$

oder $$\bar{x}=\frac{2}{3}ae\frac{\sqrt{1-e^2}\,(\varDelta^3\varphi''-\varDelta^3\varphi')}{\frac{e\varDelta\varphi''}{sin\,\varphi''}-e\frac{\varDelta\varphi'}{sin\,\varphi'}-\frac{1}{e}l\frac{(1+\varDelta\varphi'')\,sin\,\varphi'}{(1+\varDelta\varphi')\,sin\,\varphi''}},$$

und wenn vom Scheitel ausgegangen wird

$$\bar{x}=\frac{2}{3e^2}\frac{(e^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-a^3(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{e^2x^2-a^2}-a^2\sqrt{e^2-1}-\frac{a^2}{e}l\frac{ex+\sqrt{e^2x^2-a^2}}{a(e+a\sqrt{e^2-1})}},$$

oder $$\bar{x}=\frac{2}{3}ae\frac{\sqrt{e^2-1}\left\{\varDelta^3\varphi-\frac{1}{e^2}(e^2-1)^{\frac{3}{2}}\right\}}{e\frac{\varDelta\varphi}{sin\,\varphi}-\sqrt{e^2-1}-\frac{1}{2}l\frac{e(1+\varDelta\varphi)}{(e+\sqrt{e^2-1})\,sin\,\varphi}},$$

wo $\varDelta\varphi=\sqrt{1-\frac{1}{e^2}sin\,\varphi}$, $sin\,\varphi=\frac{a}{x}$, wie in Aufgabe 8, Abschnitt I dieses Kapitels.

6. Schwerpunkte cycloidischer Oberflächen.

a) Es drehe sich die gemeine Cycloide ACB (Fig. 231, S. 539) um die Axe CX, welche senkrecht auf ihrer Basis AB steht und dieselbe halbiert. Welches ist die Abscisse des Schwerpunktes der zwischen zwei zur Umdrehungsaxe senkrechten Ebenen gelegenen Flächenzone, wenn x', x'' die Abstände ihrer Ebenen vom Scheitel sind und die Gleichung der erzeugenden Curve $y=a\,arc\left(sin\,vers=\frac{x}{a}\right)+\sqrt{2ax-x^2}$ ist?

Aus der Gleichung der die Fläche erzeugenden Curve folgt $ds=\sqrt{\frac{2a}{x}}dx$, so dass

$$\frac{O}{2\pi}=\int_{x'}^{x''}y\,ds=\sqrt{2a}\int_{x'}^{x''}y\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{2a}\,{}_{x'}\left\{2y\sqrt{x}-2\int\sqrt{x}\,dy\right\}^{x''}$$

$$=2\sqrt{2a}\,{}_{x'}\left\{y\sqrt{x}-\int\sqrt{2a-x}\,dx\right\}^{x''}=2\sqrt{2a}\,{}_{x'}\left\{y\sqrt{x}+\frac{2}{3}(2a-x)^{\frac{3}{2}}+C\right\}^{x''}.(1)$$

$$\frac{O\bar{x}}{2\pi}=\int_{x'}^{x''}xy\,ds=\sqrt{2a}\int_{x'}^{x''}y\sqrt{x}\,dx=\sqrt{2a}\,\Big\{\frac{2}{3}xy\sqrt{x}-\frac{2}{3}\int x\sqrt{x}\,dy\Big\}_{x'}^{x''}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2a}\,\Big\{yx\sqrt{x}-\int x\sqrt{2a-x}\,dx\Big\}_{x'}^{x''}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2a}\,\Big\{yx\sqrt{x}-\frac{2}{3}x(2a-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int(2a-x)^{\frac{3}{2}}dx\Big\}_{x'}^{x''}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2a}\,\Big\{yx\sqrt{x}-\frac{2}{3}x(2a-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{15}(2a-x)^{\frac{5}{2}}+C\Big\}_{x'}^{x''}$$

$$=\frac{2\sqrt{2a}}{45}\Big\{15yx\sqrt{x}-10x(2a-x)^{\frac{3}{2}}+4(2a-x)^{\frac{5}{2}}+C\Big\}_{x'}^{x''}. \quad (2)$$

Mit (1) und (2) folgt

$$\bar{x}=\frac{\int_{x'}^{x''}xy\,ds}{\int_{x'}^{x''}y\,ds}=\frac{1}{30}\,\frac{\Big\{15yx\sqrt{x}-10x(2a-x)^{\frac{3}{2}}+4(2a-x)^{\frac{5}{2}}+C\Big\}_{x'}^{x''}}{\Big\{\frac{3}{2}y\sqrt{x}+(2a-x)^{\frac{3}{2}}+C\Big\}_{x'}^{x''}}. \quad (3)$$

Handelt es sich um die durch den Bogen CM erzeugte Fläche, dann ist $x'=0$, $x''=x$, daher mit (3)

$$\bar{x}=\frac{1}{15}\,\frac{15yx\sqrt{x}-10x(2a-x)^{\frac{3}{2}}+4(2a-x)^{\frac{5}{2}}-4(2a)^{\frac{5}{2}}}{3y\sqrt{x}+2(2a-x)^{\frac{3}{2}}-2(2a)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Wird der erzeugende Bogen CM gleich der halben Cycloide CA, so ist $x=2a$, $y=a\pi$, daher mit (4)

$$\bar{x}=\frac{2}{3}a\,\frac{\pi-\frac{8}{15}}{\pi-\frac{4}{3}}.$$

b) Dreht sich der Cycloidenbogen um die Ordinatenaxe, so liegt der Schwerpunkt der erzeugten Fläche auf dieser Linie und ist der Abstand des Schwerpunktes eines zwischen zwei beliebigen, zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen gelegenen Flächenstückes vom Coordinatenursprunge

$$\bar{y}=\int_{x'}^{x''}xy\,ds:\int_{x'}^{x''}x\,ds. \quad (5)$$

Das erste Integral giebt die Gleichung (2), für das zweite erhalten wir

$$\int_{x'}^{x''}x\,ds=\int_{x'}^{x''}x\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx=\sqrt{2a}\int_{x'}^{x''}\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2a}\,(x''\sqrt{x''}-x'\sqrt{x'}), \quad (6)$$

so dass mit (5), (2) und (6)

$$\bar{y} = \frac{1}{15} \frac{{}_{x'}\left\{15\, y\, x \sqrt{x} - 10\, x\, (2\, a - x)^{\frac{3}{2}} + 4\, (2\, a - x)^{\frac{5}{2}} + C\right\}^{x''}}{x'' \sqrt{x''} - x' \sqrt{x'}}. \tag{7}$$

Wenn $x' = 0$, $x'' = x$, dann folgt durch (7)

$$\bar{y} = \frac{1}{15} \frac{15\, y\, x \sqrt{x} - 10\, x\, (2\, a - x)^{\frac{3}{2}} + 4\, (2\, a - x)^{\frac{5}{2}} - 4\, (2\, a)^{\frac{5}{2}}}{x \sqrt{x}}. \tag{8}$$

Ist der erzeugende Bogen CM gleich der halben Cycloide CA, so finden wir mit (8), weil dann $x = 2\, a$, $y = a\, \pi$,

$$\bar{y} = a\left(\pi - \frac{8}{15}\right).$$

c) Es sei die Gleichung der Cycloide mit der Geraden, auf welcher der erzeugende Kreis rollt, als Abscissenaxe $x = a\, arc\left(cos = \frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2\, a\, y - y^2}$.

1) Die Rotationsfläche werde dadurch erzeugt, dass sich die Curve um die Abscissenaxe dreht, dann wird für das zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen gelegene Flächenstück gefunden werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} = \Big[& \sqrt{y''} \left\{ 8\, a^2 + \frac{2}{3}\, a\, y'' - \frac{3}{5}\, y''^2 \right\} - \sqrt{y'} \left\{ 8\, a^2 + \frac{2}{3}\, a\, y' - \frac{3}{5}\, y'^2 \right\} \\ & - a\, (4\, a + y'') \sqrt{2\, a - y''}\, arc\left(cos = \frac{a - y''}{a}\right) + a\, (4\, a + y') \sqrt{2\, a - y'} \\ & \times arc\left(cos = \frac{a - y'}{a}\right)\Big] : \Big[(4\, a + y') \sqrt{2\, a - y'} - (4\, a + y'') \sqrt{2\, a - y''}\Big]. \end{aligned}$$

Entsteht die Rotationsfläche durch den halben Cycloidenbogen, dann ist $y' = 0$, $y'' = 2\, a$, so dass

$$\mathfrak{x} = \frac{26}{15}\, a + \pi\, a.$$

2) Die Rotationsfläche werde dadurch erzeugt, dass der Cycloidenbogen sich um die Ordinatenaxe dreht, dann ergiebt sich für das Flächenstück zwischen zwei zur Ordinatenaxe senkrechten Ebenen

$$\begin{aligned} \mathfrak{y} = \Big[& \left(\frac{8}{3}\, a^2 + \frac{2}{9}\, a y'' - \frac{1}{5}\, y''^2\right) \sqrt{y''} - \left(\frac{8}{3}\, a^2 + \frac{2}{9}\, a\, y' - \frac{1}{5}\, y'^2\right) \sqrt{y'} \\ & - \frac{1}{3}\, a\, (4\, a - y'') \sqrt{2\, a - y''}\, arc\left(cos = \frac{a - y''}{a}\right) + \frac{1}{3}\, a\, (4\, a - y') \sqrt{2\, a - y'} \\ & \times arc\left(cos = \frac{a - y'}{a}\right)\Big] : \Big[\left(2\, a - \frac{1}{3}\, y''\right) \sqrt{y''} - \left(2\, a - \frac{1}{3}\, y'\right) \sqrt{y'} \\ & - a \sqrt{2\, a - y''}\, arc\left(cos = \frac{a - y''}{a}\right) + a \sqrt{2\, a - y'}\, arc\left(cos = \frac{a - y'}{a}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Wird die Fläche zwischen $y' = 0$, und $y'' = 2\, a$ genommen, dann folgt durch das vorstehende Resultat

$$\mathfrak{y} = \frac{26}{15}\, a.$$

3) Die Umdrehungsfläche werde dadurch erzeugt, dass die Curve um eine durch ihren Scheitel gehende, mit der Ordinatenaxe parallele Gerade rotiert. Welches ist die Ordinate des Schwerpunktes eines zwischen zwei auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebenen gelegenen Flächenstückes?

$$\bar{y} = \frac{1}{3} \Big[\pi a (4a + y') \sqrt{2a - y'} + \left(8a^2 + \frac{2}{3} a y' - \frac{3}{5} y'^2\right) \sqrt{y'}$$
$$- (4a + y') \sqrt{2a - y'}\, arc\left(cos = \frac{a - y'}{a}\right) - \pi a (4a + y'') \sqrt{2a - y''}$$
$$- \left(8a^2 + \frac{2}{3} a y'' - \frac{3}{5} y''^2\right) \sqrt{y''} + (4a + y'') \sqrt{2a - y''}\, arc\left(cos = \frac{a - y''}{a}\right) \Big] :$$
$$\Big[\pi a (\sqrt{2a - y'} - \sqrt{2a - y''}) + \left(2a - \frac{1}{3} y'\right) \sqrt{y'} - \left(2a - \frac{1}{3} y''\right) \sqrt{y''}$$
$$+ a \sqrt{2a - y''}\, arc\left(cos = \frac{a - y''}{a}\right) - a \sqrt{2a - y'}\, arc\left(cos = \frac{a - y'}{a}\right) \Big].$$

Wenn die Fläche von $y' = 0$, bis $y'' = 2a$ genommen wird, so ergiebt sich hiermit

$$\bar{y} = \frac{15\pi - 26}{15(3\pi - 4)} a.$$

7. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche, welche erzeugt wird durch die Rotation eines Auges der Curve $r^2 = a^2 cos\, 2\vartheta$ um seine Axe.

Wir haben

$$\bar{x} = \frac{\int x y\, ds}{\int y\, ds} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 sin\,\vartheta\, cos\,\vartheta \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\, sin\,\vartheta \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}},$$

aber weil $r = a\sqrt{cos\, 2\vartheta}$, $dr = -a \frac{sin\, 2\vartheta}{\sqrt{cos\, 2\vartheta}} d\vartheta$, daher $dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = a^2 \frac{d\vartheta^2}{cos\, 2\vartheta}$, so folgt

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\,\vartheta\, cos\,\vartheta \sqrt{cos\, 2\vartheta}\, d\vartheta}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\,\vartheta\, d\vartheta} = \frac{1}{4} a \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^{\frac{3}{2}} 2\vartheta . d(cos\, 2\vartheta)}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} d(cos\,\vartheta)}.$$

$$x = \frac{1}{4} a \frac{\left\{\frac{2}{3} cos^{\frac{3}{2}} 2\vartheta + C\right\}_0^{\frac{\pi}{4}}}{\left\{cos\,\vartheta + C\right\}_0^{\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} a \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6} a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Walton, p. ?0.

Anmerkung. Weitere hierher gehörige Aufgaben findet der Leser in der Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung etc. von L. A. Sohnke.

Vierter Abschnitt.

Schwerpunkte beliebiger, homogener, doppelt gekrümmter Flächen.

1. Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen Teiles einer Kugelfläche, wenn ihre Gleichung ist $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Der Abstand des Schwerpunktes von der Ebene der xy ist allgemein

$$\bar{z} = \frac{\iint z\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+p^2}},$$

im vorliegenden Falle $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, mithin

$$\bar{z} = a\frac{\iint dx\,dy}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

die Integrationen zwischen den gegebenen Grenzen ausgeführt gedacht. Der Nenner dieses Ausdruckes für $\bar{z}$ stellt die Grösse des in Frage stehenden Teiles der Kugelfläche dar, sein Zähler repräsentiert die Grösse der Projektion dieses Flächenstückes auf die Ebene der xy. Daher können wir den Satz aufstellen: „Der Abstand des Schwerpunktes irgend eines Teiles der Fläche einer Kugel, von der Ebene irgend eines ihrer grössten Kreise ist die vierte Proportionale zu der Fläche des Teiles, ihrer Projektion auf diese Ebene und dem Kugelhalbmesser". Die Wahrheit dieses Satzes gründet sich auf die Gleichung

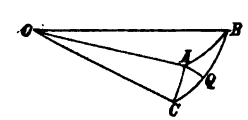
$$z\sqrt{1+p^2+q^2} = a^2,$$

dieselbe bleibt richtig für die ganze Klasse von Oberflächen, welche durch die Bewegung einer Kugel von konstantem Halbmesser, deren Mittelpunkt in der Ebene der xy eine ganz beliebige Curve beschreibt, erzeugt werden. Dadurch gewinnen wir noch den allgemeineren Satz: „Auf irgend einer, durch die Bewegung einer Kugel, deren Mittelpunkt niemals von einer gegebenen Ebene abweicht, erzeugten Fläche sei ein beliebiges Stück O abgegrenzt und O' sei die Projektion dieses Flächenstückes auf die gegebene Ebene, dann ist der Abstand des Schwerpunktes des Flächenstückes O von dieser Ebene die vierte Proportionale zu O, O' und dem Halbmesser der erzeugenden Kugel".

Beispielsweise haben wir hiernach für den Schwerpunkt des achten Teiles der Kugelfläche vom Halbmesser a

$$\bar{z} = \frac{O'}{O} a = \frac{a^2 \frac{\pi}{4}}{a^2 \frac{\pi}{2}} a = \frac{1}{2} a.$$

2. Bestimmung des Schwerpunktes eines durch drei grösste Kreise einer Kugel begrenzten sphärischen Dreieckes.



Figur 250.

Es sei ABC (Fig. 250) ein sphärisches Dreieck, O der Mittelpunkt der zugehörigen Kugelfläche. Ferner seien OA, OB, OC die Halbmesser nach den Ecken A, B, C des Dreieckes, Z_a, Z_b, Z_c die Abstände des Schwerpunktes dieses Dreieckes von den drei Ebenen BOC, COA, AOB. Wenn nun O die Fläche des sphärischen Dreieckes, O' ihre Projektion auf die Ebene BOC und r den Kugelradius bezeichnet, so ist nach dem vorstehenden Lehrsatze

$$Z_a = \frac{O'}{O} r.$$

Die sphärische Trigonometrie sagt, dass

$$O = \frac{\pi r^2}{180} (A + B + C - 180),$$

auch ist klar, dass, wenn a, b, c die den Winkeln A, B, C des Dreieckes ABC gegenüberliegenden Seiten bezeichnen,

$$O' = \text{Fläche } BOC - \text{Fläche } AOB \times \cos B - \text{Fläche } AOC \times \cos C$$
$$= \frac{\pi r^2}{360} (a - c \cos B - b \cos C),$$

daher

$$Z_a = \frac{1}{2} r \frac{a - b \cos C - c \cos B}{A + B + C - 180}.$$

In gleicher Weise finden wir

$$Z_b = \frac{1}{2} r \frac{b - c \cos A - a \cos C}{A + B + C - 180}, \quad Z_c = \frac{1}{2} r \frac{c - a \cos B - b \cos A}{A + B + C - 180}.$$

Die Lage des Schwerpunktes des sphärischen Dreieckes kann auch dargestellt werden durch seine Abstände von den Ebenen dreier grösster Kugelkreise, welche rechtwinkelig zu den Kanten OA, OB, OC der sphärischen Pyramide $ABCO$ sind. Bezeichnen D_a, D_b, D_c diese Distanzen, dann ist

$$D_a = r \frac{O_a}{O}, \quad D_b = r \frac{O_b}{O}, \quad D_c = r \frac{O_c}{O},$$

wobei O die sphärische Fläche ABC ist, O_a, O_b, O_c ihre Projektionen auf die Ebenen der drei zu OA, OB, OC rechtwinkeligen grössten Kreise bezeichnen.

Die Projektionen der sphärischen Fläche ABC und des Sektors BOC auf die Ebene des grössten Kreises, welche senkrecht zu OA ist, sind identisch, so dass, wenn der Bogen AQ senkrecht auf BC steht,

$$O_a = \text{Sektorfläche } BOC \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{AQ}{r}\right)$$

$$= \frac{\pi}{360} a r^2 \sin\frac{AQ}{r} = \frac{\pi}{360} a r^2 \sin B \sin c.$$

Ferner ist

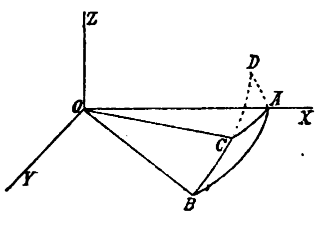
$$O = \frac{\pi r^2}{180}(A + B + C - 180).$$

Damit ergiebt sich

$$D_a = \frac{1}{2} r \frac{a \sin B \sin c}{A + B + C - 180}.$$

In gleicher Weise finden wir

$$D_b = \frac{1}{2} r \frac{b \sin C \sin a}{A + B + C - 180}, \qquad D_c = \frac{1}{2} r \frac{c \sin A \sin b}{A + B + C - 180}.$$



Figur 251.

Soll die Lage des Schwerpunktes des Dreieckes ABC (Fig. 251) durch drei rechtwinkelige Coordinaten ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) bestimmt werden, dann wählen wir die Ebene der Seite c als Ebene der xy, den Halbmesser OA als Axe der x, womit zufolge der vorstehenden Resultate sofort

$$\bar{x} = \frac{1}{2} r \frac{a \sin B \sin c}{A + B + C - 180}, \qquad \bar{z} = \frac{1}{2} r \frac{c - b \cos A - a \cos B}{A + B + C - 180}.$$

Ferner treffe der grösste Kreis, von welchem BC ein Bogen ist, die Ebene der xz in dem Punkte D und es sei AD der die Punkte A, D verbindende grösste Kreis, dann ist klar, dass die Projektion des sphärischen Dreieckes auf die Ebene der xz gleich dem Unterschiede der Projektionen der Sektoren AOC, BOC auf diese Ebene, mithin gleich ist

$$\frac{\pi}{360} r^2 b \cos \sphericalangle CAD - \frac{\pi}{360} r^2 a \cos D = \frac{\pi}{360} r^2 (b \sin A - a \sin B \cos c),$$

folglich ergiebt sich noch, unter Beachtung des obigen Satzes,

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{b \sin A - a \sin B \cos c}{A + B + C - 180}.$$

3. Die allgemeine Formel

$$\bar{z} = \frac{\iint z\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

gewährt uns noch den allgemeinen Satz:

„Auf der Fläche A, erzeugt durch die Gleichgewichtscurve einer homogenen Kettenlinie, welche rotiert um die durch ihren tiefsten Punkt gehende vertikale Gerade, zeichne einen beliebigen, einen Teil O der Fläche A einschliessenden Perimeter, projiziere diesen Perimeter auf eine horizontale Ebene, welche die Rotationsaxe in einer Entfernung c unter dem tiefsten Punkte der Fläche A schneidet, wobei c gleich ist dem Quotienten aus der horizontalen Spannung der Kettenlinie und der Masse ihrer Längeneinheit. Es sei V das Volumen, welches eingeschlossen wird von der Fläche O, ihrer Projektion und der durch die Perpendikel von dem Perimeter der Fläche O auf die Projektionsebene gebildeten Cylinderfläche. Die Höhe des Schwerpunktes der Fläche O über dieser Ebene ist dann gleich der doppelten Höhe des Schwerpunktes von dem Volumen V über dieser Ebene."

Die Ebene, welche die Fläche A in einem Punkte berührt, dessen Abstand von der Projektionsaxe gleich z ist, und die wir als Ebene der xy zu nehmen haben, macht mit dieser Ebene den Winkel $arc\left(cos = \frac{c}{z}\right)$, so dass

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{z}{c},$$

folglich ergiebt sich durch die Formel für $\bar{z}$

$$\bar{z} = \frac{\iint z^2\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}.$$

Nennen wir $\underline{z}$ die Höhe des Schwerpunktes des Volumens V über derselben Ebene, dann ist

$$\underline{z} = \frac{\iint \frac{1}{2}z^2\,dx\,dy}{\iint z\,dx\,dy}.$$

Daraus geht hervor, weil die Integrationsgrenzen in den Ausdrücken für $\bar{z}$ und $\underline{z}$ dieselben sind, dass $\bar{z} = 2\underline{z}$ ist.

Die durch die partielle Differentialgleichung

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{z}{c}$$

dargestellte Eigenschaft ist allen den Flächen gemeinsam, welche erzeugt

sein können durch die Fläche A, wenn sie sich in einer solchen Weise bewegt, dass ihre Axe stets vertikal bleibt und dass einer ihrer Punkte eine willkürliche Curve in einer horizontalen Ebene beschreibt. Der eben erläuterte Satz ist daher derselben Ausdehnung wie derjenige unter 1. fähig.

Die Erläuterung der allgemeinen Gleichungen für die Bestimmung des Schwerpunktes einer beliebigen Fläche, welche unter 1, 2, 3 gegeben wurden, sind einem Aufsatze von Professor Giulio in Turin entlehnt, derselbe kann eingesehen werden in Lionvilles Journal de Mathématiques, Tom IV, p. 386.

4. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes eines Stückes der Fläche des Kegels $y^2 + z^2 = \beta^2 x^2$, das zwischen den Ebenen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ liegt?

$$\bar{x} = \frac{2}{3} a, \quad \bar{y} = \frac{4}{3} \frac{\beta a}{\pi} = \bar{z}.$$

1—4. Walton, p. 31—36.

Anmerkung. Die Bestimmung des Schwerpunktes eines Teiles der Fläche eines elliptischen Paraboloides und eines dreiaxigen Ellipsoides findet der Leser in dem Lehrbuche der analytischen Mechanik von Duhamel, übersetzt von Schlömilch, S. 130—137 des ersten Bandes.

Fünfter Abschnitt.

Schwerpunkte homogener Rotationskörper.

1. Eine Gerade $y = mx + b$ drehe sich um die Abscissenaxe so, dass sie die Fläche eines geraden Kreiskegels erzeugt. Welches ist der Schwerpunkt des Volumens V des zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen gelegenen Kegelstumpfes?

Die Abstände der Begrenzungsebenen von der Ebene der yz seien x', x'', dann ist die Abscisse des Schwerpunktes, welcher auf der Rotationsaxe liegt,

$$\bar{x} = \frac{\pi \int_{x'}^{x''} x y^2 dx}{\pi \int_{x'}^{x''} y^2 dx} = \frac{\int_{x'}^{x''} x y^2 dx}{\int_{x'}^{x''} y^2 dx} = \frac{\int_{x'}^{x''} (mx + b)^2 x dx}{\int_{x'}^{x''} (mx + b)^2 dx}.$$

Die Ausführung dieser einfachen Integrationen giebt

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \frac{(3m^2 x''^2 + 8mbx'' + 6b^2) x''^2 - (3m^2 x'^2 + 8mbx' + 6b^2) x'^2}{(m^2 x''^2 + 3mbx'' + 3b^2) x'' - (m^2 x'^2 + 3mbx' + 3b^2) x'}.$$

Beginnt der Kegelstumpf in der Ebene der yz und nehmen wir seine Höhe gleich h, dann ist zufolge des vorstehenden Resultates, weil dann $x' = 0$, $x'' = h$ ist,

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \frac{3m^2h^2 + 8mbh + 6b^2}{m^2h^2 + 3mbh + 3b^2} h.$$

Bezeichnet noch a den Radius der Grundfläche des Stumpfes, dann ist $m = \frac{a-b}{h}$, so dass auch im letzteren Falle

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\frac{3a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}h.$$

Für den Abstand $\underline{x}$ des Schwerpunktes dieses Stumpfes von seiner Grundfläche ergiebt sich

$$\underline{x} = h - \bar{x} = \frac{1}{4}\frac{a^2 + 2ab + 3b^2}{a^2 + ab + b^2}h.$$

Mit $b = 0$ geht dieser Stumpf in den Rotationskegel von der Höhe h und der Grundfläche $a^2\pi$ über, für ihn geben die beiden letzten Formeln

$$\bar{x} = \frac{3}{4}h, \qquad \underline{x} = \frac{1}{4}h.$$

Mit $m = 0$ wird die Erzeugende der Fläche parallel zur Rotationsaxe, der Kegel geht in einen Kreiscylinder über, a wird gleich b und es ergiebt sich für denselben

$$\bar{x} = \underline{x} = \frac{1}{2}h,$$

d. h. der Schwerpunkt des Volumens eines geraden Kreiscylinders liegt in der Mitte seiner geometrischen Axe.

2. Bestimmung des Schwerpunktes einer Körperzone der Kugel.

Der Mittelpunkt des die Fläche der Zone erzeugenden Kreisbogens sei Coordinatenursprung, so dass seine Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ist; die Abstände der begrenzenden Ebenen vom Coordinatenanfange seien h und h'. Damit ist die Entfernung des auf der Rotationsaxe gelegenen Schwerpunktes vom Kugelmittelpunkte

$$\bar{x} = \frac{\int_h^{h'} xy^2\,dx}{\int_h^{h'} y^2\,dx} = \frac{\int_h^{h'} (a^2 - x^2)x\,dx}{\int_h^{h'} (a^2 - x^2)\,dx} = \frac{3}{4}(h' + h)\frac{2a^2 - (h'^2 + h^2)}{3a^2 - (h'^2 + h'h + h^2)},$$

Für das Kugelsegment ergiebt sich hiermit, weil dann $h' = a$ ist,

$$\bar{x} = \frac{3}{4}\frac{(a+h)^2}{2a + h}.$$

Wenn das Segment eine Halbkugel ist, so geht h in Null über, wodurch für die Halbkugel $\bar{x} = \frac{3}{8}a$.

Lucas Valerius, De Centro Gravitatis Solidorum, Lib. II, Prop. 33 und Lib. III, Prop. 31. Guldin, Centrobaryca, Lib. I, cap. 11, p. 130. Wallis, Opera, Tom. I, p. 728.

3. Bestimmung des Schwerpunktes des durch die Drehung eines Kreissektors um einen seiner äussersten Halbmesser entstandenen Körpers (Kugelsektor).

Es sei β der Winkel zwischen den äussersten Halbmessern des Sektors, a die Länge eines Halbmessers, der Mittelpunkt des Kreises Ursprung der x, dann ist die Abscisse des Schwerpunktes durch die Gleichung gegeben

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\beta \int_0^a r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, dr}{\int_0^\beta \int_0^a r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr}. \tag{1}$$

Aber es ist

$$\int_0^\beta \int_0^a r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr = \frac{1}{3} a^3 \int_0^\beta \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos\beta), \tag{2}$$

$$\int_0^\beta \int_0^a r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, dr = \frac{1}{4} a^4 \int_0^\beta \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta$$
$$= \frac{1}{8} a^4 \int_0^\beta \sin 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{16} a^4 (1 - \cos 2\beta), \tag{3}$$

folglich erhalten wir mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{3}{16} a \frac{1 - \cos 2\beta}{1 - \cos\beta} = \frac{3}{8} a (1 - \cos\beta) = \frac{3}{4} a \cos^2 \frac{\beta}{2}.$$

Wir hätten auch integrieren können zuerst mit Rücksicht auf ϑ und dann bezüglich r. Bei der einen Integrationsweise denken wir uns den Sektor aus einer unendlich grossen Zahl schmaler Dreiecke, von welchen der Mittelpunkt des Kreises gemeinschaftlicher Eckpunkt ist, zusammengesetzt. Bei dem anderen Verfahren denken wir uns den Sektor aus einer unendlich grossen Zahl unangebbar schmaler Ringstücke bestehend, welche in dem Kreismittelpunkte ihr gemeinschaftliches Centrum besitzen.

Wallis, Opera, Tom. I., p. 728. Walton, p. 16.

4. Eine Parabelfläche dreht sich um ihre Axe, dadurch das Rotationsparaboloid erzeugend. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = 2px$. Es soll der Schwerpunkt des Körpers gefunden werden, welcher zwischen zwei zur Abscissenaxe senkrechten Ebenen liegt, die um die Strecken x', x'' vom Coordinatenursprunge entfernt sind.

Der Inhalt des Rotationskörpers ist

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} y^2 \, dx = 2\pi p \int_{x'}^{x''} x \, dx = \pi p (x''^2 - x'^2), \tag{1}$$

das Moment dieses Volumens bezüglich der Ebene der yz ist

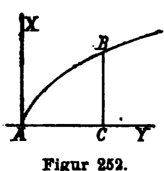
$$V\bar{x} = \pi \int_{x'}^{x''} x y^2 \, dx = 2\pi p \int_{x'}^{x''} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi p (x''^3 - x'^3). \tag{2}$$

Die Abscisse des auf der Rotationsaxe liegenden Schwerpunktes ist daher mit (1) und (2)

$$\bar{x} = \frac{V\bar{x}}{V} = \frac{2}{3} \frac{x''^3 - x'^3}{x''^2 - x'^2} = \frac{2}{3} \frac{x'^2 + x'x'' + x''^2}{x' + x''}.$$

Mithin erhalten wir für ein Rotationsparaboloid von der Höhe h, weil dann $x' = 0$, $x'' = h$,

$$\bar{x} = \frac{2}{3} h.$$



Figur 252.

5. Ein Körper wird durch die Rotation der parabolischen Fläche ABC (Fig. 252) um die Tangente AX in ihrem Scheitel erzeugt, die Gerade BC ist senkrecht zu der Parabelaxe AY. Welches ist die Abscisse seines Schwerpunktes?

Die Gleichung der Curve ist mit AX, AY als Coordinatenaxen $x^2 = 4my$, so dass, wenn AC mit a, BC mit b bezeichnet wird,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b \int_y^a xy\,dx\,dy}{\int_0^b \int_y^a y\,dx\,dy} = \frac{\int_0^b (a^2 - y^2)\,x\,dx}{\int_0^b (a^2 - y^2)\,dx} = 2\sqrt{m}\,\frac{\int_0^a (a^2 - y^2)\,dy}{\int_0^a (a^2 y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}})dy}$$

$$= 2\sqrt{m}\,\frac{a^3 - \frac{1}{3}a^3}{2a^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}}} = \frac{5}{6}\sqrt{am} = \frac{5}{12}b.$$

Dieses ist ein Spezialfall eines allgemeineren, von Carré gegebenen Problemes, Mésure des Surfaces &c., p. 93.

Walton, p. 17.

6. Bestimmung des Schwerpunktes einer Körperzone eines Rotationsellipsoides, welches erzeugt ist durch die Drehung der Ellipsenfläche um ihre grosse Axe, wenn die Gleichung der Curve $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist und die zur Rotationsaxe senkrechten Begrenzungsebenen vom Coordinatenursprunge um die Strecken x', x'' entfernt sind.

Mit $x = a\cos\varphi$ wird zufolge der Gleichung der Ellipse $y = b\sin\varphi$, so dass das Volumen der Körperzone

$$V = \pi\int_{x'}^{x''} y^2\,dx = -\pi a b^2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin^3\varphi\,d\varphi$$

$$= -\pi a b^2 \left\{ -\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi + C \right\}_{\varphi'}^{\varphi''}$$

$$= \frac{\pi a b^3}{3}\left\{ \sin^2\varphi''\cos\varphi'' + 2\cos\varphi'' - \sin^2\varphi'\cos\varphi' - 2\cos\varphi' \right\}. \quad (1)$$

Das Moment dieses Volumens bezüglich der Ebene der yz ist

$$V\bar{x} = \pi\int_{x'}^{x''} xy^2\,dx = -\pi a^2 b^2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= -\frac{\pi a^2 b^2}{8}\left\{ \frac{1}{4}\cos 4\varphi - \cos 2\varphi + C \right\}_{\varphi'}^{\varphi''}$$

$$= \frac{\pi a^2 b^2}{32}\left\{ \cos 4\varphi' - \cos 4\varphi'' - 4(\cos 2\varphi' - \cos 2\varphi'') \right\}. \quad (2)$$

Durch (1) und (2) ergiebt sich

$$\bar{x} = \frac{V\bar{x}}{V} = \frac{3}{32} a \frac{\cos 4\varphi' - \cos 4\varphi'' - 4(\cos 2\varphi' - \cos 2\varphi'')}{(\sin^2\varphi'' + 2)\cos\varphi'' - (\sin^2\varphi' + 2)\cos\varphi'}. \quad (3)$$

Für das halbe Ellipsoid ist $x' = 0$, $x'' = a$, dem entsprechend $\varphi' = \frac{\pi}{2}$, $\varphi'' = 0$, so dass mit (3)

$$\bar{x} = \frac{3}{8} a.$$

Haben wir von der Gleichung der Ellipse $y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$ auszugehen, dann ist

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} y^2\, dx = \pi(1 - e^2) \int_{x'}^{x''} (a^2 - x^2)dx = \pi(1 - e^2) \Big\{ a^2 x - \frac{x^3}{3} + C \Big\}_{x'}^{x''}, \quad (1')$$

$$V\bar{x} = \pi \int_{x'}^{x''} xy^2 dx = \pi(1 - e^2) \int_{x'}^{x''} (a^2 - x^2) x dx = \pi(1 - e^2) \Big\{ a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \Big\}_{x'}^{x''}, \quad (2')$$

so dass mit (1') und (2')

$$\bar{x} = \frac{V\bar{x}}{V} = \frac{3}{4} \frac{(2a^2 - x''^2 - x'^2)(x'' + x')}{3a^2 - (x''^2 + x''x' + x'^2)}.$$

Damit ergiebt sich für das halbe Ellipsoid, weil in diesem Falle $x' = 0$, $x'' = a$ ist, $\bar{x} = \frac{3}{8} a$.

8. Dreht sich die Fläche einer Ellipse um ihre kleine Axe, dann entsteht das abgeplattete Sphäroid. Welches ist die Ordinate des Schwerpunktes einer Zone dieses Körpers, wenn die Gleichung der Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ ist?

Setzen wir wie vorhin $x = a\cos\varphi$, so ist $y = b\sin\varphi$, $dy = b\cos\varphi\, d\varphi$, wodurch wir erhalten

$$V = \pi \int_{y'}^{y''} x^2 dy = \pi a^2 b \int_{\varphi'}^{\varphi''} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{\pi a^2 b}{3} \Big\{ \cos^2\varphi \sin\varphi + 2\sin\varphi + C \Big\}_{\varphi'}^{\varphi''}, \quad (1)$$

$$V\bar{y} = \pi \int_{y'}^{y''} x^2 y\, dy = \pi a^2 b^2 \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{\pi a^2 b^2}{8} \Big\{ \frac{1}{4} \cos 4\varphi + \cos 2\varphi + C \Big\}_{\varphi'}^{\varphi''}. \quad (2)$$

Daher ist mit (1) und (2)

$$\bar{y} = \frac{V\bar{y}}{V} = \frac{3}{32} b \frac{\cos 4\varphi' - \cos 4\varphi'' + 4(\cos 2\varphi' - \cos 2\varphi'')}{(\cos^2\varphi'' + 2)\sin\varphi'' - (\cos^2\varphi' + 2)\sin\varphi'}.$$

Für die Hälfte des abgeplatteten Sphäroides ergiebt sich hierdurch, weil dann $y' = 0$, $y'' = b$, also $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \frac{\pi}{2}$, $\bar{y} = \frac{3}{8} b$.

9. Dreht sich eine Hyperbelfläche um ihre reelle Axe, dann beschreibt sie zwei getrennte Körper, die Hyperboloide genannt werden.

Welches ist die Abscisse des Schwerpunktes einer Zone eines solchen Hyperboloides, wenn die Gleichung der Curve $a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$ ist?

Im vorliegenden Falle haben wir

$$V = \pi\int_{x'}^{x''} y^2 dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\int_{x'}^{x''}(x^2 - a^2)dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{x^3}{3} - a^2x + C\right\}_{x'}^{x''},$$

$$V\bar{x} = \pi\int_{x'}^{x''} xy^2\,dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\int_{x'}^{x''}(x^2 - a^2)x\,dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{x^4}{4} - a^2\frac{x^2}{2} + C\right\}_{x'}^{x''},$$

so dass $$\bar{x} = \frac{V\bar{x}}{V} = \frac{3}{4}\,\frac{(x'' + x')(x''^2 + x''x' + x'^2)}{x''^2 + x''x' + x'^2 - 3a^2}.$$

Damit ergiebt sich für das Rotationshyperboloid von der Höhe h, weil dann $x' = a$, $x'' = a + h$ ist,

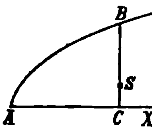
$$\bar{x} = \frac{3}{4}\,\frac{(2a + h)^2}{3a + h}.$$

10. Welches ist die Abscisse des Schwerpunktes des Körpers, der erzeugt ist durch die Rotation der Fläche der Parabel $y^{m+n} = a^m x^n$ um die Axe der x, von $x = 0$ bis $x = b$?

$$x = \frac{m + 3n}{2m + 4n}\,b.$$

11. Es soll bestimmt werden der Schwerpunkt des Stückes eines Paraboloides zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen, wenn a und b die Halbmesser der kleineren und der grösseren ebenen Begrenzungsflächen sind, h die Länge des Körperstückes und x der Abstand des Schwerpunktes von der kleineren ebenen Begrenzungsfläche ist.

$$x = \frac{1}{3}\,\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}\,h.$$



Figur 253.

12. ABC (Fig. 253) ist ein Teil der Fläche einer gemeinen Parabel, die gerade Linie BC steht senkrecht auf der Parabelaxe AX. Welches ist die Lage des Schwerpunktes des durch die Rotation der Fläche ABC um BC entstehenden Körpers?

Es sei $BC = b$, S auf BC der verlangte Schwerpunkt, dann ist

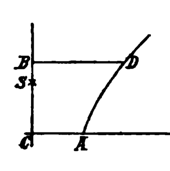
$$CS = \frac{5}{16}\,b.$$

Carré, Mésure des Surfaces & c., p. 90.

13. Welches ist die Schwerpunktsabscisse eines Hyperboloides, wenn die Gleichung der erzeugenden Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$ ist, für das Volumen zwischen $x = 0$ und $x = c$?

$$x = \frac{8ac + 3c^2}{4(3a + c)}.$$

Carré, Ibid., p. 97.



Figur 254.

14. AC, BC (Fig. 254) sind die Halbaxen einer Hyperbel, AD ist ein Stück der Curve, $BD \perp BC$. Es soll der Schwerpunkt S des Körpers gefunden werden, welcher durch die Rotation der Fläche $ACBD$ um BC erzeugt wird.

Wenn $BC = b$, S die Lage des Schwerpunktes in BC ist, dann wird gefunden

$$CS = \frac{9}{16} b.$$

Carré, Ibid., p. 97.
10—14. Walton, p. 18—19.

15. Es soll bestimmt werden der Schwerpunkt des Körpers, welcher erzeugt wird durch die Rotation der Curve $y = (a - x)\left(\frac{x}{a}\right)^2$ um die Axe der x, 1) zwischen den Grenzen $x' = 0$, $x'' = x$, 2) zwischen $x' = 0$ und $x'' = a$.

$$1)\ \bar{x} = \frac{140\,a^2 x - 240\,a\,x^2 + 105\,x^3}{168\,a^2 - 280\,a\,x + 120\,x^2}, \qquad 2)\ \bar{x} = \frac{5}{8} a.$$

16. Man soll den Schwerpunkt des Körpers bestimmen, welcher durch Drehung der Fläche der Cardioide um die Abscissenaxe entsteht, wenn die Gleichungen der Curve sind

$$x = a\,(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi), \qquad y = a\,(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi),$$
$$\bar{x} = -\frac{2}{3} a.$$

17. Bestimme den Schwerpunkt des Körpers, welcher begrenzt wird von der Fläche eines geraden Kreiskegels und derjenigen eines Rotationsparaboloides, wobei die Basen und Scheitel beider Flächen zusammenfallen.

Der Schwerpunkt halbiert die Axe.

18. Bestimme die Lage des Schwerpunktes des Volumens, welches eingeschlossen wird von den Rotationsparaboloiden mit den Parabeln $y^2 = l\,x$, $y^2 = l'\,(a - x)$, deren gemeinschaftliche Axe der x Rotationsaxe ist.

$$\bar{x} = \frac{1}{3} a \frac{l + 2l'}{l + l'}.$$

17 und 18. Walton, p. 19.

Anmerkung. Weitere hierher gehörige Aufgaben findet der Leser in der Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung etc. von L. A. Sohnke.

Sechster Abschnitt.

Schwerpunkte beliebiger, homogener Körper.

1. Der Schwerpunkt einer homogenen Pyramide liegt auf der ihre Spitze und den Schwerpunkt ihrer Grundfläche verbindenden Geraden und

ist um Dreiviertel dieser Linie von der Spitze oder um Einviertel derselben von dem Schwerpunkte der Basis entfernt.

Denken wir uns die Pyramide aus unendlich vielen, unendlich dünnen, zu ihrer Basis parallelen Scheiben zusammengesetzt, so sind diese Scheiben einander ähnlich, ihre Schwerpunkte liegen in einer geraden Linie, welche die Spitze und den Schwerpunkt der Grundfläche verbindet, wodurch diese Linie Schwerlinie des Volumens ist. Die Flächeninhalte dieser Scheiben sind den in ihren Flächenmittelpunkten angreifenden Kräften direkt proportional, welche sich dadurch, von der Spitze ausgehend, verhalten wie die Quadrate der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, d. i. wie $1:4:9:16:\ldots\ldots:n^2$. Ist p die Kraft an der ersten Scheibe, dann sind die an der Schwerlinie wirkenden, aufeinander folgenden Kräfte p, $4p$, $9p$, $16p, \ldots n^2 p$, folglich muss sein, wenn a die Länge dieser Linie ist,

$$x = \frac{p\frac{a}{n} + 4p\frac{2a}{n} + 9p\frac{3a}{n} + \ldots + n^2 p\, a}{p + 4p + 9p + \ldots + n^2 p},$$

$$x = \frac{a}{n}\,\frac{1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2} = \frac{a}{n}\,\frac{\Sigma n^3}{\Sigma n^2} = \frac{3}{2}\,a\,\frac{n+1}{2n+1}.$$

Nehmen wir nun n unendlich gross, dann wird $\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$, mithin für die homogene Pyramide

$$x = \frac{3}{4}a$$

Eine durch den Schwerpunkt der Pyramide gelegte, zu ihrer Basis parallele Ebene teilt offenbar auch ihre Höhenlinie h in demselben Verhältnisse wie die Verbindungslinie der Spitze und des Schwerpunktes der Basis, daher: „Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in einem normalen Abstande von ihrer Grundfläche, welcher gleich dem vierten Teile ihrer Höhe ist“.

2. Bestimmung des Schwerpunktes eines geraden Pyramidenstumpfes.

Es sei f_1 der Inhalt der Grundfläche, f_2 derjenige der Abstumpfungsfläche, h die Höhe des Stumpfes. Die Spitze der Ergänzungspyramide wählen wir als Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die Abscissenaxe senkrecht zur Grundfläche. Bezeichnet x' die Höhe der Ergänzungspyramide, x'' diejenige der ganzen Pyramide, so besteht die Proportion

$$f_1 : f_2 = x''^2 : x'^2 = (x' + h)^2 : x'^2, \text{ folglich ist } x' = \frac{\sqrt{f_2}}{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}\,h,$$

$x'' = x' + h = \frac{\sqrt{f_1}}{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}\,h.$ Der Inhalt f eines Querschnittes der Pyramide im Abstande x von der Spitze ist $f = f_1\,\frac{x^2}{x''^2} = \left(\frac{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}{h}\,x\right)^2$, daher ist das Volumenelement des Körpers $\left(\frac{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}{h}\,x\right)^2 dx$, mithin das Volumen des Pyramidenstumpfes

$$V = \left(\frac{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}{h}\right)^2 \int_{x'}^{x''} x^2\, dx = \frac{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2}{3h^2} \left\{ \frac{h^3 \sqrt{f_1}^3}{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^3} - \frac{h^3 \sqrt{f_2}^3}{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^3} \right\} = \frac{\sqrt{f_1}^3 - \sqrt{f_2}^3}{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}} \frac{h}{3} = (f_1 + \sqrt{f_1 f_2} + f_2) \frac{h}{3}.$$

Ferner ist das Moment dieses Volumens für die Ebene der $y\,z$ als Momentenebene

$$V \bar{x} = \left(\frac{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}{h}\right)^2 \int_{x'}^{x''} x^3\, dx = \left(\frac{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}{2h}\right)^2 \frac{f_1^2 - f_2^2}{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^4} h^4$$
$$= \frac{f_1^2 - f_2^2}{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2} \frac{h^2}{4}.$$

Demnach ist der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze der Ergänzungspyramide

$$\bar{x} = \frac{3(f_1^2 - f_2^2)}{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 (f_1 + \sqrt{f_1 f_2} + f_2)} \frac{h}{4}$$
$$= \frac{3(f_1 + f_2)(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2})}{(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})(f_1 + \sqrt{f_1 f_2} + f_2)} \frac{h}{4}.$$

Bezeichnet nun $\underline{x}$ den Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche, so ist

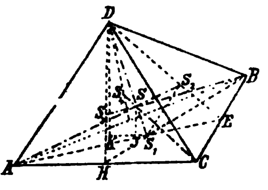
$$\underline{x} = x'' - \bar{x} = \frac{\sqrt{f_1}}{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}} h - \bar{x}, \qquad \underline{x} = \frac{f_1 + 2\sqrt{f_1 f_2} + 3 f_2}{f_1 + \sqrt{f_1 f_2} + f_2} \frac{h}{4}.$$

Weil nun der Schwerpunkt auf der die Schwerpunkte der Grundfläche und der Abstumpfungsfläche verbindenden Geraden liegt, so giebt der Schnittpunkt einer im Abstande $\underline{x}$ von der Grundfläche zu ihr parallel gelegten Ebene mit dieser Linie den Schwerpunkt selbst. Mit $f_2 = 0$ wird auch $x' = 0$, der Stumpf geht in eine Pyramide von der Höhe h über, für welche $\bar{x} = \frac{3}{4} h$, $\underline{x} = \frac{1}{4} h$ ist. Werden die Flächen f_1 und f_2 einander gleich, dann verwandelt sich der Pyramidenstumpf in ein Prisma, für diesen Körper ist $\bar{x} = \underline{x} = \frac{1}{2} h$, d. h. sein Schwerpunkt liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte seiner parallelen Grundflächen.

Die hier erhaltenen Resultate gelten auch für den geraden Kegelstumpf, den Kegel und den geraden Cylinder, denn die drei letzten Körper sind nur besondere Arten der drei ersten.

3. Werden bei einer dreiseitigen Pyramide die Schwerpunkte der Seitenflächen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten durch gerade Linien

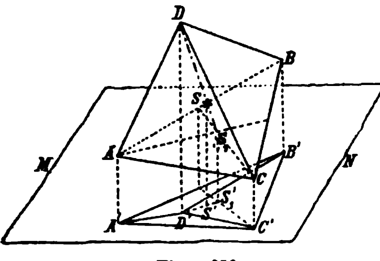
verbunden, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte, dem Schwerpunkte des Körpers, und teilen sich in dem Verhältnisse 1 : 3.



Figur 255.

Jede dieser Linien ist nach 1 eine Schwerlinie des Körpers. Es sei $ABCD$ (Fig. 255) die gegebene dreiseitige Pyramide. Halbiere BC in E, ziehe AE, DE, mache $AS_1 = \frac{2}{3} AE$, $DS_2 = \frac{2}{3} DE$, alsdann sind S_1, S_2 die Flächenmittelpunkte der Seitenflächen ABC, BCD. Nun ziehe $S_1 D$, $S_2 A$, so sind diese Linien Schwerlinien des Körpers, sie liegen in der Ebene AED, schneiden sich folglich in dem Schwerpunkte S des Volumens. Ist ferner DH die nach dem Halbierungspunkte von AC gezogene Gerade, $HS_3 = \frac{1}{3} HD$, so ist $S_3 B$ eine weitere Schwerlinie des Körpers, welche mit der Linie DS_1 in einer Ebene liegt. Nun ist die Gerade $S_1 S_2 \parallel AD$, weil $AS_1 : S_1 E = DS_2 : S_2 E = 2 : 1$, also $\triangle ADS \sim \triangle S_2 S_1 S$, folglich muss $AD : S_1 S_2 = DS : S_1 S$ sein, und weil $AD : S_1 S_2 = 3 : 1$, also auch $DS : S_1 S = 3 : 1$, ist mithin $\frac{DS + S_1 S}{S_1 S} = \frac{4}{1}$, womit $S_1 S = \frac{1}{4} \cdot DS_1$ sich ergiebt. Weiter ist auch $S_1 S_3 \parallel BD$ u. s. f., womit wieder folgt $S_1 S = \frac{1}{4} . DS_1$, so dass sich die drei Schwerlinien DS_1, AS_2, BS_3 wirklich in einem Punkte S schneiden, durch welchen auch die vierte Schwerlinie CS_4 aus demselben Grunde geht. Werden noch von S und D die Perpendikel SJ, DK auf die Grundfläche ABC herabgelassen, dann sind die Dreiecke DKS_1 und SJS_1 ähnlich, wodurch, wenn $h = DK =$ der zur Grundfläche ABC gehörigen Höhe der Pyramide, $SJ = \frac{S_1 S}{DS_1} DK = \frac{1}{4} h$ folgt. Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide ist mithin um den vierten Teil ihrer Höhe von der zugehörigen Grundfläche entfernt.

4. Beweise, dass der Abstand des Schwerpunktes einer dreiseitigen Pyramide von einer beliebigen, ausserhalb ihr gelegenen Ebene gleich dem vierten Teile der Summe aus den Abständen ihrer Ecken von dieser Ebene ist.



Figur 256.

Es sei $ABCD$ (Fig. 256) die gegebene Pyramide, MN die gegebene Ebene, S_1 der Schwerpunkt der Grundfläche ABC, S derjenige des Volumens der Pyramide. Von den Eckpunkten des Körpers, den Punkten S_1 und S fälle die Lote $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $DD' = d$, $S_1 S'_1 = z$ und $SS' = \mathfrak{z}$ auf die Ebene MN, dann ist $\mathfrak{z} = z + \frac{1}{4}(d - z) = \frac{3}{4} z + \frac{1}{4} d$, so dass, weil

$$z = \frac{a + b + c}{3}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{3}{4} \frac{a + b + c}{3} + \frac{1}{4} d = \frac{a + b + c + d}{4},$$

d. h. der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide ist zugleich Schwerpunkt von vier gleich schweren Gewichten, die in den Eckpunkten derselben angebracht sind.

5. Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunktes eines beliebigen Polyeders.

Ist $OABCD\ldots$ das gegebene Polyeder, seine Ecke O Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, bezeichnen wir die Coordinaten der Eckpunkte $A, B, C, \ldots$ mit $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \ldots$, zerlegen dasselbe von O aus durch Ebenen in lauter dreiseitige Pyramiden $ABCO, BCDO, \ldots$, bezeichnen die Volumina dieser Pyramiden mit $V_1, V_2, V_3, \ldots$, die Coordinaten ihrer Schwerpunkte mit $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3), \ldots$, dann wird sein

$$V_1 = \pm\frac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$

$$V_2 = \pm\frac{1}{6}(x_2 y_3 z_4 + x_3 y_4 z_2 + x_4 y_2 z_3 - x_2 y_4 z_3 - x_3 y_2 z_4 - x_4 y_3 z_2), \text{ u. s. f.}$$

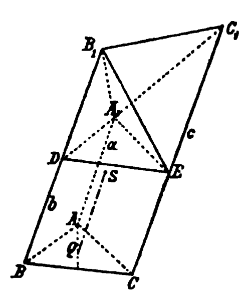
$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \quad v_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \quad w_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad v_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad w_2 = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{4} \text{ u. s. f.}$$

Damit ergeben sich die Coordinaten (u, v, w) des Schwerpunktes des Polyeders durch die Formeln

$$u = \frac{V_1 u_1 + V_2 u_2 + V_3 u_3 + \cdots}{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots}, \qquad v = \frac{V_1 v_1 + V_2 v_2 + V_3 v_3 + \cdots}{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots},$$

$$w = \frac{V_1 w_1 + V_2 w_2 + V_3 w_3 + \cdots}{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots}.$$



Figur 257.

6. Bestimmung des Schwerpunktes eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas mit den Kantenlängen $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ (Fig. 257) und der Neigung der Kanten unter dem Winkel α zu der Grundfläche ABC.

Legen wir durch den Endpunkt A_1 der kleinsten Kante eine zur Grundfläche ABC parallele Ebene, so zerfällt der Körper in das dreiseitige Prisma $ABCDEA_1$ und in die vierseitige Pyramide $EDB_1C_1A_1$, letztere lässt sich durch die Ebene EB_1A_1 in die dreiseitigen Pyramiden EDB_1A_1 und $EC_1B_1A_1$ zerlegen. Ein durch das Prisma gelegter Normalschnitt habe die Seiten p, q, r, die zugehörigen Höhen h_1, h_2, h_3, so dass p die Normalentfernung der Kanten BB_1 und CC_1, h_1 der Abstand der Kante AA_1 von der Ebene CBB_1C_1, q der Abstand der Kante AA_1 von der Kante CC_1, h_2 derjenige der Kante BB_1 von der Ebene CAC_1A_1 ist u. s. f.

Mit ABC als Momentanebene ist nun

$$\text{Moment des Prismas } ABCEDA_1 = \frac{p\,h_1}{2}\,\frac{a^2 \sin\alpha}{2}, \tag{I}$$

$$\text{" der Pyramide } EDB_1A_1 = \frac{p\,h_1(b-a)}{6}\,\frac{(3a+b)\sin\alpha}{4}, \tag{II}$$

$$\text{" " " } EC_1B_1A_1 = \frac{p\,h_1(c-a)}{6}\,\frac{(2a+b+c)\sin\alpha}{4}. \tag{III}$$

Hiermit ergiebt sich, da das Volumen des schiefen Prismas $V=\frac{1}{6}p\,h_1 \times(a+b+c)$ ist, für den Abstand $\bar{z}$ des Schwerpunktes S des gegebenen Körpers von der Grundfläche $A\,B\,C$

$$\bar{z}=\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{V},\qquad \bar{z}=\frac{1}{4}\frac{a^2+b^2+c^2+a\,b+a\,c+b\,c}{a+b+c}\sin\alpha.$$

Ist $\bar{x}_1$ der Abstand des Schwerpunktes S von der Ebene $C\,B\,B_1\,C_1$, so ist, weil mit dieser Ebene als Momentanebene

$$\text{Moment des Prismas } A\,B\,C\,E\,D\,A_1=\frac{p\,h_1}{2}\frac{a\,h_1}{3}$$

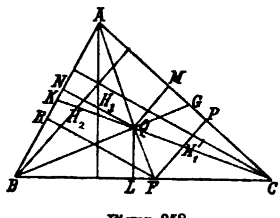
$$\text{„ der Pyramide } E\,D\,B\,C_1\,A_1=\frac{b-a+c-a}{2}\,p\,\frac{h_1}{3}\frac{h_1}{4},$$

$$\bar{x}_1=\frac{h_1}{4}\frac{2\,a+b+c}{a+b+c}.$$

Sind ferner $\bar{x}_2, \bar{x}_3$ die Entfernungen des Schwerpunktes S von den Ebenen $C\,A\,A_1\,C_1$, $A\,B\,B_1\,A_1$, dann ergiebt sich durch entsprechende Zerlegung

$$\bar{x}_2=\frac{h_2}{4}\frac{a+2\,b+c}{a+b+c},\qquad \bar{x}_3=\frac{h_3}{4}\frac{a+b+2\,c}{a+b+c}.$$

Ziehen wir von dem Schwerpunkte S des schief abgeschnittenen Prismas eine Parallele zu seinen Kanten nach der Grundfläche $A\,B\,C$, dann schneidet diese Linie die genannte Fläche in einem gewissen Punkte Q (Fig. 258). Werden in dem Dreiecke $A\,B\,C$ die Geraden $A\,Q\,F$, $B\,Q\,G$, $C\,Q\,K$, die Höhen H_1, H_2, H_3 gezeichnet, von Q die Perpendikel $Q\,L$, $Q\,M$, $Q\,N$ auf die Dreiecksseiten $B\,C$, $A\,C$, $A\,B$ gefällt und die Linien $F\,P$, $F\,R$ parallel $Q\,M$, $Q\,N$ gemacht, so ist offenbar



Figur 258.

$$h_1:\bar{x}_1=A\,F:Q\,F=H_1:Q\,L,\qquad h_2:\bar{x}_2=B\,G:Q\,G=H_2:Q\,M,$$
$$h_3:\bar{x}_3=C\,K:Q\,K=H_3:Q\,N,$$

woraus folgt

$$Q\,L=\frac{H_1}{4}\frac{2\,a+b+c}{a+b+c},\quad Q\,M=\frac{H_2}{4}\frac{a+2\,b+c}{a+b+c},\quad Q\,N=\frac{H_3}{4}\frac{a+b+2\,c}{a+b+c}.$$

Damit ist der Punkt Q in der Grundfläche $A\,B\,C$ der Lage nach bestimmt, er fällt mithin nicht mit dem Schwerpunkte der Grundfläche zusammen. Weiter ist $A\,F:Q\,F=H_1:Q\,L$, also auch

$$\frac{A\,Q}{F\,Q}=\frac{2\,a+3\,b+3\,c}{2\,a+b+c}.$$

Daher ist Q der Schwerpunkt zweier Gewichte, welche in A und F wirksam und den Ausdrücken $(2\,a+3\,b+3\,c)$ und $(2\,a+b+c)$ direkt proportional sind.

Um das Verhältnis $BF:CF$ noch zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass

$$BC:FC = H_2:FP, \quad QM:FP = AQ:AF = (H_1 - QL):H_1,$$

womit

$$FC = \frac{H_1}{H_2}\frac{QM}{H_1 - QL}BC,$$

$$BC:FB = H_3:FR, \quad QN:FR = AQ:AF = (H_1 = QL):H_1,$$

womit

$$FB = \frac{H_1}{H_3}\frac{QN}{H_1 - QL}BC,$$

daraus folgt

$$\frac{BF}{CF} = \frac{H_2}{H_3}\frac{QN}{QM} = \frac{a+b+2c}{a+2b+c}.$$

Demnach ist F der Schwerpunkt zweier Gewichte, die in den Punkten B und C angreifen und den Ausdrücken $(a+b+2c)$ und $(a+2b+c)$ direkt proportinal sind.

Damit ergiebt sich: Q ist der Schwerpunkt von drei in den Eckpunkten A, B, C der Grundfläche des Prismas angreifenden Gewichten, welche den Ausdrücken $(2a+b+c)$, $(a+2b+c)$, $(a+b+2c)$ direkt proportional sind. Der Punkt Q ist also nicht Schwerpunkt der Grundfläche ABC und die Linie SQ fällt nicht mit der Flächenschwerpunktsaxe des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas zusammen.

Ad. Wernicke, Lehrbuch der Mechanik.

7. Bestimmung des Schwerpunktes eines ellipsoidischen Ausschnittes.

Die Gleichung des dreiaxigen Ellipsoides ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

der auf der Axe der x senkrechte Durchschnitt im Abstande x vom Coordinatenursprunge, d. i. von dem Mittelpunkte des Ellipsoides ist eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

ihre Halbaxen sind $b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, so dass ihre Fläche $F = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Die Abscisse des Schwerpunktes, welcher offenbar auf der Axe der x liegt, ist mithin

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x xF\,dx}{\int_0^x F\,dx} = \frac{\int_0^x \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x\,dx}{\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2}}{x - \frac{x^3}{3a^2}}, \quad \bar{x} = \frac{3}{4}\frac{2a^2x - x^3}{3a^2 - x^2}.$$

8. Bestimmung des Schwerpunktes des achten Teiles des Volumens einer Kugel.

Die Gleichung der Kugelfläche ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Mit $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z' = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ist die Abscisse des Schwerpunktes

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^{y'} \int_0^{z'} x\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a \int_0^{y'} \int_0^{z'} dx\,dy\,dz}. \tag{1}$$

Nun haben wir

$$\int_0^a \int_0^{y'} \int_0^{z'} dx dy dz = \int_0^a \int_0^{y'} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{6}\pi a^3, \tag{2}$$

$$\int_0^a \int_0^{y'} \int_0^{z'} x\,dx\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^{y'} x \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

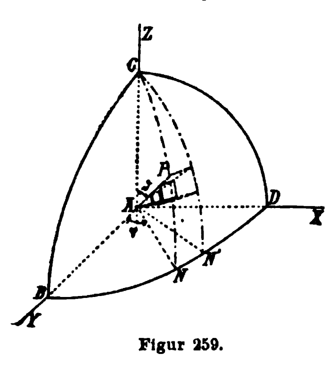
$$= \frac{\pi}{4} \int_0^a x(a^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{16}\pi a^4. \tag{3}$$

Daher erhalten wir mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{16}\pi a^4}{\frac{1}{6}\pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

In gleicher Weise ergiebt sich $\bar{y} = \frac{3}{8} a$, $\bar{z} = \frac{3}{8} a$.

Diese Aufgabe lässt sich eben so leicht durch Anwendung eines Polarcoordinatensystemes lösen.



Figur 259.

Es sei $ABCD$ (Fig. 259) der gegebene Körper, A Ursprung der Coordinaten, AX, AY, AZ seien die auf einander senkrechten Coordinatenaxen, P sei ein Volumenelement, $\measuredangle CAP = \vartheta$, $AP = r$, $\measuredangle BAN = \varphi$. Aus der Figur ergiebt sich sofort, dass die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Volumenelementes P gleich dr, $r\,d\vartheta$, $r \sin\vartheta\,d\varphi$ sind, also ist das Volumen dieses unendlich kleinen Parallelopipedons $= r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$. Ferner ist offenbar $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r \cos\vartheta$, folglich sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\bar{x} = \frac{\int\int\int r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}{\int\int\int r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}, \quad \bar{y} = \frac{\int\int\int r^3 \sin^2\vartheta \sin\varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}{\int\int\int r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi},$$

$$\bar{z} = \frac{\int\int\int r^3 \sin^2\vartheta \cos\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}{\int\int\int r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}.$$

Indem wir diese Formeln auf unsere Aufgabe anwenden, erhalten wir

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi \, d\varphi \, d\vartheta \, dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr}. \tag{1}$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^3\pi}{6}, \tag{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \cos\varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{1}{4}\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{16}a^4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{16}a^4\pi. \tag{3}$$

Mit (1), (2) und (3) ergiebt sich jetzt

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{16}a^4\pi}{\frac{1}{6}a^3\pi} = \frac{3}{8}a.$$

In gleicher Weise erhalten wir $\bar{y} = \frac{3}{8}a$, $\bar{z} = \frac{3}{8}a$.

9. Bestimmung des Schwerpunktes des achten Teiles des Volumens eines dreiaxigen Ellipsoides.

Die Gleichung der Fläche dieses Körpers ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Abscisse des Schwerpunktes des gegebenen Volumens ist mit $y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a\int_0^{y'}\int_0^z x \, dx \, dy \, dz}{\int_0^a\int_0^{y'}\int_0^z dx \, dy \, dz}. \tag{1}$$

Nun haben wir

$$\int_0^a\int_0^{y'}\int_0^{z} dx\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^{y'} z\,dx\,dy = \int_0^a c\int_0^{y'}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \frac{c}{b}\int_0^{y'}\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a\Big[\frac{1}{2}\frac{c}{b}y\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2-y^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{c}{b}\Big(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\Big)arc\Big(sin=\sqrt{\frac{y}{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}\Big)\Big]_0^{y'}dx$$

$$= \frac{b\,c\,\pi}{4a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{\pi\,a\,b\,c}{6}, \tag{2}$$

$$\int_0^a\int_0^{y'}\int_0^{z'} x\,dx\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^{y'} x\,z\,dx\,dy = \frac{b\,c\,\pi}{4a^2}\int_0^a (a^2-x^2)x\,dx = \frac{\pi\,a^2bc}{16}. \tag{3}$$

Jetzt ergiebt sich mit (1), (2) und (3)

$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi\,a^2bc}{16}}{\frac{\pi\,a\,b\,c}{6}} = \frac{3}{8}a.$$

In gleicher Weise finden wir $\bar{y} = \frac{3}{8}b$, $\bar{z} = \frac{3}{8}c$.

Mit $a = b = c$ geht das Ellipsoid in eine Kugel über, so dass für den achten Teil des Volumens eine Kugel $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{3}{8}a$ ist.

10. Bestimmung der Schwerpunktscoordinaten eines Teiles des Volumens des Kegels mit der Gleichung

$$y^2 + z^2 = \beta^2 x^2,$$

welcher eingeschlossen ist zwischen den Ebenen der zx, xy und einer im Abstande a von der Ebene der yz zu ihr gelegenen Parallelebene.

Das Volumen des gegebenen Körpers ist

$$V = \int_0^a\int_0^{\beta x}\int_0^{z} dx\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^{\beta x} z\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^{\beta x}\sqrt{\beta^2x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\pi\beta^2\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{12}\pi\beta^2a^3. \tag{1}$$

Die Momente dieses Volumens mit den Coordinatenebenen als Momentenebenen sind

$$V\bar{x}=\int_0^a\int_0^{\beta x}\int_0^z x\,dx\,dy\,dz=\int_0^a\int_0^{\beta x} xz\,dx\,dy=\int_0^a\int_0^{\beta x} x\sqrt{\beta^2x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{4}\pi\beta^2\int_0^a x^3\,dx=\frac{1}{16}\pi\beta^2a^4, \qquad (2)$$

$$V\bar{y}=\int_0^a\int_0^{\beta x}\int_0^z y\,dx\,dy\,dz=\int_0^a\int_0^{\beta x} yz\,dx\,dy=\int_0^a\int_0^{\beta x} y\sqrt{\beta^2x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\beta^3\int_0^a x^3\,dx=\frac{1}{12}\beta^3a^4, \qquad (3)$$

$$V\bar{z}=\int_0^a\int_0^{\beta x}\int_0^z z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\beta x} z^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\beta x}(\beta^2x^2-y^2)\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\beta^3\int_0^a x^3\,dx=\frac{1}{12}\beta^3a^4. \qquad (4)$$

Nun folgt mit (1), (2), (3) und (4)

$$\bar{x}=\frac{V\bar{x}}{V}=\frac{3}{4}a, \qquad \bar{y}=\frac{V\bar{y}}{V}=\frac{\beta a}{\pi}, \qquad \bar{z}=\frac{V\bar{z}}{V}=\frac{\beta a}{\pi}.$$

Walton, p. 20.

11. Bestimmung des Schwerpunktes des halben Körpers, welcher begrenzt wird von der Fläche einer Halbkugel und derjenigen eines Rotationsparaboloides mit derselben Basis, der Parameter des Paraboloides fällt mit einem Durchmesser der Halbkugel zusammen und der Körper wird von einer durch seine Axe gehenden Ebene halbiert.

Wir nehmen den Mittelpunkt der Kugel zum Coordinatenursprunge, die Axe der erzeugenden Parabel zur Axe der z, die Axe der x so, dass die Ebene der xz mit der Halbierungsebene zusammenfällt, und die Axe der y senkrecht zu dieser Ebene.

Damit sind, wenn a den Radius der Kugel bezeichnet, die Gleichungen der Flächen der Kugel und des Paraboloides

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x^2+y^2=a(a-2z).$$

Der Schwerpunkt des gegebenen Körpers liegt in der Ebene der yz, seine Coordinaten sind

$$\bar{x}=0, \qquad \bar{y}=\frac{\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz}, \qquad (1)$$

$$\bar{z}=\frac{\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz}, \qquad (2)$$

wobei $x' = \sqrt{a^2 - x^2}$, die Grenzen z', z des allgemeinen Wertes von z seine Werte für irgendwelche bestimmte Werte von x und y in dem Paraboloide und der Kugel resp. sind.

Nun ist

$$\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}(z-z')\,dx\,dy = \int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\Big\{\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{1}{2a}(a^2-x^2-y^2)\Big\}\,dx\,dy = \int_{-a}^{+a}\Big\{\frac{\pi}{4}(a^2-x^2) - \frac{1}{3a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big\}\,dx = \frac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3a}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{8}\pi a^3 = \frac{5}{24}\pi a^3, \tag{3}$$

$$\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{+a}\int_0^{x'} y\Big\{\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{1}{2a}(a^2-x^2-y^2)\Big\}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-a}^{+a}\Big|_0^{x'}\Big\{-\frac{1}{3}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}(a^2-x^2)y^2 + \frac{1}{8a}y^4\Big\}\,dx = \int_{-a}^{+a}\Big\{\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8a}(a^2-x^2)^2\Big\}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{1}{8a}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{2}{15}a^4 = \frac{15\pi - 16}{120}a^4, \tag{4}$$

$$\int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\frac{1}{2}(z^2 - z'^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-a}^{+a}\int_0^{x'}\frac{1}{2}\Big\{(a^2-x^2-y^2) - \frac{1}{4a^2}(a^2-x^2-y^2)^2\Big\}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-a}^{+a}\frac{1}{2}\int_0^{x'}\Big\{(a^2-x^2-y^2) - \frac{1}{4a^2}(a^2-x^2)^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2-x^2)y^2 - \frac{1}{4a^2}y^4\Big\}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}\Big\{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a^2}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6a^2}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20a^2}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}\Big\}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-a}^{+a}\Big\{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5a^2}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}\Big\}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{1}{15a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}\,dx$$

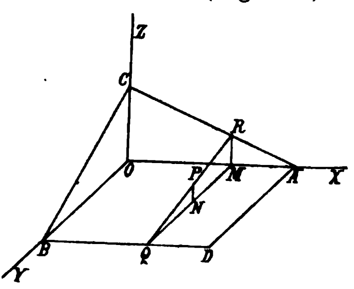
$$= \frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{1}{48}\pi a^4 = \frac{5}{48}\pi a^4. \tag{5}$$

Jetzt erhalten wir mit (1), (2), (3), (4) und (5)

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{120}(15\pi - 16)a^4}{\frac{5}{24}\pi a^3} = \frac{15\pi - 16}{25\pi}a, \qquad \bar{z} = \frac{\frac{5}{48}\pi a^4}{\frac{5}{24}\pi a^3} = \frac{1}{2}a.$$

Walton, p. 21.

12. AOC (Fig. 260) ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei O; $AOBD$ ist ein Rechteck, seine Ebene steht senkrecht auf derjenigen des Dreieckes. Von jedem Punkte R in der Linie AC ist eine gerade Linie RQ, welche der BD in Q begegnet, in einer zu den Ebenen des Rechteckes und des Dreieckes senkrechten Ebene gezogen. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes des so erzeugten Körpers?



Figur 260.

Wähle die Geraden OAX, OBY, OCZ als Axen der x, y, z; von R ziehe RM senkrecht zu OA und schliesse die Linie QM an. Lasse sein $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OM = x$, $MN = y$, $NP = z'$, wobei z der Abstand eines beliebigen Punktes der Linie PN von dem Punkte N ist.

Damit sind die drei Gleichungen, welche die Coordinaten des Schwerpunktes bestimmen,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a\int_0^b\int_0^{z'} x\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a\int_0^b\int_0^{z'} dx\,dy\,dz}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^a\int_0^b\int_0^{z'} y\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a\int_0^b\int_0^{z'} dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^a\int_0^b\int_0^{z'} z\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a\int_0^b\int_0^{z'} dx\,dy\,dz}.$$

Durch die Geometrie ist augenscheinlich, dass

$$z' = c\,\frac{a-x}{a}\,\frac{b-y}{b},$$

wodurch wir erhalten

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a\int_0^b x(a-x)(b-y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b (a-x)(b-y)\,dx\,dy} = \frac{\int_0^a x(a-x)\,dx}{\int_0^a (a-x)\,dx} = \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{3}a,$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a\int_0^b y(a-x)(b-y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b (a-x)(b-y)\,dx\,dy} = \frac{\int_0^b y(b-y)\,dy}{\int_0^b (b-y)\,dy} = \frac{\frac{1}{6}b^3}{\frac{1}{2}b^2} = \frac{1}{3}b,$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^a\int_0^b \frac{1}{2}c^2\frac{(a-x)^2}{a^2}\frac{(b-y)^2}{b^2}\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b c\frac{a-x}{a}\frac{b-y}{b}\,dx\,dy} = \frac{c}{2ab}\frac{\int_0^a\int_0^b (a-x)^2(b-y)^2\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b (a-x)(b-y)\,dx\,dy},$$

$$\bar{z} = \frac{c}{2ab}\frac{\frac{1}{3}a^3\cdot\frac{1}{3}b^3}{\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}b^2} = \frac{2}{9}c.$$

Walton, p. 23.

13. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes eines Volumenteiles des Paraboloides $y^2+z^2=2px$, der begrenzt wird von den drei Ebenen $x=a$, $y=0$, $z=0$?

Bezeichnet b den Halbmesser des Schnittes des Paraboloides durch die Ebene $x=a$, dann wird gefunden werden

$$\bar{x} = \frac{2}{3}a, \qquad \bar{y} = \frac{16\,b}{15\,\pi} = \bar{z}.$$

14. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes des Volumens von dem Cylinder $y^2=2ax-x^2$, das von den beiden Ebenen $z=\beta x$, $z=\beta' x$ begrenzt wird?

$$\bar{x} = \frac{5}{4}a, \qquad \bar{y} = 0, \qquad \bar{z} = \frac{5}{8}(\beta+\beta')\,a.$$

15. Bestimme den Schwerpunkt des Teiles des Körpers $z^2 = xy$, welcher von den fünf Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=b$ begrenzt wird.

$$\bar{x} = \frac{3}{5}a, \qquad \bar{y} = \frac{3}{5}b, \qquad \bar{z} = \frac{9}{32}\sqrt{ab}.$$

16. Ein Körper wird durch ein veränderliches Rechteck erzeugt, welches sich parallel zu sich selbst entlang einer zu seiner Ebene senkrechten und durch seinen Mittelpunkt gehenden Axe bewegt. Eine Seite ändert sich so wie die Entfernung von einem festen Punkte in der Axe, während die halbe andere Seite der Sinus eines Kreisbogens ist, von welchem diese Distanz der Sinusversus ist. Wie gross ist der Abstand $\bar{x}$ des Schwerpunktes des ganzen Körpers von dem festen Punkte, wenn l die Länge der Axe bezeichnet?

$$\bar{x} = \frac{5}{8}l.$$

17. Durch einen auf der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkt und senkrecht zu dessen Ebene ist eine gerade Linie von der Länge des Kreisdurchmessers so gezogen, dass der gegebene Punkt diese Linie halbiert. Man soll den Schwerpunkt des Körpers bestimmen, welcher begrenzt wird von einer Fläche, die der Ort einer

Halbellipse ist. Die grosse Axe dieser Ellipse ist die genannte gerade Linie, ihre kleine Halbaxe ist eine durch den gegebenen Punkt gezogene Kreissehne.

Bezeichnet c den Umfang des Kreises, dann ist der Abstand des Schwerpunktes des Körpers von dem gegebenen Punkte gleich $\frac{9}{128}c$.

13—17. Walton, p. 24—25.

Anmerkung. Der Schwerpunkt des elliptischen Paraboloides ist bestimmt in dem Lehrbuche der analytischen Mechanik von Duhamel, übersetzt von Schlömilch, Band I, S. 143.

Zweite Abteilung.

Schwerpunkte heterogener Systeme.

1. Bestimmung des Schwerpunktes einer materiellen geraden Linie AB, welche so beschaffen ist, dass ihre Dichtigkeit in jedem ihrer Punkte sich verhält wie die n^{te} Potenz seiner Entfernung von einem bestimmten Punkte dieser Geraden, wenn ihre Gleichung $y = ax + b$ ist und ε die Dichtigkeit im Abstande der Einheit von dem gegebenen Punkte bezeichnet.

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind durch die allgemeinen Gleichungen gegeben

$$\bar{x} = \frac{\int \varrho x\, ds}{\int \varrho\, ds}, \qquad \bar{y} = \frac{\int \varrho y\, ds}{\int \varrho\, ds}. \tag{1}$$

Die Coordinaten des Punktes der Linie mit der Dichtigkeit Null seien $x = 0$, $y = b$. Die Coordinaten der Endpunkte der zu untersuchenden Strecke AB seien (x', y'), (x'', y''). Damit ist

$$\varrho = \varepsilon s^n, \text{ so dass, weil } s = \sqrt{1 - a^2}\, x,\ \varrho = \varepsilon (1 + a^2)^{\frac{n}{2}} x^n.$$

Nun ist die Masse m der materiellen Strecke AB vom Querschnitte Eins

$$m = \int_{x'}^{x''} \varrho\, ds = \varepsilon (1 + a^2)^{\frac{n}{2}} \int_{x'}^{x''} (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} x^n dx = \varepsilon (1 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} \int_{x'}^{x''} x^n dx$$

$$= \varepsilon \frac{(1 + a^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} (x''^{n+1} - x'^{n+1}). \tag{2}$$

Die Momente dieser Masse bezüglich der Coordinatenaxen sind

$$m\bar{x} = \int_{x'}^{x''} \varrho x\, ds = \varepsilon (1 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} \int_{x'}^{x''} x^{n+1} dx = \varepsilon \frac{(1 + a^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+2} (x''^{n+2} - x'^{n+2}), \tag{3}$$

$$m\bar{y} = \int_{x'}^{x''} \varrho y\, ds = \varepsilon (1 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} \int_{x'}^{x''} (ax + b) x^n dx$$

$$= \varepsilon (1 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ \frac{a}{n+2} (x''^{n+2} - x'^{n+2}) + \frac{b}{n+1} (x''^{n+1} - x'^{n+1}) \right\}. \tag{4}$$

Durch die Gleichungen (1) bis (4) ergiebt sich nun

$$\bar{x} = \frac{n+1}{n+2} \frac{x''^{n+2} - x'^{n+2}}{x''^{n+1} - x'^{n+1}}, \quad \bar{y} = \frac{n+1}{n+2} \frac{x''^{n+2} - x'^{n+2}}{x''^{n+1} - x'^{n+1}} a + b.$$

Mit $x' = 0$, $b = 0$, $x'' = x$, $y'' = y$ ergiebt sich infolge dieser Resultate

$$\bar{x} = \frac{n+1}{n+2} x, \quad \bar{y} = \frac{n+1}{n+2} a x + b.$$

In diesem Falle erhalten wir

für $n=0$	1	2	3	4
$\bar{x} = \frac{1}{2} x$	$\frac{2}{3} x$	$\frac{3}{4} x$	$\frac{4}{5} x$	$\frac{5}{6} x$
$\bar{y} = \frac{1}{2} y$	$\frac{2}{3} y$	$\frac{3}{4} y$	$\frac{4}{5} y$	$\frac{5}{6} y.$

Mit $n = 0$ ist die materielle Gerade homogen, ihr Schwerpunkt fällt zusammen mit ihrem geometrischen Mittelpunkte. Die Schwerlinie einer homogenen Dreiecksfläche, welche durch eine Ecke geht, ist eine solche, für welche $n = 1$ ist. Die Schwerlinie einer homogenen Pyramide, welche durch die Spitze geht, ist eine solche, für welche $n = 2$ ist.

Wenn n negativ ist, dann sind diese Formeln nicht anwendbar. Wir erhalten mit $n = -1$

$$m = \int_{x'}^{x''} \varrho \, d s = \varepsilon \int_{x'}^{x''} \frac{d x}{x} = \varepsilon \, l \frac{x''}{x'},$$

$$m \bar{x} = \int_{x'}^{x''} \varrho \, x \, d s = \varepsilon \int_{x'}^{x''} d x = \varepsilon (x'' - x'),$$

$$m \bar{y} = \int_{x'}^{x''} \varrho \, y \, d s = \varepsilon \int_{x'}^{x''} \frac{a x + b}{x} d x = \varepsilon \left\{ a (x'' - x') + b \, l \frac{x''}{x'} \right\},$$

so dass

$$\bar{x} = \frac{x'' - x'}{l \frac{x''}{x'}}, \quad \bar{y} = \frac{x'' - x'}{l \frac{x''}{x'}} a + b.$$

Mit $n = -2$ ergiebt sich

$$m = \int_{x'}^{x''} \varrho \, d s = \frac{\varepsilon}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{x'}^{x''} \frac{d x}{x^2} = \varepsilon (1 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right),$$

$$m \bar{x} = \int_{x'}^{x''} \varrho \, x \, d s = \frac{\varepsilon}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{x'}^{x''} \frac{d x}{x} = \varepsilon (1 + a^2)^{-\frac{1}{2}} l \frac{x''}{x'},$$

$$m \bar{y} = \int_{x'}^{x''} \varrho y d s = \frac{\varepsilon}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{x'}^{x''} \frac{a x + b}{x^2} d x = \varepsilon (1 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ a \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right) + b \, l \frac{x''}{x'} \right\},$$

so dass

$$\bar{x} = \frac{x' x''}{x'' - x'} l \frac{x''}{x'}, \quad \bar{y} = a + b \frac{x' x''}{x'' - x'} l \frac{x''}{x'}.$$

2. Eine dreieckige Platte ABC (Fig. 261) von konstanter Dicke ist so beschaffen, dass die Dichtigkeit in ihren einzelnen Punkten direkt proportional der n^{ten} Potenz der Entfernungen dieser Punkte von der durch die Spitze C des Dreieckes gehenden, zu seiner Grundlinie AB parallelen geraden Linie CD ist. Welches ist die Lage ihres Massenmittelpunktes?

Figur 261.

Es sei $AC = b$, $AB = c$, $CP = x$, $PQ = dx$, $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD = \vartheta$, Pp, $Qq \parallel CD$, ε die Dichtigkeit in der Einheit der Entfernung von CD.

Damit ist die Dichtigkeit in jedem Punkte von $Pp = \varepsilon (x \sin \vartheta)^n$. Der unendlich schmale Flächenstreifen Pq kann als Parallelogramm angesehen werden, seine Grundlinie ist $Pp = \frac{cx}{b}$, seine Höhe $PQ . \sin \vartheta = dx \sin \vartheta$, daher ist sein Inhalt $\frac{c}{b} \sin \vartheta x dx$, mithin seine Masse $\varepsilon (x \sin \vartheta)^n \times \frac{c}{b} \sin \vartheta\, x\, dx = \varepsilon \frac{c}{b} (x \sin \vartheta)^{n+1} dx$, so dass die Masse M des ganzen Dreieckes

$$M = \varepsilon \frac{c}{b} \sin^{n+1} \vartheta \int_0^b x^{n+1} dx = \varepsilon \frac{c}{n+2} (b \sin \vartheta)^{n+1}. \qquad (1)$$

Ferner ist das Moment des Flächenelementes Pq mit CD als Momentenaxe gleich

$$\varepsilon \frac{c}{b} (x \sin \vartheta)^{n+1} x \sin \vartheta\, dx = \varepsilon \frac{c}{b} (x \sin \vartheta)^{n+2} dx,$$

daher das Moment der ganzen Fläche für dieselbe Axe

$$M \bar{x} = \varepsilon \frac{c}{b} \int_0^b (x \sin \vartheta)^{n+2} dx = \varepsilon \frac{c}{n+3} (b \sin \vartheta)^{n+2}. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt nun

$$\bar{x} = \frac{M \bar{x}}{M} = \frac{n+2}{n+3} b \sin \vartheta,$$

womit der Abstand des Schwerpunktes S des Dreieckes ABC von der Geraden CD bestimmt ist.

Schneidet die durch den Schwerpunkt des Dreieckes ABC zu AB parallel gezogene Linie die Seite AC im Abstande $\underline{x}$ von C, so ist die Entfernung des Schwerpunktes von $CD = \underline{x} \sin \vartheta$, folglich

$$\underline{x} \sin \vartheta = \frac{n+2}{n+3} b \sin \vartheta, \qquad \underline{x} = \frac{n+2}{n+3} b = \frac{n+2}{n+3} \cdot AC.$$

Weil der gesuchte Punkt S in der Geraden liegen muss, welche aus C nach dem Mittelpunkte E von AB läuft, so ist seine Lage hiermit vollständig bestimmt.

Mit $n = 0$ ergiebt sich hieraus $\bar{x} = \frac{2}{3} b \sin\vartheta$, $\underline{x} = \frac{2}{3} b$, wie dieses für eine homogene Dreiecksfläche der Fall sein muss.

3. Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisquadranten von konstanter Dicke, wenn die Dichtigkeit in seinen einzelnen Punkten direkt proportional der n^{ten} Potenz ihrer Abstände von dem Mittelpunkte des zugehörigen Kreises ist.

Indem wir Polarcoordinaten mit dem Pole im Centrum des Kreisbogens zugrunde legen, sind die Coordinaten des Schwerpunktes, wenn a den Radius des Bogens bezeichnet,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \varrho r^2 \cos\vartheta \, d\vartheta \, dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \varrho r \, d\vartheta \, dr}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \varrho r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \varrho r \, d\vartheta \, dr}.$$

Nun ist $\varrho = \varepsilon r^n$, mithin

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+2} \cos\vartheta \, d\vartheta \, dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+1} \, d\vartheta \, dr}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+1} \, d\vartheta \, dr}.$$

Die Durchführung der Integration giebt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+1} d\vartheta \, dr = \frac{a^{n+2}}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \frac{a^{n+2}}{n+2}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+2} \cos\vartheta \, d\vartheta \, dr = \frac{a^{n+3}}{n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{a^{n+3}}{n+3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^{n+2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr = \frac{a^{n+3}}{n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{a^{n+3}}{n+3},$$

folglich erhalten wir

$$\bar{x} = \frac{\frac{a^{n+3}}{n+3}}{\frac{a^{n+2}}{n+2}\frac{\pi}{2}}, \qquad \bar{x} = \frac{n+2}{n+3}\frac{2a}{\pi} = \bar{y}.$$

Für eine homogene Kreisquadrantenfläche ist $n = 0$, so dass in diesem Falle $\bar{x} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} = \bar{y}$.

4. Bestimmung des Schwerpunktes der Fläche einer Halbkugel, wenn die Dichtigkeit in jedem Punkte derselben direkt proportional seinem senkrechten Abstande von der Ebene der kreisförmigen Basis der Halbkugel ist.

Es sei die Gleichung des Viertelkreisbogens, durch dessen Rotation die Halbkugelfläche erzeugt wird, $x^2 + y^2 = a^2$, die Axe der x Drehaxe.

Der Inhalt des Flächenstreifens, welcher durch das Bogenelement ds erzeugt wird, ist gleich $2\pi y ds$, und wenn ϱ seine Dichtigkeit bezeichnet, so ist seine Masse gleich $2\pi\varrho y ds$, folglich erhalten wir

$$\bar{x}=\frac{\int 2\pi\varrho y\,ds\,x}{\int 2\pi\varrho y\,ds}=\frac{\int \varrho x y\,ds}{\int \varrho y\,ds}=\frac{\int x^2 y\,ds}{\int x y\,ds},$$

weil im vorliegenden Falle $\varrho=\varepsilon x$ ist. Nun geht aus der Gleichung des Kreises hervor, dass $y\,ds=a\,dx$ ist, mithin ist die Abscisse des Schwerpunktes

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a x^2\,dx}{\int_0^a x\,dx}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{2}{3}a.$$

Walton, p. 37.

5. Eine Halbkugel ist so beschaffen, dass die Dichtigkeit in ihren einzelnen Punkten direkt proportional der n^{ten} Potenz ihrer Abstände vom Kugelmittelpunkte ist. Welches ist die Abscisse des Schwerpunktes dieses Körpers?

Bei Verwendung von Polarcoordinaten erhalten wir, wenn a den Radius der Halbkugel bezeichnet,

$$\bar{x}=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^a r^{n+3}\sin^2\vartheta\cos\varphi\,d\varphi\,d\vartheta\,dr}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^a r^{n+2}\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr},\qquad \bar{x}=\frac{n+3}{n+4}\frac{a}{2}.$$

Ist die Dichtigkeit direkt proportional der Entfernung, also $n=1$, dann ergiebt sich $\bar{x}=\frac{2}{5}a$. Ist $n=0$, also der Körper homogen, so haben wir $\bar{x}=\frac{3}{8}a$.

Anmerkung. Die Bezeichnung ist hier dieselbe wie unter 8, Abschnitt VI, Abteilung I.

6. Den Schwerpunkt einer gemeinen Kettenlinie zu finden, wenn die Dichtigkeit der materiellen Curve wie ihre Krümmung sich ändert, und ihre Endpunkte von ihrer Direktrix gleichweit entfernt sind.

Ist a der Abstand eines der beiden Endpunkte der Curve von ihrer Axe, α die Neigung der Tangente in jedem ihrer Endpunkte gegen die Direktrix, dann liegt der Schwerpunkt der Linie in einer Entfernung $\frac{a}{\alpha}$ von der Direktrix und auf ihrer Axe.

Haton de la Goupillière, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2me Série. Tom. VII, p. 39.

7. Den Schwerpunkt eines Bogens der logarithmischen Spirale zu finden, wenn ihre Dichtigkeit sich wie ihre Krümmung ändert.

Es sei c die Länge der Sehne des Bogens, ω der Winkel zwischen seinen äussersten Fahrstrahlen, α die konstante Neigung der Curve in ihren Punkten gegen den jeweiligen Fahrstrahl. Zieht man eine Tangente an die Curve parallel zur Sehne des gegebenen Bogens, dann liegt der Schwerpunkt auf dem Fahrstrahle des Berührungspunktes in einer Entfernung $\frac{c}{\omega} \sin \alpha$ vom Pole.

Haton, ibid. p. 128.

8. Zu finden den Schwerpunkt eines bezüglich des Scheitels symmetrischen Bogens einer Cycloidallinie, wenn die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten direkt proportional ihrer Krümmung daselbst ist.

Wenn $x = a(1 - \cos\vartheta)$ der Abstand der Sehne des Bogens von dem Scheitel ist, dann ist die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Cycloidenaxe gleich $a \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$.

Haton, ibid. p. 131.

9. Bestimme den Schwerpunkt des Bogens einer Kettenlinie, wenn, vom Scheitel ausgehend, die Dichtigkeit sich umgekehrt wie die Entfernung von der Direktrix ändert, die Gleichung der Curve $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ist.

$$\bar{x} = \frac{1}{2} x, \qquad \bar{y} = \frac{a s}{x},$$

wenn s die Länge des Bogens bezeichnet.

Haton, ibid. p. 131.

10. Man soll den Schwerpunkt einer quadratischen Platte $ABCD$ von konstanter Dicke bestimmen, wenn die Dichtigkeit derselben in ihren einzelnen Punkten direkt proportional deren Abständen von einer durch A zu BD parallel gezogenen Linie ist, a die Länge einer Diagonale und $\bar{x}$ die Entfernung des Schwerpunktes von A bezeichnet.

$$\bar{x} = \frac{7}{12} a.$$

11. Ein materieller Kreiskegel ist so beschaffen, dass sich die Dichtigkeit in jedem seiner Punkte wie das Quadrat seines Abstandes von einer durch die Spitze zu seiner Grundfläche parallel gelegten Ebene verhält. Welches ist die Entfernung $\bar{x}$ des Schwerpunktes von der Spitze, wenn h die Höhe des Kegels bezeichnet?

$$\bar{x} = \frac{5}{6} h.$$

12. Den Schwerpunkt einer Kugel zu finden, wenn die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten derselben umgekehrt proportional ihren Abständen von einem gegebenen Punkte ihrer Oberfläche ist.

Der Schwerpunkt teilt den Diameter für die genannten Punkte in zwei Teile, welche sich wie 2 zu 3 verhalten.

13. Den Schwerpunkt einer Kugel zu finden, wenn die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten derselben umgekehrt proportional der fünften Potenz ihrer Abstände von einem ausserhalb ihr gelegenen festen Punkte ist.

Bezeichnet a den Kugelhalbmesser, c die Entfernung des ausserhalb der Kugel gelegenen festen Punktes von ihrem Centrum, dann liegt der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie des Centrums und des äusseren Punktes in einem Abstande $\frac{a^2}{c}$ vom Kugelmittelpunkte.

6—10, 12 u. 13. Walton, p. 38—40.

Anmerkung. In dem Lehrbuche der analytischen Mechanik von Duhamel, übersetzt von Schlömilch, ist der Schwerpunkt eines heterogenen dreiaxigen Ellipsoides unter der Voraussetzung bestimmt, dass die Dichtigkeit in seinen einzelnen Punkten umgekehrt proportional ihren Entfernungen vom Mittelpunkte des Körpers ist. Band I, S. 147.

Dritte Abteilung.

Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Wirkt irgend eine Anzahl paralleler Kräfte an einem unveränderlichen, materiellen Punktsysteme, dann haben sie allgemein eine einzige Resultante, welche in einem Punkte angreift, dessen Lage unveränderlich ist, wie auch ihre gemeinsame Richtung sich in jeder Hinsicht ändert. Dieser Punkt wird Mittelpunkt der Parallelkräfte genannt; der Mittelpunkt der Schwere eines Körpers ist ein besonderer Fall davon. Bezeichnen x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes irgend einer der Kräfte P des Systemes, bezogen auf irgend drei Axen, die rechtwinkelig oder schief zu einander sein können, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Kräfte, R die Resultante der Kräfte P, dann ist

$$R = \Sigma P, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Wenn $\Sigma P = 0$ ist, dann sind diese Gleichungen nicht mehr anwendbar, denn in diesem Falle giebt es keine einzelne Resultante, die Kräfte sind dann nur auf ein resultierendes Paar reduzierbar. Die Theorie der Kräftepaare findet der Leser in der Theorie der Bewegung und der Kräfte von Schell, auch in Poinsot's Werk: „Eléments de Statique." Die Gleichungen für $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ wurden zuerst von Varignon gegeben: „Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1714."

1. Drei parallele Kräfte, welche in den Eckpunkten A, B, C eines ebenen Dreieckes angreifen, sind resp. proportional zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten a, b, c. Welches ist der Abstand des Mittelpunktes der Parallelkräfte von dem Punkte A?

Es seien AB, AC, resp. deren Verlängerungen, die Coordinatenaxen AX, AY, μa, μb, μc die in den Punkten A, B, C angreifenden Kräfte. Die Coordinaten der Angriffspunkte dieser drei Kräfte sind $0, 0$; $c, 0$; $0, b$; folglich ist

$$\bar{x} = \frac{\mu b \cdot c}{\mu a + \mu b + \mu c} = \frac{b c}{a + b + c}, \quad \bar{y} = \frac{\mu c \cdot b}{\mu a + \mu b + \mu c} = \frac{b c}{a + b + c} = \bar{x}.$$

Nun sei r der Abstand des Mittelpunktes der Parallelkräfte von A, dann ist

$$r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2 \bar{x} \bar{y} \cos A = 2 \bar{x}^2 (1 + \cos A) = 4 \bar{x}^2 \cos^2 \frac{A}{2},$$

$$r = 2 \bar{x} \cos \frac{A}{2} = \frac{2 b c \cos \frac{A}{2}}{a + b + c}.$$

2. Drei parallele Kräfte P, Q, R wirken an den Eckpunkten A, B, C eines gegebenen Dreieckes und sind den reziproken Werten der gegenüberliegenden Seiten direkt proportional. Welches ist der Abstand r ihres Mittelpunktes von dem Punkte A?

$$r = a \frac{\sqrt{b^4 + 2 b^2 c^2 \cos A + c^4}}{b c + c a + a b}.$$

3. Auf eine dreieckige, horizontale Platte, welche in den drei Eckpunkten unterstützt ist, ist ein Gewicht gleich demjenigen der Platte gelegt. Die Lage dieses Gewichtes soll gefunden werden, wenn die Pressungen auf die Unterstützungspunkte direkt proportional den Grössen $(4a + b + c)$, $(a + 4b + c)$, $(a + b + 4c)$ sind, wobei a, b, c die Längen der Seiten des Dreieckes bezeichnen.

Die verlangte Lage ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

4. In den Ecken B, C, D einer vierseitigen Pyramide $ABCD$ sind drei parallele Kräfte P, Q, R angebracht. Welches ist der Abstand ihres Mittelpunktes von der Ecke A?

Es sei $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $\sphericalangle CAD = (c, d)$, $\sphericalangle DAB = (d, b)$, $\sphericalangle BAC = (b, c)$, $r =$ der gesuchten Entfernung, dann ist

$$(P^2 + Q^2 + R^2) r^2 = P^2 b^2 + Q^2 c^2 + R^2 d^2 + 2 Q R \cos (c, d) + 2 R P d b \cos (d, b) + 2 P Q b c \cos (b, c).$$

5. An drei festen Punkten (a, b), (a', b'), (a'', b'') in der Ebene der xy sind drei parallele Kräfte p, p', p'' angebracht. Die Grösse von p'' ist vollständig veränderlich. Welches ist der Ort des Mittelpunktes der Parallelkräfte?

Der Ort ist eine gerade Linie mit der Gleichung

$$(a p + a' p') b'' + \{(a'' - a) p + (a'' - a') p'\} y = (b p + b' p') a'' + \{(b'' - b) p + (b'' - b') p'\} x.$$

Walton, p. 40—42.

Vierte Abteilung.

Die Sätze von Pappus.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen auf rechtwinkelige Coordinatenaxen bezogenen Curve. Dreht sich der Bogen s dieser Linie um die Abscissenaxe, so beschreibt ein Element ds desselben einen unendlich schmalen Flächenstreifen der von dem Bogen s erzeugten Rotationsfläche. Das Bogenelement ds hat in Beziehung auf die Abscissenaxe das Moment $y\,ds = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$, so dass das Moment des ganzen

Bogens für dieselbe Axe $\int y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ ist. Dieses Moment muss aber auch gleich dem Momente $s\bar{y}$ sein, wenn $\bar{y}$ den Abstand des Schwerpunktes des Bogens s von der Abscissenaxe bezeichnet, daher besteht die Gleichung

$$\int y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = s\bar{y},$$

ihre Multiplikation mit $\frac{2\pi}{n}$ giebt

$$\frac{2\pi}{n}\int y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{2\pi}{n}\bar{y}s.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Inhalt der Umdrehungsfläche dar, welche durch die Drehung der erzeugenden Curve um die Abscissenaxe entsteht, und es ist $n>1$, wenn die Curve nur eine teilweise Drehung macht, $n=1$, wenn eine volle Umdrehung stattfindet; im ersteren Falle wird nur ein Stück der Rotationsfläche, im zweiten die ganze Rotationsfläche erzeugt. Die rechte Seite der Gleichung ist das Produkt aus dem entsprechenden Wege des Schwerpunktes des Bogens und der Bogenlänge des die Fläche erzeugenden Curvenstückes. Mithin ist der Inhalt O einer Rotationsfläche oder eines Teiles derselben dargestellt durch die Gleichung

$$O = \frac{2\pi}{n}\bar{y}s = \alpha\bar{y}.s. \tag{1}$$

Es sei $y=f(x)$ die Gleichung einer ebenen, auf rechtwinkelige Coordinatenaxen bezogenen Curve, F die Fläche, welche zwischen der Curve, der Abscissenaxe und zwei Ordinaten liegt. Dreht sich die Fläche F um die Abscissenaxe, so beschreibt ein Element dF derselben ein Volumenelement des durch die Fläche F erzeugten Rotationskörpers. Nun ist $dF=y\,dx$, der Abstand des Schwerpunktes dieses Elementes von der Abscissenaxe gleich $\frac{1}{2}y$, also das Moment von dF bezüglich der Abscissenaxe $\frac{1}{2}y^2\,dx$, folglich dasjenige der Fläche $F=\frac{1}{2}\int y^2\,dx$. Ist ferner $\bar{y}$ der Abstand des Schwerpunktes der Fläche F von der Axe der x, so ist auch $F\bar{y}$ das statische Moment dieser Fläche für dieselbe Axe, daher

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx = F\bar{y}.$$

Die Multiplikation der beiden Seiten dieser Gleichung mit $\frac{2\pi}{n}$ giebt

$$\frac{\pi}{n}\int y^2\,dx = \frac{2\pi}{n}\bar{y}.F,$$

$\frac{\pi}{n}\int y^2\,dx$ ist aber das Volumen V des durch die Drehung der Fläche F um den Bogen $\frac{2\pi}{n}=\alpha$ erzeugten Rotationskörpers, die rechte Seite der Gleichung ist das Produkt aus dem entsprechenden Wege des Schwerpunktes der Fläche F, welche den Körper erzeugt, und dem Inhalte dieser Fläche. Das Volumen eines Rotationskörpers oder eines Teiles desselben ist mithin dargestellt durch die Gleichung

$$V = \frac{2\pi}{n}\bar{y}.F = \alpha\bar{y}.F. \tag{2}$$

Ist die die Rotationsfläche erzeugende krumme Linie zusammengesetzt aus zwei oder mehreren Curven, deren Gleichungen sind $y=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$, $y_3=f_3(x)$, ..., so ist offenbar die Summe der statischen Momente dieser Curven bezüglich der Abscissenaxe

$$\int f_1(x)\sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\,dx+\int f_2(x)\sqrt{1+[f_2'(x)]^2}\,dx+\cdots.$$

Bezeichnen ferner $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Bogenlängen $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots$ die Abstände der Schwerpunkte dieser Curven von der Abscissenaxe und ist s die Länge der die Fläche O erzeugenden Linie, $\bar{y}$ die Schwerpunktsordinate dieser Linie, dann besteht offenbar die Gleichung

$$\frac{2\pi}{n}\left\{\int f_1(x)\sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\,dx+\int f_2(x)\sqrt{1+[f_2'(x)]^2}\,dx+\cdots\right\}$$
$$=\frac{2\pi}{n}(s_1\bar{y}_1+s_2\bar{y}_2+\cdots)=\frac{2\pi}{n}\cdot s\bar{y}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber der Inhalt der durch die zusammengesetzte Linie erzeugten Rotationsfläche, daher ist auch

$$O=\frac{2\pi}{n}\bar{y}\,.\,s=\alpha\bar{y}\,.\,s. \qquad (3)$$

Ist die den Rotationskörper erzeugende Fläche von zwei Curvenbogen begrenzt, welche zwischen zwei Ordinatenlinien liegen, sind die Gleichungen dieser Curven $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$, F_1, F_2 ihre Flächen zwischen den zwei Ordinaten, $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ die Abstände der Schwerpunkte dieser Flächen von der Axe der x, ist F der Inhalt der den Rotationskörper erzeugenden Fläche, $\bar{y}$ der Abstand ihres Schwerpunktes von der Axe der x, dann besteht offenbar die Gleichung

$$\frac{\pi}{n}\left\{\int [f_1(x)]^2\,dx-\int [f_2(x)]^2\,dx\right\}=\frac{2\pi}{n}(F_1\bar{y}_1-F_2\bar{y}_2)=\frac{2\pi}{n}F\bar{y}.$$

Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung das Volumen V des von der Fläche F erzeugten Rotationskörpers, daher

$$V=\frac{2\pi}{n}\bar{y}\,.\,F=\alpha y\,.\,F. \qquad (4)$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn die Begrenzung der den Rotationskörper erzeugenden Fläche F eine ganz beliebig zusammengesetzte ist.

Wir können daher die beiden Sätze aufstellen:

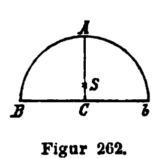
1. Dreht sich eine ebene Fläche um irgend eine in ihrer Ebene ausserhalb ihr gelegene Axe durch einen beliebigen Winkel, so ist der Inhalt der durch ihren Umfang erzeugten Fläche gleich demjenigen eines Rechteckes, von welchem die eine Seite die Länge des Umfanges und die andere Seite die Länge des von dem Schwerpunkte des Perimeters beschriebenen Weges ist.

2. Dreht sich eine ebene Fläche um irgend eine in ihrer Ebene ausserhalb ihr gelegene Axe durch einen beliebigen Winkel, so ist das Volumen des durch diese Fläche erzeugten Körpers gleich demjenigen eines Prismas, dessen Basis gleich der sich drehenden ebenen Fläche, dessen Höhe gleich der Länge des von dem Schwerpunkte der ebenen Fläche während der Drehung beschriebenen Weges ist.

Die erste Erläuterung dieser Sätze, welche jetzt allgemein „Guldins Regeln“ genannt werden, ist Pappus zu verdanken; dieselbe kann eingesehen werden am Ende der Vorrede zu dem siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen, von welchen die erste Ausgabe in lateinischer Übersetzung im Jahre 1588 erschien. Später wurden diese Sätze von Guldin mit vielen Anwendungen in seiner Abhandlung „De Centro

Gravitatis" Lib. 2 et 3 veröffentlicht, welche in der ersten Zeit des Jahres 1635 erschien. Cavalierie (Exercitationes Geometricae Sex, Exercit. 1 u. 2, Bononiae 1647) gab, in Beantwortung von Einwendungen, welche gegen seine Methode des Unteilbaren durch Guldin vorgebracht wurden, eine Erklärung dieser Sätze durch die genannte Methode, gleichfalls darthuend, in Anspielung auf Guldins Anspruch als Entdecker, dass die Sätze von ihm, lange vor dem Erscheinen von Guldins Werk, durch einen seiner Schüler, Antonio Roccha, mitgeteilt worden seien. Elegante Erläuterungen dieser Sätze wurden auch von Varignon produziert. (Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1714, p. 77.)

1. Welches ist der Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser a?



Figur 262.

Es sei BAb (Fig. 262) der Halbkreis, durch dessen Rotation um seinen Durchmesser BCb die Kugelfläche erzeugt ist. Nehme den Radius CA senkrecht zu Bb und S als Schwerpunkt des Halbkreisbogens BAb, dann ist der verlangte Flächeninhalt

$$O = 2\pi \,.\, CS \,.\, arc\, BAb.$$

Aber es ist $CS = \frac{2a}{\pi}$, $arc\, BAb = \pi a$, folglich

$$O = 2\pi \frac{2a}{\pi} \pi a = 4 a^2 \pi.$$

Der Inhalt der Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines ihrer grössten Kreise. Diese Eigenschaft wurde von Archimedes zuerst bewiesen: *Περὶ Σφαυρας καὶ Κυλίνδρου, Βιβλ. Α, πρότα. Α*, und später nach vorstehender Methode von Guldin: De Centro Gravitatis, Lib. IV, cap. I, prop. 7.

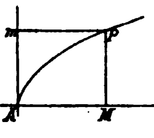
2. Welches ist das Volumen einer Kugel vom Halbmesser a?

Es sei BAb (Fig. 262) die Halbkreisfläche, durch deren Drehung um ihren Durchmesser BCb die Kugel erzeugt ist. Nehme den Radius CA senkrecht zu Bb und S als Schwerpunkt der Halbkreisfläche BAb, dann ist das verlangte Volumen

$$V = 2\pi \,.\, CS \,.\, F.$$

Aber es ist $CS = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$, $F = \frac{a^2\pi}{2}$, folglich

$$V = 2\pi \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\frac{a^2\pi}{2} = \frac{4}{3} a^3 \pi.$$



Figur 263.

3. Durch einen beliebigen Punkt P in einer Parabel (Fig. 263) ist eine gerade Linie PM senkrecht zu der Parabelaxe gezogen worden. Es soll das Volumen des durch die volle Umdrehung der Fläche APM um PM erzeugten Körpers gefunden werden.

Es sei $AM = x$, $MP = y$, $\bar{x}$ der Abstand des Schwerpunktes der ebenen Fläche APM von PM, dann ist der ganze von dem Schwerpunkte beschriebene Weg $2\pi\bar{x}$, so dass

$$V = 2\pi\bar{x} \,.\, \text{Fläche } PAM.$$

Aber es ist $\bar{x} = \frac{2}{5}x$, Fläche $PAM = \frac{2}{3}xy$, mithin

$$V = 2\pi\frac{2}{5}x \,.\, \frac{2}{3}xy = \frac{8}{15}\pi x^2 y.$$

Verzeichnen wir das Parallelogramm $MPmA$ mit dem Inhalte xy und dem Abstande seines Schwerpunktes von PM gleich $\frac{1}{2}x$, lassen dasselbe eine volle Drehung um PM machen, dann ist der Weg seines Flächenmittelpunktes $2\pi \,.\, \frac{1}{2}x = \pi x$ und das Volumen V' des dadurch erzeugten Körpers

$$V' = \pi x \,.\, xy = \pi x^2 y,$$

folglich besteht die Proportion $V' : V = 15 : 8$.

Dieses ist eines der in Keplers Stereometrie vorhandenen Probleme.

Guldinus, De Centro Gravitatis, Lib. II, cap. 12, prop. 6.

4. Zu finden das Volumen, welches erzeugt ist durch Drehung eines Teiles AP einer Parabel um die Tangente in ihrem Scheitel A (Fig. 263, S. 610) um einen gegebenen Winkel α, wenn AM, Pm senkrecht, PM parallel zu ihr, $AM = x$, $MP = y$ ist.

$$V = \alpha x F = \alpha\frac{3}{5}x\frac{2}{3}xy = \frac{2}{5}\alpha x^2 y.$$

5. Bestimmung der Oberfläche und des Volumens des Körpers, welcher durch die Rotation einer Cycloide um ihre Basis entsteht, wenn a der Halbmesser des Erzeugungskreises ist.

$$O = 2\pi\bar{y}s = 2\pi \,.\, \frac{4}{3}a \,.\, 8a = \frac{64}{3}a^2\pi.$$

$$V = 2\pi\bar{y}F = 2\pi \,.\, \frac{5}{6}a \,.\, 3a^2\pi = 5a^3\pi^2.$$

6. Bestimmung der Oberfläche und des Volumens des Körpers, welcher durch die Rotation eines halben Bogens der Cycloide um ihre Axe entsteht, wenn a der Halbmesser des Erzeugungskreises ist.

$$O = 2\pi\bar{x}s = 2\pi\left(a\pi - \frac{4}{3}a\right)4a = 8a^2\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

$$V = 2\pi\bar{x}F = 2\pi\left(\frac{a\pi}{2} - \frac{8}{9}\frac{a}{\pi}\right)\frac{3}{2}a^2\pi = \pi a^3\left(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}\right).$$

7. Bestimmung der Oberfläche und des Volumens des Wulstes, welcher durch die volle Drehung eines Kreises vom Halbmesser a um eine ausserhalb demselben, aber in seiner Ebene liegende Axe entsteht, wenn c der Abstand des Kreiscentrums von der Rotationsaxe ist.

$$O = 2\pi\bar{y}s = 2\pi . c . 2a\pi = 4\pi^2 a c.$$
$$V = 2\pi\bar{y}F = 2\pi . c . a^2\pi = 2\pi^2 a^2 c.$$

8. Wie gross ist das Volumen eines Wulststückes, welches erzeugt ist durch die Drehung einer Ellipse um eine ausserhalb ihr, aber in ihrer Ebene gelegenen Axe durch einen Winkel von 180°, wenn a, b die Halbaxen der Ellipse sind, c die Entfernung ihres Mittelpunktes von der Rotationsaxe bezeichnet.

$$V = \frac{2\pi}{2}\bar{y} . F = \pi c . a b \pi = \pi^2 a b c.$$

9. Ein Kreisabschnitt dreht sich um eine durch den Mittelpunkt des Kreisbogens gehende, zur Sehne des Bogens parallele Axe durch einen vollen Winkel. Welches ist das Volumen des dadurch erzeugten Körpers?

Die durch den Mittelpunkt des Bogens gelegte Abscissenaxe mit dem Ursprunge in diesem Punkte sei senkrecht zur Sehne des Bogens, a sei dessen Radius, so dass die Gleichung des Bogens $x^2 + y^2 = a^2$ ist. Ein zur Ordinatenaxe paralleles Element der Fläche des Abschnittes ist $2y\,dx$, der Schwerpunkt dieses Elementes durchläuft bei einer vollen Umdrehung desselben den Weg $2\pi x$, so dass das von ihm beschriebene Volumenelement $dV = 2\pi x . 2y\,dx = 4\pi x y\,dx = -4\pi y^2 dy$, weil zufolge der Kreisgleichung $x\,dx = -y\,dy$ ist, mithin erhalten wir

$$V = \int_y^0 -4\pi y^2 dy = 4\pi\int_0^y y^2 dy = \frac{4}{3}\pi y^3.$$

Das Volumen dieses ringförmigen Körpers ist demnach gleich demjenigen einer Kugel, welche die Sehne des Bogens zum Durchmesser hat.

10. Ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a und b rotiert um seine Hypotenuse. Welches ist die Oberfläche und das Volumen des dadurch erzeugten Rotationskörpers?

$$O = \pi a b \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad V = \frac{\pi}{3}\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

11. Ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a und b dreht sich um die Kathede a. Welches ist die Oberfläche und das Volumen des dadurch entstehenden Kegels?

$$O = \pi(b^2 + b\sqrt{a^2+b^2}), \qquad V = \frac{1}{3}\pi a b^2.$$

12. Ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Inhalte F dreht sich um eine in seiner Ebene ausserhalb ihm gelegene Axe. Die Abstände der den Seiten a, b, c

gegenüberliegenden Eckpunkte von der Rotationsaxe sind r, q, p. Welches ist die Oberfläche und das Volumen des dadurch erzeugten Rotationskörpers?

$$O = \pi \{ a(p+q) + b(p+r) + c(q+r) \}, \qquad V = \frac{2}{3}\pi(p+q+r)F.$$

13. Die Guldinschen Regeln sind auch dann noch anwendbar, wenn die erzeugende Fläche bei ihrer Bewegung stets gegen die Projektion des Weges ihres Schwerpunktes auf irgend eine Ebene senkrecht gerichtet bleibt. In diesem Falle ist nicht der Weg des Schwerpunktes, sondern die Projektion dieses Weges in Rechnung zu ziehen.

Beispielsweise lässt sich hiedurch leicht die Oberfläche und das Volumen eines Schraubengewindes finden. Bezeichnet s den Umfang, F den Inhalt der das Gewinde erzeugenden Fläche, $\bar{y}$ den Abstand der Projektion des Schwerpunktes des Umfanges resp. des Inhaltes dieser Fläche von der Projektion der Axe auf die zu ihr senkrechte Ebene und dreht sich die Fläche F um einen beliebigen Bogen α, so ist für den dadurch erzeugten Teil des Schraubengewindes

$$O = \alpha\bar{y} \,.\, s, \qquad V = \alpha\bar{y} \,.\, F.$$

Anmerkung. Weitere hieher gehörige Beispiele findet der Leser in dem Werkchen: „Die Geometrie der Körper“, von Dr. Zehme, Iserlohn, 1859.

14. Bestimmung des Schwerpunktes des Bogens und der Fläche eines Halbkreises, wenn a den Radius des Bogens bezeichnet.

Durch die erste Guldinsche Regel erhalten wir, wenn $\bar{y}$ der Abstand des Schwerpunktes des Bogens vom Durchmesser des Halbkreises ist,

$$\bar{y} = \frac{O}{2\pi s}.$$

Hier ist nun O der Inhalt der durch den Halbkreis erzeugten Kugelfläche, wenn er sich um seinen Diameter dreht, s die Länge des erzeugenden Bogens, also $O = 4a^2\pi$, $s = a\pi$, folglich

$$\bar{y} = \frac{4a^2\pi}{2\pi \,.\, a\pi} = \frac{2a}{\pi}.$$

Die zweite Regel sagt, dass mit $\bar{y}$ als Abstand des Schwerpunktes der Fläche vom Diameter

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi F}.$$

Im vorliegenden Falle bedeutet V das Volumen der durch eine Umdrehung der Halbkreisfläche um ihren Diameter erzeugten Kugel, F den Inhalt der erzeugenden Fläche, es ist $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, $F = \frac{1}{2}\pi a^2$, folglich

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

15. Welches ist der Abstand des Schwerpunktes der Fläche einer Halbparabel von der Parabelaxe?

Es sei APM (Fig. 263, S. 610) die Fläche der Halbparabel, $AM = x$, $MP = y$, $\bar{y} =$ dem Abstande des Schwerpunktes der Fläche APM von AM. Damit ist der Inhalt der Fläche $APM = \frac{2}{3}xy$, das durch eine Umdrehung der Fläche APM um AM erzeugte Volumen ist $\pi\int_0^x y^2\,dx = 2\pi p\int_0^x x\,dx = \pi p x^2$, so dass

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi F} = \frac{\pi p x^2}{2\pi . \frac{2}{3}xy} = \frac{3}{8}y.$$

Walton, p. 44.

---

16. Berechnung des Inhaltes des Mantels und des Volumens eines vielseitigen, schief abgeschnittenen Prismas.

a) Berechnung des Inhaltes des Mantels.

Es seien bei einem $n$seitigen, auf der einen Seite schief abgeschnittenen Prisma $u_1, u_2, .., u_n$ die Seiten der normalen Grundfläche, $m_1, m_2, .., m_n$ die Mittellinien der aufeinander folgenden trapezförmigen Seitenflächen, dann besteht für die Mantelfläche M des Prismas die Gleichung

$$M = u_1 m_1 + u_2 m_2 + \cdots + u_n m_n = \Sigma u_1 m_1. \qquad (1)$$

Die Ebenen der beiden $n$seitigen Endflächen schneiden sich in einer Geraden YY. Die Schwerpunkte der Seiten der Grundfigur liegen in ihren Mitten, es seien ihre Abstände von der Geraden YY gleich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\bar{x}$ sei der Abstand des Schwerpunktes des Umfanges u der Grundfläche von derselben Geraden, dann besteht mit YY als Axe die Momentengleichung $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\bar{x} = u_1 \bar{x}_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$, d. i. $u\bar{x} = \Sigma u_1 x_1$. Ziehen wir noch durch die Fusspunkte der Normalen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu YY und die Endpunkte der Mittellinien $m_1, m_2, \ldots, m_n$ im schiefen Schnitte gerade Linien, so entstehen n ähnliche Dreiecke, die sämtlich den Winkel α, unter welchem sich die beiden Endflächenebenen schneiden mögen, enthalten, es ist also, wenn m die Länge der durch den Schwerpunkt des Umfanges der Grundfigur in dem Prisma parallel zu den Kanten gezogenen Geraden bedeutet,

$$\frac{m_1}{x_1} = \frac{m_2}{x_2} = \ldots = \frac{m_n}{x_n} = \frac{m}{\bar{x}},$$

so dass $\quad m_1 = \frac{m}{\bar{x}} x_1, \quad m_2 = \frac{m}{\bar{x}} x_2, \ldots \quad m_n = \frac{m}{\bar{x}} x_n.$

Die Substitution dieser Werte in die (1) giebt

$$M = \frac{m}{\bar{x}}(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots u_n x_n) = \frac{m}{\bar{x}} \Sigma u_1 x_1.$$

$\Sigma u_1 x_1$ ist aber das Moment $u \bar{x}$ der Grundfigur bezüglich der Axe YY, folglich erhalten wir

$$M = u \,.\, m. \tag{2}$$

Der Inhalt des Mantels eines auf einer Seite schief abgeschnittenen $n$seitigen Prismas ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der normalen Grundfläche und der hierzu gehörigen Umfangsschwerpunktsaxe des Prismas. Diese Axe geht im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt des Umfanges des schiefen Schnittes.

Ist das $n$seitige Prisma auf beiden Seiten schief abgeschnitten, bezeichnet u den Umfang eines Normalschnittes, m die Länge der Umfangsschwerpunktsaxe dieses Schnittes, insoweit dieselbe innerhalb des Prismas liegt, so ist offenbar auch der Inhalt des Mantels eines auf beiden Seiten schief abgeschnittenen $n$seitigen Prismas

$$M = u \,.\, m.$$

b) Berechnung des Volumens.

Ist der Inhalt der normalen Grundfläche eines auf einer Seite schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas gleich g, sind a, b, c die Längen seiner Kanten, dann ist das Volumen dieses Körpers

$$V = g\,\frac{a + b + c}{3}.$$

Der Ausdruck $\frac{a + b + c}{3}$ giebt aber den Abstand des Schwerpunktes der Fläche des schiefen Schnittes von der Grundfläche, so dass, wenn derselbe mit h bezeichnet wird, auch ist

$$V = g\,h.$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche des schiefen Schnittes von der normalen Grundfläche mit dem Namen „Flächenschwerpunktsaxe“, dann ist der Inhalt eines dreiseitigen, auf einer Seite schief abgeschnittenen Prismas gleich dem Produkte aus dem Inhalte der normalen Grundfläche und der Länge der Flächenschwerpunktsaxe.

Denken wir uns nun ein normales $n$seitiges Prisma mit der Grundfläche F an einem Ende schief abgeschnitten, den Inhalt des schiefen Schnittes gleich F', die Neigung der Ebene des schiefen Schnittes zu der Ebene der Grundfläche gleich α. Legen wir durch eine beliebige Kante dieses Körpers nach den übrigen Kanten Ebenen, so zerfällt derselbe dadurch in $(n - 2)$ dreiseitige, an einem Ende schief abgeschnittene Prismen, ihre mit der Fläche F zusammenfallende Grundflächen seien $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$, ihre schiefen, mit der Fläche F' zusammenfallenden Flächen f'_1,

$f'_2, \ldots, f'_{n-2}$, so dass $F' \cos\alpha = F$, $f'_1 \cos\alpha = f_1$, $f'_2 \cos\alpha = f_2, \ldots$, $f'_{n-2} \cos\alpha = f_{n-2}$. Ist nun h die Entfernung des Schwerpunktes der schiefen Begrenzungsfläche F' von der Grundfläche F, sind $h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}$ die Abstände der Schwerpunkte der schiefen Flächen der dreiseitigen Prismen, aus denen das $n$seitige Prisma besteht, von derselben Ebene, so ist das statische Moment der Fläche F' in Bezug auf die Grundfläche F

$$F' h = f'_1 h_1 + f'_2 h_2 + \ldots + f'_{n-2} h_{n-2} = \Sigma (f'_1 h_1).$$

Die Multiplikation der beiden Seiten dieser Gleichung mit $\cos\alpha$ giebt

$$F' h \cos\alpha = \Sigma (f'_1 h_1 \cos\alpha), \quad \text{so dass} \quad F h = \Sigma (f_1 h_1).$$

$\Sigma (f_1 h_1)$ ist aber das Volumen des $n$seitigen Prismas, denn die Produkte $f_1 h_1$, $f_2 h_2, \ldots, f_{n-2} h_{n-2}$ sind die Volumina der dreiseitigen Prismen, welche in ihrer Gesamtheit das $n$seitige Prisma bilden, mithin ist wie beim dreiseitigen Prisma

$$V = F . h.$$

Das Volumen eines $n$seitigen, auf einer Seite schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Grundfläche und der Flächenschwerpunktsaxe.

Verbinden wir den Schwerpunkt der Grundfläche mit demjenigen des schiefen Schnittes durch eine Gerade, so ist diese Linie parallel zu den Kanten des Prismas, daher der Schwerpunkt des schiefen Schnittes leicht auffindbar, wenn wir denjenigen der Grundfläche kennen. Die Ebenen der beiden Endflächen des Prismas schneiden sich in einer Geraden YY. Fällen wir auf diese Gerade von den Schwerpunkten S_1, $S_2, \ldots, S_{n-2}$ der normalen Grundflächen der dreiseitigen Prismen, in welche wir uns das $n$seitige Prisma zerlegt denken, dem Punkte S der Grundfläche, in welchem die von dem Schwerpunkte S' des schiefen Schnittes des $n$seitigen Prismas aus zu den Kanten parallel gezogene Linie die Grundfläche schneidet, sowie von den entsprechenden Schwerpunkten S'_1, $S'_2, \ldots, S'_{n-2}$, S' der schiefen Flächen dieser Prismen auf die Linie YY senkrechte Linien, so schneiden sich die entsprechenden Senkrechten daselbst unter dem Winkel α, die entsprechenden Dreiecke sind ähnlich, und bezeichnen wir die Längen der in der Grundebene liegenden Normalen entsprechend mit x_1, $x_2, \ldots, x_{n-2}$, $\bar{x}$, dann besteht die Proportion

$$\frac{h_1}{x_1} = \frac{h_2}{x_2} = \ldots\ldots = \frac{h_{n-2}}{x_{n-2}} = \frac{h}{\bar{x}}.$$

Demnach ist auch

$$F h = \Sigma (f_1 h_1) = \frac{h}{\bar{x}} \Sigma (f_1 x_1),$$

woraus folgt

$$F\bar{x} = \Sigma(f_1 x_1),$$

also muss S Schwerpunkt der Grundfläche und h die Flächenschwerpunktsaxe des schiefen Schnittes sein, wenn h von S aus gezogen wird.

Projizieren wir demnach eine ebene Figur auf eine beliebige Ebene, so fällt die Projektion ihres Schwerpunktes mit dem Schwerpunkte ihrer Projektion zusammen.

Ist das $n$seitige Prisma auf beiden Seiten schief abgeschnitten und legen wir an irgend einer Stelle durch dasselbe einen Normalschnitt, so zerfällt es in zwei an einem Ende schief abgeschnittene Prismen. Bezeichnen wir den Inhalt des Normalschnittes mit F, die Länge der Flächenschwerpunktsaxen dieser Prismen, welche in einer durch den Schwerpunkt des Normalschnittes gehenden, zu den Prismenkanten parallelen Geraden liegen, mit h_1, h_2, dann ist offenbar das Volumen dieses Prismas $V = Fh_1 + Fh_2 = F(h_1 + h_2)$, wodurch mit $h_1 + h_2 = h$

$$V = F.h.$$

Das Volumen eines $n$seitigen, auf beiden Seiten schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte des Normalschnittes und der Flächenschwerpunktsaxe.

Lassen wir bei einem solchen Prisma die Längen der Seiten des Normalschnittes einander gleich und unangebbar klein, seine Seitenzahl unendlich gross werden, dann geht das Prisma in einen Cylinder über. Mithin gelten für einen schief abgeschnittenen Cylinder rücksichtlich des Inhaltes seines Mantels und seines Volumens dieselben Sätze, welche für das schief abgeschnittene $n$seitige Prisma aufgestellt wurden.

Drittes Kapitel.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist durch den allgemeinen Satz dargestellt:

„Wenn irgend ein materielles Punktesystem, auf welches irgend welche Kräfte wirken, im Gleichgewichte ist, und wir stellen uns vor, dass dieses System ohne Änderung seiner geometrischen Verhältnisse irgend eine unendlich kleine, willkürliche Verschiebung erfährt, dann ist die Summe der Produkte aus den einzelnen Kräften und den Projektionen der Wege ihrer Angriffspunkte auf die Kraftrichtungen gleich Null. Die Projektion des Weges des Angriffspunktes auf die Kraftrichtung wird hierbei als positiv, wenn sie in der Richtung der entsprechenden Kraft liegt, als negativ angesehen, wenn sie in entgegengesetzter Richtung liegt."

Die Projektionen der von den Angriffspunkten der Kräfte beschriebenen Wege auf die Kraftrichtungen werden ihre virtuellen Geschwindigkeiten genannt.

Bezeichnen P, Q, R..... die Kräfte irgend eines an einem materiellen Systeme wirkenden Kräftesystemes, α, β, γ,.... ihre virtuellen Geschwindigkeiten, dann ist, insofern nur die ersten Potenzen von α, β, γ,.... berücksichtigt werden,

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + S\delta + \ldots = 0. \tag{A}$$

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten wurde zuerst von Guido Ubaldi als eine Eigenschaft des Hebels und der beweglichen Rollen entdeckt. (Mechanicorum Liber; De Libra; De Cochela.) Seine Existenz erkannte später Galileo an der geneigten Ebene und den von ihr abhängigen Maschinen (Della Scienza Mecanica, Opera, Tom. I, p. 265, Bolonga, 1655). Der Ausdruck „Moment" einer Kraft oder eines Gewichtes, welches an irgend einer Maschine wirkt, wurde von Galileo gebraucht, um die Energie oder Anstrengung zu bezeichnen, mit welcher es die Maschine in Bewegung setzt; er erklärte demgemäss, dass es für das Gleichgewicht einer Maschine. an welcher zwei Kräfte wirken, nötig ist, dass ihre Momente gleich und von entgegengesetzter Richtung sind. Überdies zeigte er, dass das Moment einer Kraft stets proportional dem Produkte aus dieser Kraft und ihrer virtuellen Geschwindigkeit ist. Das Wort Moment wurde in demselben Sinne von Wallis gebraucht (Mechanica, sive de motu Tractatus Geometricus), welcher Galileo's Prinzip der Gleichheit der Momente als den Fundamentalsatz der Statik adoptierte und daraus die Bedingungen für das Gleichgewicht der Hauptmaschinen folgerte. Descartes (Lettre 73, Tom. I, 1657; de Mechanica Tractatus, Opuscula Posthuma) hat gleichfalls die ganze Wissenschaft der Statik auf ein einziges Prinzip zurückgeführt, welches genau mit demjenigen von Galileo übereinstimmt, es ist indessen dasselbe unter einer weniger allgemeinen Form von ihm dargestellt worden. Das Prinzip besteht darin, dass genau dieselbe Kraft zum Heben eines Gewichtes P auf eine Höhe a, wie zum Heben eines Gewichtes Q auf eine Höhe b erforderlich ist, wenn die Proportion besteht: $P:Q = b:a$. Daraus folgt, dass zwei an einer Maschine befestigte Gewichte im Gleichgewichte sein werden, wenn sie in einer solchen Weise angeordnet sind, dass die kleinen Wege, welche sie gleichzeitig beschreiben können, ihren Grössen reziprok sind.

Torricelli (De Motu gravium naturaliter descentium, 1644) ist der Verfasser eines anderen Prinzipes, welches unmittelbar aus dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgegangen sein mag, es lautet: „Wenn irgend zwei fest miteinander verbundene Gewichte sich in einer solchen Lage befinden, dass ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt an der tiefsten Stelle liegt, welche er folgerecht mit den geometrischen Bedingungen, denen sie unterworfen sind, einnehmen kann, so sind sie im Gleichgewichte." Dieses Prinzip hat zu dem folgenden allgemeineren Veranlassung gegeben: „Ein beliebiges System schwerer Körper ist im Gleichgewichte, wenn sein Schwerpunkt in seiner tiefsten oder höchsten Lage sich befindet."

Johann Bernoulli war der Erste, welcher das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten unter seiner allgemeinsten Gestalt bekannt machte. Derselbe that dieses unter der oben angegebenen Form durch einen Brief an Varignon, datiert Basel, Jan. 26. 1717. (Nouvelle Mécanique, Tom. II, sect. 9.) Der auffallende Wert des Prinzipes, welches ein Werkzeug analytischer Verallgemeinerung, ist glänzend durch Lagrange in seiner Mécanique Analytique dargelegt worden.

Von dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten mag unmittelbar das Prinzip abgeleitet worden sein, welches Maupertuis in Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1740 unter dem Namen „Gesetz der Ruhe" (Loi de Repos) vorge-

schlagen hat, und welches Euler in Les Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751 ausführlich entwickelt hat. Angenommen irgend eine Anzahl von Kräften P, Q, R, ..., welche nach festen Centren gerichtet und funktional ihren Distanzen p, q, r, ... von diesen Centren sind, wirke an einem unveränderlichen materiellen Systeme, und dieses System erleide eine unendlich kleine Verschiebung, wodurch die Grössen p, q, r, ... sich ändern um die unendlich kleinen Beträge dp, dq, dr, ..., dann ist zufolge des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0,$$

oder, wenn die linke Seite dieser Gleichung mit $d\Pi$ bezeichnet wird,

$$d\Pi = 0. \tag{B}$$

Daraus geht hervor, dass Gleichgewicht stattfindet, wenn das System sich in einer solchen Lage befindet, für welche Π einen Maximalwert oder einen Minimalwert besitzt. Dieser Satz macht das Prinzip der Ruhe von Maupertuis aus. Es folgt indessen umgekehrt nicht, dass für ein ruhendes System Π einen Maximal- oder Minimalwert haben muss, denn wir wissen durch die Lehren der Differentialrechnung, dass die Gleichung (B), obgleich eine nötige, nicht die einzige Bedingung für das Bestehen eines solchen Wertes ist. Lagrange (Mécanique Analytique, Première Partie, sect. 5) hat gezeigt, dass das Gleichgewicht stabil, wenn Π ein Minimum, dass es labil, wenn Π ein Maximum ist.

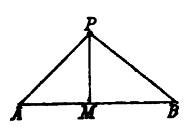
Diese Theorie durch ein allgemeines Beispiel beleuchtend, ist es klar, dass irgend ein schweres System im stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem der Schwerpunkt dieses Systemes sich in der tiefsten oder höchsten Lage befindet, welche mit den geometrischen Beziehungen, denen das System unterworfen, vereinbar ist.

Das von Caurtivron entwickelte Gleichgewichtsprinzip (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1748, 1749) gründet sich ebenfalls auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Dieses Prinzip bekräftigt, dass bei einem Systeme von Körpern, welches sich unter der Wirkung beliebiger Kräfte, die sich nach irgend welchen Gesetzen ändern, in Bewegung befindet, eine einem Maximum oder Minimum von lebendiger Kraft entsprechende Lage des Systemes eine Gleichgewichtslage sein wird, wobei im ersten Falle stabiles, im zweiten labiles Gleichgewicht stattfinden wird

Erster Abschnitt.

Gleichgewicht.

1. Ein materieller Punkt wird von zwei Centralkräften A und B angezogen. Welches ist die Gleichgewichtslage dieses Punktes?



Figur 264.

Es seien AB (Fig. 264) die Centra der Kräfte A, B, welche um die Strecke $AB = a$ von einander abstehen. Ferner sei P der angezogene Punkt, $PM \perp AB$, $AP = r$, $BP = s$, $AM = x$, $MP = y$.

Nehmen wir nun an, dass der Punkt P eine unendlich kleine Verschiebung erhalte, dann werden die Differentiale dr, ds von r, s die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte A, B sein, es muss daher die Bedingung erfüllt werden

$$A\,dr + B\,ds = 0. \tag{1}$$

Aber es ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $s = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$, also $dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$ds = \frac{-(a-x)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}},$$

so dass durch Einführung dieser Werte in (1)

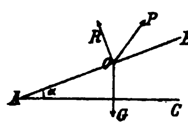
$$A\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + B\frac{-(a-x)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} = 0.$$

Nun sind dx und dy von einander unabhängige Grössen, wie auch immer die unendlich kleine Änderung in der Lage von P beschaffen sein mag, weshalb auch die Gleichungen bestehen müssen

$$\frac{Ax}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{B(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} = 0, \ (2) \quad \frac{Ay}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{By}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} = 0. \ (3)$$

Die (3) giebt $y = 0$, womit die (2) $A = B$ liefert. Daraus erkennen wir, dass, wenn auf irgend einen freien materiellen Punkt durch zwei, nach zwei festen Centren gerichtete Kräfte gewirkt wird, dieser Punkt in der Linie, welche die beiden Kraftcentra verbindet, liegen muss und dass die beiden Kräfte gleich gross sein müssen für den Fall des Gleichgewichtes.

Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751, p. 184. Walton, p. 156.



Figur 265.

2. Ein materieller Punkt O (Fig. 265) liegt auf einer geneigten Ebene AB, auf ihn wirkt eine Kraft P in gegebener Richtung. Die Grösse von P soll so bestimmt werden, dass der materielle Punkt in Ruhe ist, auch soll, wenn P bekannt, der Druck auf die Stützebene berechnet werden.

Es sei G das Gewicht des materiellen Punktes O, R die Reaktion der geneigten Ebene, $\sphericalangle POB = \vartheta$, α die Horizontalneigung von AB.

Wird dem Punkte O eine kleine Verschiebung β in der Richtung AB erteilt, dann sind die virtuellen Geschwindigkeiten von P und G $\beta \cos\vartheta$ und $-\beta \sin\alpha$ und die virtuelle Geschwindigkeit von R ist gleich Null. Folglich erhalten wir

$$P.\beta\cos\vartheta - G.\beta\sin\alpha = 0, \quad \text{oder} \quad P\cos\vartheta - G\sin\alpha = 0,$$

womit sich ergiebt

$$P = G\frac{\sin\alpha}{\cos\vartheta}. \tag{1}$$

Um die Reaktion R zu bestimmen, denken wir uns den Punkt O um die unendlich kleine Strecke β parallel zur Basis AC der schiefen Ebene verschoben, dann ist die virtuelle Geschwindigkeit von G gleich Null, die virtuellen Geschwindigkeiten von P und R sind $\beta\cos(\alpha+\vartheta)$ und $-\beta\sin\alpha$, mithin muss sein

$$P\beta \cos(\alpha+\vartheta) - R\beta \sin\alpha = 0, \quad \text{oder} \quad P\cos(\alpha+\vartheta) - R\sin\alpha = 0,$$

woraus folgt

$$R = P\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha}, \quad \text{oder} \quad R = G\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\cos\vartheta}, \text{ mit (1).}$$

Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751, p. 184. Walton, p. 158.

Ist die Kraft P zu bestimmen, wenn zwischen dem materiellen Punkte und der Stützebene Reibung vorhanden ist, dann erhalten wir für P einen Maximal- und einen Minimalwert, je nachdem die geringste Vergrösserung von P eine Bewegung die Ebene hinauf oder die geringste Verkleinerung von P eine Bewegung die Ebene hinab verursacht. Im ersten Falle wirkt der Reibungswiderstand μR der Kraft P entgegen, im zweiten kommt er derselben zu Hilfe. Für das Maximum von P ist, wenn der Punkt O um die unendlich kleine Strecke β die Ebene hinauf verschoben wird,

$$P\beta\cos\vartheta - G\beta\sin\alpha - \mu\beta R = 0, \quad \text{oder} \quad P\cos\vartheta - G\sin\alpha - \mu R = 0, \quad (2)$$

wenn wir den Punkt O um den Betrag β senkrecht zur Ebene verschoben denken

$$P\beta\sin\vartheta - G\beta\cos\alpha + R\beta = 0, \quad \text{oder} \quad P\sin\vartheta - G\cos\alpha + R = 0. \quad (3)$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$P_{max} = G\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta},$$

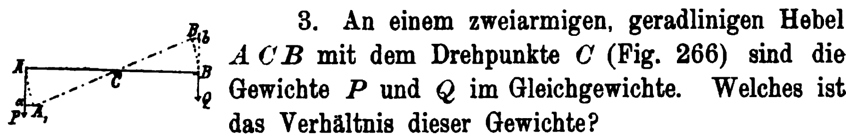
die (3) giebt

$$R = G\cos\alpha - P\sin\vartheta.$$

Soll die Kraft P den Punkt O eben im Gleichgewichte erhalten, dann ist $-\mu$ an Stelle von μ zu setzen, was giebt

$$P_{min} = G\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta}.$$

Der materielle Punkt wird mithin in Ruhe bleiben, so lange als die Grösse von P zwischen den eben bestimmten Werten liegt.



Figur 266.

3. An einem zweiarmigen, geradlinigen Hebel ACB mit dem Drehpunkte C (Fig. 266) sind die Gewichte P und Q im Gleichgewichte. Welches ist das Verhältnis dieser Gewichte?

Wird der Hebel durch eine kleine Drehung in die Lage A_1CB_1 gebracht, werden von A_1 und B_1 aus auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel A_1a und B_1b gefällt, so sind Aa und Bb die Projektionen der Wege, welche die Angriffspunkte der Kräfte P und Q zurückgelegt haben, und da der Angriffspunkt von P vorwärts, derjenige von Q zurückgetreten ist, so erhalten wir

$$P \cdot Aa = Q \cdot Bb, \quad \text{oder} \quad P : Q = Bb : Aa.$$

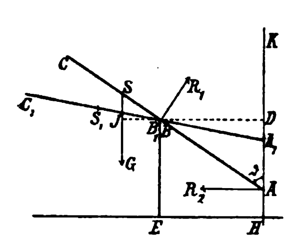
Es ist aber offenbar $Bb : Aa = B_1 C : A_1 C = BC : AC$, mithin

$$P : Q = BC : AC,$$

d. h. die Kräfte müssen sich umgekehrt wie ihre Hebelsarme verhalten.

4. In einer vertikalen Ebene stützt sich ein gerader, stabförmiger Körper ABC auf einen vertikalen Pfosten BE im Punkte B und gegen einen solchen HK mit seinem Ende A. Unter welchen Verhältnissen ist der Körper ABC im Gleichgewichte?

Hier können verlangt werden 1) die Gleichgewichtslage, 2) die Gleichgewichtslage und die Reaktion der Stütze, 3) die Gleichgewichtslage und die Reaktion des Pfostens HK, 4) die Gleichgewichtslage und beide Reaktionen.



Figur 267.

1) Bestimmung der Gleichgewichtslage. Es sei (Fig. 267) S der Schwerpunkt des Stabes AB, in welchem sein Gewicht G vertikal abwärts wirkend gedacht wird, R_1 die Reaktion der Stütze BE bei B, senkrecht zu AC, R_2 diejenige des Pfostens HK, senkrecht zu HK, $BD \perp HK$ und $= b$, $AS = a$, $\sphericalangle SAD = \vartheta$.

Weil es sich nur um die Gleichgewichtslage handelt, so haben wir dem Stabe AC eine unendlich kleine Verschiebung in der Weise zu erteilen, dass er mit der Stütze BE und dem Pfosten HK in Berührung bleibt, damit die Reaktionen R_1 und R_2 nicht in der Gleichung der virtuellen Momente vorkommen, also in die Lage $A_1 B C_1$ zu bringen. Bezeichnet nun h die Höhe des Schwerpunktes S von AC über der Horizontalen durch den Punkt B, so ist

$$h = BS \cdot \cos\vartheta = (a - b \operatorname{cosec}\vartheta)\cos\vartheta = a\cos\vartheta - b \operatorname{cotg}\vartheta,$$

$$dh = \left(\frac{b}{\sin^2\vartheta} - a\sin\vartheta\right) d\vartheta.$$

Die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten ist

$$G \cdot dh = 0,$$

daher muss sein

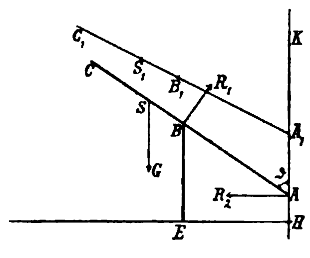
$$dh = \left(\frac{b}{\sin^2\vartheta} - a\sin\vartheta\right) d\vartheta = 0, \quad \text{also auch} \quad b - a\sin^3\vartheta = 0,$$

folglich

$$\sin\vartheta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

womit die Gleichgewichtslage bestimmt ist.

2) Bestimmung der Gleichgewichtslage und der Reaktion der Stütze. In diesem Falle haben wir die unendlich kleine Verschiebung so vorzunehmen, dass der Stab mit dem Pfosten HK, aber nicht mit der Stütze BE in Berührung bleibt, also die Lage $A_1 B_1 C_1$ (Fig. 267 a) annimmt.



Figur 267 a.

Mit $AA_1 = c$ ist der Weg des Punktes B in der Richtung von R_1 der Unterschied der Projektionen von AA_1 und $A_1 B_1$ auf die Richtung von R_1, also $= AA_1 \,.\, \sin\vartheta - A_1 B_1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - d\vartheta\right)$, und weil $A_1 B_1 = AB = b \operatorname{cosec}\vartheta$, so ist dieser Weg auch $= c \sin\vartheta - b \operatorname{cosec}\vartheta\, d\vartheta$. Der von S in der Richtung von G beschriebene Weg ist $= AS \,.\, \cos\vartheta = AA_1 - A_1 S_1 \,.\, \cos(\vartheta + d\vartheta) = a\cos\vartheta - c - a\cos\vartheta + a\sin\vartheta\, d\vartheta = a\sin\vartheta\, d\vartheta - c$. Daher erhalten wir als Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten

$$(G a \sin\vartheta - R_1 b \operatorname{cosec}\vartheta)\, d\vartheta - c\,(G - R_1 \sin\vartheta) = 0,$$

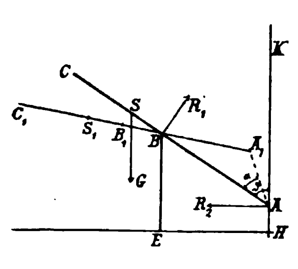
welche in die zwei Gleichungen zerfällt

$$G a \sin\vartheta = R_1 b \operatorname{cosec}\vartheta = 0 \qquad \text{und} \qquad G - R_1 \sin\vartheta = 0,$$

indem $d\vartheta$ und c zwei von einander unabhängige unendlichkleine Grössen sind. Aus diesen beiden Relationen folgt

$$\sin\vartheta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \qquad R_1 = G\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

3) Bestimmung der Gleichgewichtslage und der Reaktion des Pfostens HK. Hier haben wir dem Stabe eine solche unendlich kleine Verschiebung zu erteilen, dass er mit der Stütze BE, aber nicht mit dem Pfosten HK in Berührung bleibt, also die Lage $A_1 B C_1$ (Fig. 267 b) annimmt.



Figur 267 b.

Mit $AA_1 = c$ und $\sphericalangle BAA_1 = \alpha$ haben wir hier $d\vartheta = c \sin\alpha : (AB - c\cos\alpha) = \frac{c}{b}\sin\alpha \times \sin\vartheta$. Der Weg von S in der Richtung von G ist $= AS \,.\, \cos\vartheta - c\cos(\vartheta - \alpha) - A_1 S_1 \times \cos(\vartheta + d\vartheta) = \left(\frac{b}{a}\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\right) c \sin\alpha - c\cos\alpha\cos\vartheta$, der Weg von A in der Richtung von R_2 ist $= c\sin(\vartheta - \alpha)$. Damit erhalten wir als Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten

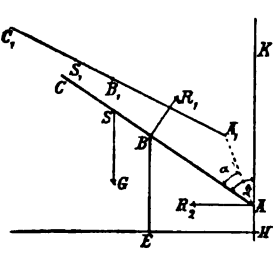
$$G\left\{\left(\frac{a}{b}\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\right) c \sin\alpha - c\cos\alpha\cos\vartheta\right\}$$
$$+ R_2\,(c\cos\alpha\sin\vartheta - c\sin\alpha\cos\vartheta) = 0,$$

welche in die zwei Gleichungen zerfällt

$G\left(\frac{a}{b}\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\right) - R_2\cos\vartheta = 0$ und $G\cos\vartheta - R_2\sin\vartheta = 0$, aus ihnen folgt

$$\sin\vartheta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \qquad R_2 = G\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{b}}.$$

4) Ermittelung der Gleichgewichtslage, der Reaktionen R_1 und R_2. In diesem Falle ist der Stab AC in einer solchen Weise zu verschieben, dass er weder mit dem Pfosten noch mit der Stütze in Berührung bleibt, also die Lage $A_1\,B_1\,S_1\,C_1$ (Fig. 267c) annimmt. Die Projektionen der unendlich kleinen Wege der Angriffspunkte A, B, S der Kräfte R_2, R_1, G auf die Kraftrichtungen sind alsdann $c\sin(\vartheta - \alpha)$, $c\sin\alpha - b\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$, $c\sin\vartheta\, d\vartheta - c\cos(\vartheta - \alpha)$, womit wir die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeit erhalten



Figur 267 c.

$$G\left\{a\sin\vartheta\, d\vartheta - c\cos(\vartheta - \alpha)\right\} + R_1\left\{c\sin\alpha - b\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}$$
$$+ R_2\, c\sin(\vartheta - \alpha) = 0,$$

welche infolge der Unabhängigkeit der Grössen $c\sin\alpha$, $c\cos\alpha$, $d\vartheta$ in die drei Partialgleichungen zerfällt

$$R_1 - G\sin\vartheta - R_2\cos\vartheta = 0, \qquad G\cos\vartheta - R_2\sin\vartheta = 0,$$
$$G\,a\sin\vartheta - R_1\, b\,\mathrm{cosec}\,\vartheta = 0.$$

Durch Elimination ergiebt sich aus diesen Relationen

$$\sin\vartheta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \qquad R_1 = G\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \qquad R_2 = G\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Indem wir noch beachten, dass

$$\frac{dh}{d\vartheta} = \frac{b}{\sin^2\vartheta} - a\sin\vartheta, \qquad \frac{d^2h}{d\vartheta^2} = -\left(\frac{2b}{\sin^3\vartheta} + a\right)\cos\vartheta$$

ist, erkennen wir, dass h ein Maximum und folglich das Gleichgewicht labil ist.

Eine andere Lösung dieses Problemes ist die folgende. Wir denken uns, der Stab ABC sei dadurch etwas aus seiner Gleichgewichtslage verrückt, dass wir sein Ende A entlang HK gleitend machen, den Stützpunkt B noch berührend. Es hat dann offenbar der Punkt A keine Be-

wegung parallel zu R_2 und die Bewegung des Punktes B des Stabes parallel zu R_1 kann durch ein Differential zweiter Ordnung dargestellt werden. Folglich hat von den drei Kräften G, R_1, R_2 das Gewicht G allein eine virtuelle Geschwindigkeit. Mit $AB = x$, $SJ = y$ (Fig. 267, S. 622) erhalten wir daher

$$G\,dy = 0, \qquad \text{oder} \qquad dy = 0. \tag{1}$$

Nun ist hier, infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke SJB und ADB, $SJ : BS = AD : AB$, d. h.

$$y = \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2-b^2}, \qquad dy = \frac{ab^2-x^3}{x^2\sqrt{x^2-b^2}}\,dx,$$

so dass durch (1)

$$ab^2 - x^3 = 0, \qquad \text{also} \qquad x = \sqrt[3]{ab^2}, \tag{2}$$

womit die Gleichgewichtslage festgesetzt ist.

Um die Reaktion R_1 zu bestimmen, denken wir uns dem Stabe eine vertikale Verschiebung β erteilt, so dass der Stab eine Parallelverschiebung erleidet und dabei A entlang HK gleitet, dann sind die virtuellen Geschwindigkeiten von G, R_1, R_2 die Strecken $-\beta$, $\beta \sin\vartheta$, 0, daher ist

$$R_1\,\beta \sin\vartheta - G\beta = 0; \qquad \text{d. i.} \qquad R_1 \sin\vartheta = G.$$

Aber es ist $\sin\vartheta = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{b}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ mit (2), folglich

$$R_1 = G\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Damit wir R_2 finden, denken wir uns den Stab AC in seiner Richtung um die unendlich kleine Strecke β verschoben, dann sind die virtuellen Geschwindigkeiten von G, R_1, R_2 die Strecken $-\beta\cos\vartheta$, 0, $\beta\sin\vartheta$, mithin muss sein

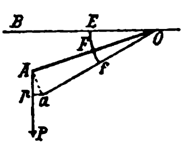
$$R_2\,\beta\sin\vartheta - G\beta\cos\vartheta = 0, \qquad \text{d. i.} \qquad R_2 = G\,\mathrm{cotg}\,\vartheta.$$

Aber es ist $\mathrm{cotg}\,\vartheta = \dfrac{\sqrt{x^2-b^2}}{b} = \dfrac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{b}}$ mit (2), folglich

$$R_2 = G\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751, p. 196. Walton, p. 157.

5. Ein unveränderlicher Stab OA (Fig. 268, S. 626) ohne Gewicht wird durch ein Gewicht P, welches an seinem Ende A hängt, angegriffen;



Figur 268.

das Stabende O ist fest. EF ist eine Feder in Gestalt eines Kreisbogens mit dem Mittelpunkte O, deren Kontraktionskraft proportional dem Winkel AOB ist, wobei OB eine in der vertikalen Ebene des Stabes liegende horizontale Linie darstellt. Welches ist die Ruhelage des Stabes?

Es sei $OA = a$, $\sphericalangle AOB = \varphi$, $OF = b$, α der Wert von φ, wenn die Kontraktionskraft der Feder gleich E ist, so dass die dem Winkel φ entsprechende Kontraktionskraft $E\frac{\varphi}{\alpha}$ ist. OA werde sehr wenig, um einen Winkel $d\varphi$, gedreht und komme dadurch in die Lage Oa in der vertikalen Ebene durch OA, dann sei $ap \perp AP$ und f die neue Lage von F. Damit haben wir durch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$P.Ap - \frac{E}{\alpha}\varphi . Ff = 0, \tag{1}$$

aber es ist, weil Ap, $Aa \perp OB$, resp. OA, $\sphericalangle aAp = \varphi$, so dass $Ap = Aa . \cos\varphi = a\cos\varphi\, d\varphi$, $Ff = b\, d\varphi$, folglich erhalten wir mit (1)

$$P\, a\cos\varphi = \frac{E}{\alpha}\varphi\, b = 0, \qquad \text{d. i.} \qquad \frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{Eb}{Pa\alpha},$$

womit φ und daher die Gleichgewichtslage bestimmt ist.

Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751, p. 196. Walton, p. 159.

6. Ein glatter Stab AB (Fig. 269) stützt sich gegen zwei horizontale Zapfen, welche die vertikale Ebene durch den Stab in den Punkten A', A'' durchstossen, der Stab geht unter dem tieferen und über dem höheren Zapfen hinweg, sein tieferes Ende A wird von einer glatten, horizontalen Ebene unterstützt. Welches sind die Pressungen auf die zwei Zapfen und die Stützebene?

Figur 269.

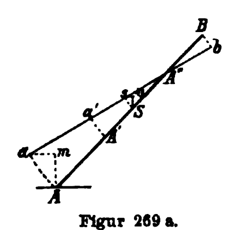
Die Pressungen auf die Zapfen und die horizontale Ebene sind ihren Reaktionen auf den Stab gleich, die Reaktionen der Zapfen auf den Stab werden zwei zur Stabaxe senkrecht gerichtete Kräfte R', R'', die Reaktion der Ebene wird eine vertikale Kraft R sein. Es sei S der Schwerpunkt des Stabes, in welchem Punkte wir sein Gewicht G vereinigt annehmen. Demnach haben wir hier vier Kräfte R, R', R'', G, welche an den vier unveränderlich mit einander verbundenen Punkten A, A', A'', S angreifen, und im Gleichgewichte sein müssen.

Es sei $AS = a$, $A'A'' = b$, $\alpha =$ der Horizontalneigung des Stabes.

Denken wir uns, der Stab erhalte eine kleine Verschiebung solcher

Art, dass er noch mit den zwei Zapfen in Berührung bleibt, dann sind offenbar die virtuellen Geschwindigkeiten von G und R gleich und entgegengesetzt, daher ist, wenn β die Grösse der Verschiebung in der Richtung des Stabes bezeichnet,

$$R \beta \sin \alpha - G \beta \sin \alpha = 0, \qquad \text{mithin} \qquad R = G. \tag{1}$$



Figur 269 a.

Nächstdem nehmen wir an, dass der Stab eine kleine Verschiebung durch Drehung um den Punkt A'', welcher festbleibend gedacht, durch einen kleinen Winkel ω (Fig. 269 a) erleidet; die Punkte a, a', s sind dann die neuen Lagen von A, A', S. Von a ziehe $a\,m$ senkrecht zu der vertikalen Geraden durch A, von s die Strecke $s\,n$ senkrecht zu der vertikalen Geraden durch S. Vermöge des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten ist alsdann

$$R \,.\, A\,m - R' \,.\, A'\,a' - G \,.\, S\,n = 0,$$

also mit (1)

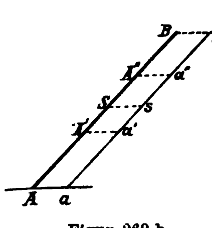
$$G\,(A\,m - S\,n) - R' \,.\, A'\,a' = 0. \tag{2}$$

Aber es ist $A\,m = A\,a \,.\, \cos \alpha = A\,A'' \,.\, \omega \cos \alpha$, $S\,n = S\,s \,.\, \cos \alpha = A''\,S \,.\, \omega \cos \alpha$, mithin

$$A\,m - S\,n = A\,S \,.\, \omega \cos \alpha = a\,\omega \cos \alpha, \quad A'\,a' = A'\,A'' \,.\, \omega = b\,\omega. \tag{2'}$$

Daher ergiebt sich mit (2) und (2')

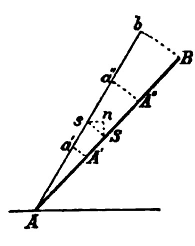
$$G\,a\,\omega \cos \alpha - R'\,b\,\omega = 0, \qquad \text{d. i.} \qquad R' = G \frac{a}{b} \cos \alpha. \tag{3}$$



Figur 269 b.

Ferner empfange der Stab eine unendlich kleine Verschiebung parallel zu seiner ursprünglichen Lage $A\,B$ so, dass der Punkt A auf der horizontalen Ebene bleibt, und derselbe die neue Lage $a\,a'\,a''\,b$ (Fig. 269 b) annimmt, dann sind die virtuellen Geschwindigkeiten von R', R'' gleich und entgegengesetzt, diejenigen von G und R gleich Null, folglich muss sein

$$R'' = R' = G \frac{a}{b} \cos \alpha, \text{ mit (3).} \tag{4}$$



Figur 269 c.

Die Reaktion R'' können wir auch dadurch finden, dass wir den Stab $A\,B$ um den Punkt A in seiner vertikalen Ebene einen sehr kleinen Winkel beschreiben lassen, wodurch er aus der Lage $A\,A'\,S\,A''$ in die neue Lage $A\,a'\,s\,a''$ (Fig. 269 c) kommt. Mit $s\,n$ senkrecht zur Vertikalen durch S ist dann die Gleichgewichtsbedingung

$$R'' \,.\, A''\,a'' - R' \,.\, A'\,a' - G \,.\, S\,n = 0.$$

Weil nun $Sn = Ss.\cos\alpha$, $A''a'' : A'a' : Ss = AA'' : AA' : AS$ ist, so erhalten wir

$$R''.AA'' - R'.Aa' - G.AS.\cos\alpha = 0,$$

$$R''.AA'' = G\left(\frac{a}{b}\cos\alpha.AA' + AS.\cos\alpha\right),$$

$$R''.AA'' = G\frac{a}{b}\cos\alpha(AA' + b) = G\frac{a}{b}\cos\alpha.AA'',$$

folglich

$$R'' = G\frac{a}{b}\cos\alpha = R'.$$

Walton, p. 159.

7. Ein gleichförmig schwerer Stab AB (Fig. 270) ist in einer vertikalen Ebene um den Endpunkt A drehbar; an seinem Ende B ist ein Faden BCP befestigt, welcher über eine glatte Rolle bei C in der vertikalen Linie durch A geführt ist und an seinem frei herabhängenden Ende ein Gewicht P trägt. S ist der Schwerpunkt des Stabes, G sein Gewicht, $AB = AC = a$, $AS = \frac{1}{2}a$, $\sphericalangle BAC = \vartheta$. Welches ist die Gleichgewichtslage?

Figur 270.

Denken wir uns das Gewicht des Stabes in seinem Schwerpunkte vereinigt und den Stab um den unendlich kleinen Winkel $d\vartheta$ gedreht, dann ist der Weg von P in seiner Richtung $d(CP)$, der Weg von S in vertikaler Richtung, wenn $AM = AS$, $d(CM)$, mithin die Bedingung für das Gleichgewicht

$$P.d(CP) + G.d(CM) = 0.$$

Weil aber $d(CP) = -a\cos\frac{\vartheta}{2}d\vartheta$, $d(CM) = d\left(a - \frac{a}{2}\cos\vartheta\right)$, so muss auch sein

$$-Pa\cos\frac{\vartheta}{2}d\vartheta + Gd\left(a - \frac{a}{2}\cos\vartheta\right) = 0,$$

d. i. $$-Pa\cos\frac{\vartheta}{2} + G\frac{a}{2}\sin\vartheta = 0,$$

woraus folgt

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{P}{G},$$

welche Gleichung die verlangte Lage des Stabes giebt.

Eine andere Lösung dieses Problemes ist die folgende. Bei einer unendlich kleinen Drehung des Stabes um den Winkel $d\vartheta$ ist der Weg von P in seiner Richtung

$$d(CP) = d\,(BCP - BC) = d\left(BCP - 2a\sin\frac{\vartheta}{2}\right) = -a\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta.$$

Das Gewicht eines Elementes dx des Stabes ist $G\frac{dx}{a}$, sein unendlich kleiner vertikaler Weg $d\,(CM) = d\,(a - x\cos\vartheta) = x\sin\vartheta\,d\vartheta$, also die Summe der virtuellen Momente aller Elemente des Stabes gleich

$$\Sigma\left(G\frac{dx}{a}x\sin\vartheta\,d\vartheta\right) = \frac{G}{a}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^a x\,dx = \frac{1}{2}\,G\,a\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Daher ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{2}\,G\,a\sin\vartheta\,d\vartheta - P\,a\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = 0,$$

woraus folgt

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{P}{G}.$$

8. Vier durch glatte Charniere in einer vertikalen Ebene mit ihren Enden verbundene Stäbe AB, BC, CD, DE (Fig. 271) sind in eine Gleichgewichtslage gebracht, die Enden A und E sind durch zwei glatte Gelenke an die horizontale Ebene AE gefesselt; der Stab AB ist gleich dem Stabe ED, der Stab BC gleich dem Stabe CD. In welchem Verhältnisse stehen die Winkel BAE und CBD zu einander?

Figur 271.

Es sei $AB = 2a = DE$, $BC = 2b = CD$, $\sphericalangle BAE = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$, $AE = c$, m gleich dem Gewichte eines jeden der unteren, n gleich demjenigen eines jeden der oberen Stäbe.

Nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten ist hier

$$2m\,.\,d\,(a\sin\alpha) + 2n\,.\,d\,(2a\sin\alpha + b\sin\beta) = 0,$$

daher

$$(m + 2n)\,a\cos\alpha\,d\alpha + n\,b\cos\beta\,d\beta = 0.$$

Ferner besteht die geometrische Beziehung

$$c = 4a\cos\alpha + 4b\cos\beta, \quad \text{so dass} \quad 0 = a\sin\alpha\,d\alpha + b\sin\beta\,d\beta. \quad (2)$$

Indem wir (1) mit $\sin\alpha\sin\beta$ multiplizieren und die resultierende Gleichung mit (2) verknüpfen, wird

$$(m + 2n)\cos\alpha\sin\beta\,.\,b\sin\beta\,d\beta = n\cos\beta\sin\alpha\,.\,b\sin\beta\,d\beta,$$

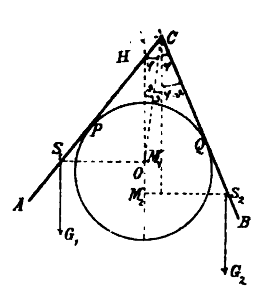
mithin

$$tg\,\alpha = \frac{m + 2n}{n}\,tg\,\beta.$$

Mit $m = n$ ergiebt sich demnach $tg\,\alpha = 3\,tg\,\beta$.

Walton, p. 162.

9. Zwei Balken AC, BC (Fig. 272) in einer lotrechten Ebene sind bei C durch ein glattes Charnier verbunden. Die Ebene der Balkenaxen ist senkrecht zu der Axe eines festen Kreiscylinders vom Halbmesser r, auf dessen Umfang in den Punkten P und Q sich die Balken stützen. Welches ist die Gleichgewichtslage? Wie gross ist der Druck auf das Charnier bei C?



Figur 272.

Es seien S_1, S_2 die Schwerpunkte, G_1, G_2 die Gewichte der Balken AC, BC, welche in den Schwerpunkten vertikal abwärts wirkend gedacht werden. Ferner sei O der Mittelpunkt des normalen Cylinderquerschnittes, $\measuredangle COH = \vartheta$, wobei OH die Vertikale durch O ist, $\measuredangle ACO = \varphi = \measuredangle BCO$, $S_1 C = a$, $S_2 C = b$, $S_1 M_1$, $S_2 M_2$ je eine horizontale gerade Linie, $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes des Balkensystemes über einer durch O gehenden Horizontalebene.

Für das Gleichgewicht besteht die Gleichung

$$(G_1 + G_2)\bar{z} = G_1 . OM_1 + G_2 . OM_2,$$

weil aber

$$OM_1 = OC.\cos\vartheta - CS_1 . \cos \measuredangle ACM_1 = \frac{r\cos\vartheta}{\sin\varphi} - a\cos(\varphi + \vartheta),$$

$$OM_2 = OC.\cos\vartheta - CS_2 . \cos \measuredangle BCM_2 = \frac{r\cos\vartheta}{\sin\varphi} - b\cos(\varphi - \vartheta),$$

so ist auch

$$(G_1 + G_2)\bar{z} = (G_1 + G_2) r \frac{\cos\vartheta}{\sin\varphi} - G_1 a\cos(\varphi + \vartheta) - G_2 b\cos(\varphi - \vartheta).$$

Für die Gleichgewichtslage muss aber $\bar{z}$, welches eine Funktion der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen φ und ϑ ist, ein Maximum oder Minimum werden, folglich muss sein

$$(G_1 + G_2)\frac{d\bar{z}}{d\vartheta} = -(G_1 + G_2) r \frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi} + G_1 a\sin(\varphi + \vartheta) - G_2 b\sin(\varphi - \vartheta) = 0,$$

$$(G_1 + G_2)\frac{d\bar{z}}{d\varphi} = -(G_1 + G_2) r \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + G_1 a\sin(\varphi + \vartheta) + G_2 b\sin(\varphi - \vartheta) = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergiebt sich

$$(G_1 + G_2) r \operatorname{cosec}^2\varphi = (G_1 a - G_2 b)\operatorname{cotg}\vartheta + (G_1 a + G_2 b)\operatorname{cotg}\varphi,$$
$$(G_1 + G_2) r \operatorname{cosec}^2\varphi = (G_1 a - G_2 b)\operatorname{tg}\vartheta + (G_1 a + G_2 b)\operatorname{tg}\varphi,$$

womit wir erhalten, indem wir diese Relationen von einander subtrahieren,

$$\frac{\operatorname{tg} 2\vartheta}{\operatorname{tg} 2\varphi} = \frac{G_2 b - G_1 a}{G_2 b + G_1 a}, \qquad (1)$$

und wenn wir ϑ eliminieren

$$4\, G_1\, G_2\, a\, b \sin^4 \varphi - (G_1 + G_2)\,(G_1\, a + G_2\, b)\, r\, tg\, \varphi + (G_1 + G_2)^2 r^2 = 0.$$

Daraus folgt φ und alsdann ist ϑ durch (1) gegeben.

Nun sei T der in einer gewissen Richtung CT auf AC und in der entgegengesetzten Richtung auf BC ausgeübte Druck bei C. Auf den Balken AC wirken die Kräfte G_1, T und der unbekannte Widerstand des Cylinders im Stützpunkte P, so dass, wenn wir Momente um P nehmen, die Bedingungen erfüllt sein müssen

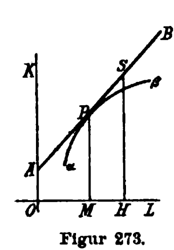
$$T \cos(\pi - \sphericalangle ACT) - G_1 \cos AHO = 0,$$
$$T \cdot PC \cdot \sin \sphericalangle ACT - G_1 \cdot PS_1 \cdot \sin \sphericalangle AHO = 0.$$

Durch diese Gleichungen erhalten wir

$$\left(\frac{T}{G_1}\right)^2 = \cos^2 \sphericalangle AHO + \left(\frac{PS_1}{PC}\right)^2 \sin^2 \sphericalangle AHO$$
$$= \cos^2(\varphi + \vartheta) + \left(\frac{a}{r}\, tg\, \varphi - 1\right)^2 \sin^2(\varphi + \vartheta),$$

womit die Grösse des Druckes auf das Charnier bestimmt ist, seine Richtung resultiert aus der Gleichung

$$tg \sphericalangle ACT = -\frac{PS_1}{PC}\, tg \sphericalangle AHO = \left(1 - \frac{a}{r}\, tg\, \varphi\right) tg(\varphi + \vartheta).$$



Figur 273.

10. Ein Stab AB (Fig. 273), dessen eines Ende A mit einer glatten vertikalen Ebene OK in Berührung ist, stützt sich im Punkte P gegen eine glatte Curve $\alpha\beta$. Die Vertikalebene durch den Stab enthält die Curve und ist senkrecht zu der Ebene OK. Der Ort dieser Curve soll so bestimmt werden, dass der Stab bei jeder Lage im Gleichgewichte sein kann.

Von einem beliebigen Punkte O im Schnitte OK der vertikalen Ebene ziehe die horizontale Gerade OL, von dem irgend einer Lage des Stabes entsprechenden Berührungspunkte P ziehe die Vertikale PM; S sei der Schwerpunkt des Stabes, $SH \perp OL$, $OM = x$, $MP = y$, $AS = a$. Durch die Geometrie ist

$$SH = y + PS \cdot \frac{dy}{ds} = y + \left(a - x\frac{ds}{dx}\right)\frac{dy}{ds} = y - x\frac{dy}{dx} + a\frac{dy}{ds}.$$

Weil es nun für das Gleichgewicht eines materiellen Systemes nötig ist, dass das Differential der Höhe seines Schwerpunktes Null ist, so ist es klar, dass im gegenwärtigen Falle für jede Lage des Stabes Gleichgewicht möglich ist, wenn SH von unveränderlicher Grösse bleibt. Daher muss mit $p = \frac{dy}{dx}$ die Bedingung erfüllt sein

$$C = y - xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

so dass, wenn wir nach x differentiieren, $\frac{dp}{dx} = q$ setzen,

$$0 = -xq + \frac{aq}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$

mithin muss sein

$$q = 0, \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{a}{\sqrt{(1+p^2)^3}}.$$

Die erste dieser Lösungen giebt für den Ort des Punktes P eine gerade Linie. Durch Integration der zweiten Gleichung erhalten wir als Ortsgleichung des Punktes P

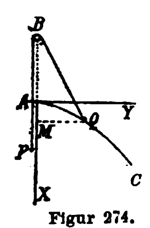
$$C = \pm (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + y.$$

Wählen wir hier den Coordinatenursprung so, dass $y = 0$ für $x = a$, in welchem Falle O der Schnitt des Stabes in seiner horizontalen Lage mit der Linie OK ist, dann ist $C = 0$ und die Gleichung der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Die Curve ist demnach eine Astrois, von welcher nur der untere, aus zwei Quadranten bestehende Ast der Aufgabe genügt.

Walton, p. 163.



Figur 274.

11. An den beiden Enden eines über eine glatte Rolle B laufenden Fadens PBQ (Fig. 274) sind zwei Gewichte P und Q befestigt, welche sich in der vertikalen Ebene PBQ bewegen können. Das Gewicht P hängt frei herab, das andere Q liegt auf einer Curve AC in der Ebene PBQ. Unter welchen Bedingungen ist Gleichgewicht?

Es sei der Punkt A in der Vertikalen BX Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, BX Abscissen-, AY Ordinatenaxe, Q eine beliebige Lage des Gewichtes Q auf der Curve, $AM = x$, $MQ = y$, $BP = x'$, $AB = a$, b die Länge des Fadens PBQ.

Für das Gleichgewicht haben wir die drei Bedingungen

$$P\,dx' - Q\,dx = 0, \quad y = f(x), \quad b = x' + \sqrt{(a+x)^2 + y^2},$$

die zweite ist die Gleichung der gegebenen Curve.

Ist nun beispielsweise die Curve eine Parabel mit dem Scheitel im Punkte A, mit AX als Axe, $4a$ als Parameter, dann haben wir

$$y = f(x) = 2\sqrt{ax}, \qquad b = x' + \sqrt{(a+x)^2 + 4ax}.$$

Die Differentiation der letzten Gleichung giebt

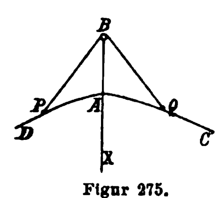
$$0 = dx' + \frac{3a + x}{\sqrt{a^2 + 6ax + x^2}}\,dx,$$

$$-P\frac{3a+x}{\sqrt{a^2+6ax+x^2}}dx+Q\,dx=0,$$

woraus sich ergiebt

$$x=-3a+\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{P}{Q}\right)^2}}.$$

12. Auf zwei in einer vertikalen Ebene liegenden Curven AC, AD (Fig. 275) befinden sich zwei Gewichte Q, P, welche durch einen über eine Rolle B in derselben vertikalen Ebene laufenden Faden verbunden sind. Es soll für eine beliebige Lage von P und Q das Verhältnis derselben so bestimmt werden, dass Gleichgewicht vorhanden ist.



Figur 275.

Mit den unter 11 gewählten Bezeichnungen haben wir, wenn B Anfangspunkt der Coordinaten ist,

$$P\,dx'+Q\,dx=0,\quad y'=f(x'),\quad y=\varphi(x),\quad b=\sqrt{x'^2+y'^2}+\sqrt{x^2+y^2},$$

wovon die beiden mittleren Bedingungen die Gleichungen der Curven sind. Ist beispielsweise AD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Verlängerung von BA liegt, AC ein Parabelbogen, dessen Richtlinie durch B geht, so sind die Gleichungen dieser Curven, wenn c den Radius des Kreises bedeutet,

$$y'^2=2c(x'-a)-(x'-a)^2,\qquad y^2=4a(x-a),$$

folglich ist

$$b=\sqrt{2x'(c+a)-2ac-a^2}+\sqrt{x^2+4ax-4a^2}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$0=\frac{(c+a)\,dx'}{\sqrt{2x'(c+a)-2ac-a^2}}+\frac{(x+2a)\,dx}{\sqrt{x^2+4ax-4a^2}},$$

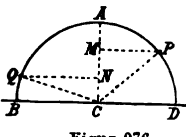
$$0=\frac{(c+a)\,dx'}{BP}+\frac{(x+2a)\,dx}{BQ},$$

also ist

$$\frac{Q}{P}=\frac{dx'}{dx}=\frac{x+2a}{c+a}\,\frac{BP}{BQ},\quad \text{d. i.}\quad \frac{Q}{P}=\frac{x+2a}{c+a}\left(\frac{b}{BQ}-1\right).$$

Daraus ergiebt sich, wenn BQ bekannt ist, das Verhältnis $P:Q$. Sind P und Q gegeben, so erhalten wir x, weil BQ als Funktion von x bekannt ist.

13. Zwei gegebene Gewichte P, Q (Fig. 276) sind durch einen Faden PAQ miteinander verbunden, welcher quer über einen glatten, horizontalen Kreiscylinder gelegt ist. Welches ist die Gleichgewichtslage?



Figur 276.

Der Faden liegt offenbar in einer zur Axe des Cylinders senkrechten Ebene. Ist C der Mittelpunkt des normalen Querschnittes des Cylinders, sein Durchmesser BCD horizontal, AC vertikal, a Cylinderradius, $\measuredangle PCQ = 2\alpha$, welcher durch die gegebene Länge des Fadens bekannt ist, $\measuredangle QCA = \alpha + \vartheta$, also $\measuredangle PCA = \alpha - \vartheta$, $\bar{z}$ die Höhe des Schwerpunktes von P und Q über BD, dann ist, wenn noch PM und QN zu BD parallele Linien sind,

$$(P+Q)\bar{z} = P.CM + Q.CN = Pa\cos(\alpha-\vartheta) + Qa\cos(\alpha+\vartheta),$$

folglich

$$(P+Q)\frac{d\bar{z}}{d\vartheta} = Pa\sin(\alpha-\vartheta) - Qa\sin(\alpha+\vartheta),$$

$$(P+Q)\frac{d^2\bar{z}}{d\vartheta^2} = -Pa\cos(\alpha-\vartheta) - Qa\cos(\alpha+\vartheta) = -(P+Q)\bar{z}.$$

In der Gleichgewichtslage ist aber $\frac{d\bar{z}}{d\vartheta} = 0$, daher

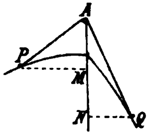
$$Pa\sin(\alpha-\vartheta) - Qa\sin(\alpha+\vartheta) = 0,$$

so dass

$$tg\,\vartheta = \frac{P-Q}{P+Q}\,tg\,\alpha.$$

Hierdurch ist die Gleichgewichtslage, welche, weil $\bar{z}$ ein Maximum ist, nicht stabil ist, bestimmt.

14. Ein Faden von gegebener Länge läuft über eine glatte Rolle A. An den beiden Enden des Fadens sind zwei Gewichte P, Q befestigt, eines derselben kann auf einer gegebenen Curve, in der vertikalen Ebene durch A frei gleiten. Eine zweite Curve in dieser Ebene soll so bestimmt werden, dass bei jeder Lage Gleichgewicht vorhanden ist, wenn auf ihr das andere Gewicht gleitet.



Figur 277.

Lasse sein P, Q (Fig. 277) die beiden Gewichte in einer beliebigen Lage, AN die vertikale Gerade durch A, $AP = \varrho_1$, $AQ = \varrho_2$. Ziehe PM, QN senkrecht zu AN, nimm $AM = x$, $AN = x'$, $\measuredangle PAN = \varphi_1$, $\measuredangle QAN = \varphi_2$. Denken wir uns den beiden Gewichten Verschiebungen entlang zweier kleiner Bögen ihrer entsprechenden Curven erteilt, so ist vermöge des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten

$$P\,dx + Q\,dx' = 0,$$

weil diese Relation für jede Lage des Systemes bestehen muss, so folgt durch Integration

$$Px + Qx' = C,$$

wobei C eine Konstante bedeutet.

Zu Polarcoordinaten übergehend ist jetzt

$$P\varrho_1\cos\varphi_1 + Q\varrho_2\cos\varphi_2 = C. \tag{1}$$

Ausserdem haben wir, wenn l die Länge des Fadens bezeichnet,

$$\varrho_1 + \varrho_2 = l. \tag{2}$$

Ist nun die Curve, auf welcher Q sich bewegt, gegeben, so ist ihre Gleichung

$$f(\varrho_2, \varphi_2) = 0, \qquad (3)$$

wobei $f(\varrho_2, \varphi_2)$ eine bekannte Funktion von ϱ_2 und φ_2 bezeichnet.

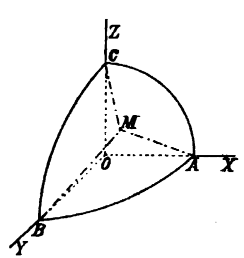
Eliminieren wir aus den Gleichungen (1), (2), (3) die Grössen ϱ_2, φ_2, so ergiebt sich als Gleichung der verlangten Curve

$$\chi(\varrho_1, \varphi_1) = 0,$$

wobei $\chi(\varrho_1, \varphi_1)$ eine Funktion von ϱ_1 und φ_1 bezeichnet.

Johann Bernoulli, Act. Erudit. 1695, Febr. p. 59. Leibnitz, ibid. April, p. 184. L'Hôpital, Act. Erudit. Suppl. Tom. II, sect. 6, p. 289. Fuss, Nova Acta Acad. Petrop. 1788, p. 197. Walton, p. 161.

15. Auf einer Kugelfläche vom Halbmesser a befindet sich ein materieller Punkt M, welcher von den Ecken eines Kugeloktanten direkt proportional der ersten Potenz der Entfernung angezogen wird. Die Gleichgewichtslage des Punktes soll bestimmt werden.



Figur 278.

Es seien (Fig. 278) OX, OY, OZ die durch den Kugelmittelpunkt gehenden, zu einander rechtwinkelige Axen des Coordinatensystemes, A, B, C die anziehenden Ecken des Kugeloktanten, x, y, z die Coordinaten des angezogenen Punktes M, X, Y, Z die drei parallel zu den Axen wirkenden Kräfte, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ die Intensitäten der anziehenden Kräfte in der Einheit der Entfernung, also die auf den Punkt M wirkenden Kräfte $\varepsilon . AM$, $\varepsilon' . BM$, $\varepsilon'' . CM$.

Die Richtungscosinus der Kräfte sind für den Punkt $A: \frac{a-x}{MA}$, $\frac{y}{MA}$, $\frac{z}{MA}$, für den Punkt $B: \frac{x}{MB}$, $\frac{a-y}{MB}$, $\frac{z}{MB}$, für den Punkt $C: \frac{x}{MC}$, $\frac{y}{MC}$, $\frac{a-z}{MC}$, folglich ist

$$X = \varepsilon(a-x) + \varepsilon' x + \varepsilon'' x = \varepsilon a + (-\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'')x,$$
$$Y = \varepsilon y + \varepsilon'(a-y) + \varepsilon'' y = \varepsilon' a + (\varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon'')y,$$
$$Z = \varepsilon z + \varepsilon' z + \varepsilon''(a-z) = \varepsilon' a + (\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'')z.$$

Die Hauptbedingung für das Gleichgewicht ist daher

$$\{\varepsilon a + (-\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'')x\}\delta x + \{\varepsilon' a + (\varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon'')y\}\delta y + \{\varepsilon'' a + (\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'')z\}\delta z = 0. \qquad (1)$$

Hierzu kommt noch die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad (2)$$

womit

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda x\,\delta x + \lambda y\,\delta y + \lambda z\,\delta z = 0. \qquad (3)$$

Wird diese Gleichung (3) zu der (1) addiert und werden die drei Variationen gleich Null gesetzt, so folgt

$$\left.\begin{array}{c}\varepsilon a + (\lambda - \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'')x = 0, \quad \varepsilon' a + (\lambda + \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon'')y = 0,\\ \varepsilon'' a + (\lambda + \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'')z = 0.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Aus den Gleichungen (4) und (3) ergiebt sich nun

$$\frac{\varepsilon^2}{(\lambda - \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'')^2} + \frac{\varepsilon'^2}{(\lambda + \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon'')^2} + \frac{\varepsilon''^2}{(\lambda + \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'')^2} = 1,$$

woraus λ sich finden lässt.

In dem Spezialfalle, wo $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$, also die Intensitäten einander gleich sind, ergiebt sich

$$3\varepsilon^2 = (\lambda + \varepsilon)^2, \quad \text{d. i.} \quad \lambda = \varepsilon \pm \varepsilon\sqrt{3},$$

womit die Gleichungen (4) übergehen in

$$\varepsilon a + (\lambda + \varepsilon)x = 0, \quad \varepsilon a + (\lambda + \varepsilon)y = 0, \quad \varepsilon a + (\lambda + \varepsilon)z = 0,$$

so dass

$$x = y = z = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Der Widerstand der Kugelfläche ist

$$R = 2\lambda\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\lambda a = 2a\varepsilon(1 \pm \sqrt{3}).$$

Im vorliegenden Falle sind demnach zwei, im allgemeinen sechs Gleichgewichtslagen vorhanden.

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

16. Auf einen materiellen Punkt O wirken drei Kräfte, welcher Richtungen durch drei Punkte A, B, C gehen. Die Bedingungen für das Gleichgewicht zu bestimmen.

Die drei Punkte A, B, C müssen sämtlich in einer Ebene liegen, welche den Punkt O enthält, auch sind die relativen Grössen der drei Kräfte A, B, C durch irgend zwei der drei Proportionen gegeben

$B:C :: \sin\sphericalangle COA : \sin\sphericalangle AOB$, $C:A :: \sin\sphericalangle AOB : \sin\sphericalangle BOC$, $A:B :: \sin\sphericalangle BOC : \sin\sphericalangle COA$.

Euler, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751, p. 185.

17. An einem materiellen Punkte wirkt eine beliebige Zahl von Kräften. Die Bedingungen zu finden, welchen ihre Grössen und Richtungen unterworfen sein müssen, damit der Punkt in Ruhe sein kann.

Zieht man durch den Punkt gerade Linien, welche die Kräfte nach Grösse und Richtung darstellen, dann muss, damit der Punkt in Ruhe sein kann, seine Lage zusammenfallen mit dem Schwerpunkte einer gleichen Zahl materieller Punkte, welche man sich in den Eckpunkten dieser geraden Linien angebracht denkt.

Dieses berühmte Gleichgewichtsproblem eines materiellen Punktes ist Leibnitz zu verdanken. (Journal des Savans, 1693; Opera, Tom. III, p. 283). Euler, (Mémoires, de l'Académie de Berlin, 1751), gab eine Demonstration mit Hilfe von Maupertuis „Gesetz der Ruhe", und Lagrange (Mécanique Analytique, Tom. I, p. 106) eine solche durch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Siehe auch Poisson, Traîté de Mécanique, Tom I, No. 67. Ein allgemeineres Kräftetheorem, welches dasjenige von Leibnitz als einen besonderen Fall in sich schliesst, ist durch Chasles (Correspondance Mathématique, Tom. V, p. 106—108, 1829) veröffentlicht worden; siehe Bulletins de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1840, 2me partie p. 261.

Die Gleichgewichtslage des Ringes zu finden.

Die verlangte Lage befindet sich auf einer Hyperbel, deren Asymptoten parallel zu den Axen der Ellipse sind.

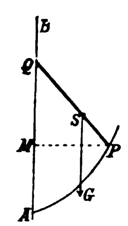
19. Ein Faden von gegebener Länge läuft über eine glatte, feste Rolle; an seine Enden sind zwei Gewichte gefesselt; eines ist fähig, entlang einer geneigten Ebene zu gleiten, welche durch den Mittelpunkt der Rolle geht. Man soll die Curve bestimmen, auf welche das andere Gewicht gelegt sein muss, damit bei jeder Lage der zwei Gewichte Gleichgewicht vorhanden ist.

Der Winkel, welchen die geneigte Ebene mit der Vertikalen macht, sei α, dann wird, wenn die Bezeichnung dieselbe wie in Aufgabe 14 ist, die Gleichung der verlangten Curve sein

$$(P\cos\varphi - Q\cos\alpha)\,\varrho = c - Q\,l\cos\alpha,$$

welche einem Kegelschnitte angehört.

Fuss, Nova Acta Acad. Petrop. 1788.



Figur 279.

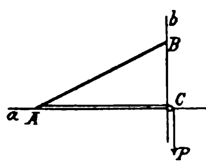
20. Ein Balken PQ (Fig. 279) stützt sich gegen eine glatte vertikale Ebene AB und eine glatte Curve AP in einer Lotebene senkrecht zu der ersteren. Die Gestalt der Curve soll so bestimmt werden, dass der Balken bei allen Lagen in Ruhe bleibt.

Es sei S der Schwerpunkt des Balkens, MP horizontal, $PQ = a$, $SP = c$, $AM = x$, $PM = y$, dann ist die Gleichung der verlangten Curve

$$\frac{(c-x)^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Dieses ist die Gleichung einer Ellipse, ihr Mittelpunkt fällt mit Q zusammen, wenn PQ horizontal ist.

21. Ein homogener, gleichförmiger Stab AB (Fig. 280) ruht auf einer glatten, horizontalen Ebene Ca, und stützt sich gegen eine glatte vertikale Ebene Cb, die Lotebene des Stabes steht auf diesen beiden Ebenen senkrecht. Ein gewichtsloser Faden ACP ist mit dem einen Ende an dem Stabende A befestigt, läuft über eine kleine glatte Rolle bei C und trägt an dem anderen frei herabhängenden Ende ein Gewicht P. Welches ist die Gleichgewichtslage des Stabes?



Figur 280.

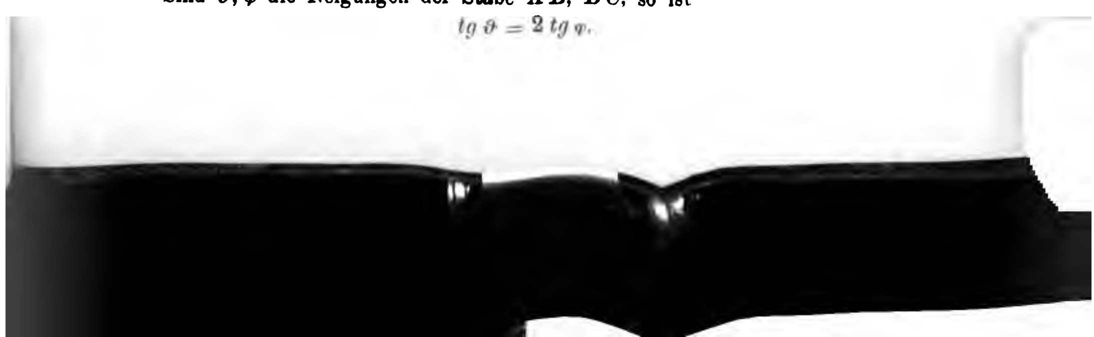
Ist G das im Mittelpunkte des Stabes wirkende Stabgewicht, $\vartheta = \measuredangle BAC$, so ist die Gleichgewichtslage durch die Gleichung bestimmt

$$tg\,\vartheta = \frac{G}{2P}.$$

22. Ein ebenes, gleichseitiges Fünfeck wird von fünf gleichen Stäben AB, BC, CD, DE, EA gebildet, die locker mit einander verbunden sind. Die Ebene des Fünfeckes ist vertikal, der Eckpunkt C der höchste. Die Winkelpunkte B, D des Fünfeckes sind fähig, auf einem glatten, festen, horizontalen Stabe zu gleiten. Man soll die Relation zwischen den Horizontalneigungen der Stäbe AB, BC bestimmen, wenn Gleichgewicht ist.

Sind ϑ, φ die Neigungen der Stäbe AB, BC, so ist

$$tg\,\vartheta = 2\,tg\,\varphi.$$



23. Eine ebene, von einer Parabel begrenzte Platte stützt sich in einer vertikalen Ebene auf zwei feste Punkte in derselben horizontalen Linie. Der Schwerpunkt der Platte liege in der Axe der Parabel, in einer gegebenen Entfernung vom Scheitel Welches ist die Gleichgewichtslage?

Es sei $2a$ der Abstand der zwei Stützpunkte, $4m$ der Parameter, h die Entfernung des Schwerpunktes von dem Scheitel, ϑ die Neigung der Parabelaxe zu der Vertikalen in der Gleichgewichtslage, dann ist dieselbe bestimmt durch die Gleichung:

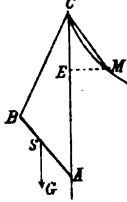
$$\sin\vartheta \left\{ 3a^2 \cos^4\vartheta - 4m(h-m)\cos^2\vartheta + 4m^2 \right\} = 0.$$

24. Ein materieller Punkt wird von zwei Kraftcentren umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angezogen. Zu finden die Gleichung der Fläche, auf welcher er in jeder Lage in Ruhe bleiben kann.

Wenn μ, μ' die absoluten Attraktionskräfte, r, r' die gleichzeitigen Abstände des Punktes von den Centren, a, a' gegebene Werte von r, r' sind, so ist die Gleichung der Fläche

$$\frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} = \frac{\mu}{a} + \frac{\mu'}{a'}.$$

25. An dem Ende B eines Stabes AB (Fig. 281), welcher sich frei um das Ende A in einer vertikalen Ebene drehen kann, ist ein gewichtsloser Faden BCM befestigt. Der Faden läuft bei C in der Vertikalen durch A über eine glatte Rolle und hält mit dem anderen Ende einen schweren Punkt M auf einer glatten Curve CMN in der vertikalen Ebene BAC. Die Gestalt dieser Curve soll so bestimmt werden, dass für alle Lagen des Stabes und des schweren Punktes M das System im Gleichgewichte sein kann.



Figur 281.

Mit $AB = 2a$, $AC = h$, $l =$ der Länge des Fadens BCM, $\varrho =$ der Strecke CM, $m =$ der Masse des Punktes M, $m' =$ derjenigen des Stabes, wird man als Gleichung der verlangten Curve finden

$$m'\varrho^2 + 2(2mh\cos\vartheta - m'l)\varrho = c,$$

wo c eine konstante Grösse ist.

26. Ein Stab geht durch einen festen Ring in der vertikalen Axe einer Umdrehungsfläche und stützt sich in allen Lagen mit einem Ende auf diese Fläche mit Gleichgewicht. Welches ist die erzeugende Curve?

Es sei P ein beliebiger Punkt der Curve, O der Ring, ϑ die Neigung der Linie OP zu der von O aus abwärts gezogenen Vertikalen, $OP = r$, $2a =$ der Länge des Stabes, dann ist die Gleichung der Curve

$$r = a + c\sec\vartheta,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist.

27. Die Ebene einer Parabel ist vertikal, ihre Axe horizontal. Auf die Curve sind zwei durch einen gewichtslosen Faden verbundene Gewichte gelegt, welcher über eine glatte Rolle im Brennpunkte läuft. Die Gleichgewichtsbedingung zu finden.

Sind P, Q die Gewichte, y_1, y_2 ihre Tiefen unter der Axe, dann ist die Gleichgewichtsbedingung durch die Proportion ausgedrückt:

$$P : Q = y_1 : y_2.$$

28. Ein gleichförmiger Stab von der Länge l stützt sich zwischen dem hohlen Bogen einer Ellipse und ihrer kleinen Axe, welche vertikal ist. Die Axenlängen der Ellipse sind $2l$ und l. Welches ist die Gleichgewichtslage?

Der Stab wird bei jeder Horizontalneigung im Gleichgewichte sein.

29. Zwei Gewichte P, Q sind an die Enden eines gewichtslosen Fadens gefesselt und liegen auf einer Parabel mit vertikaler Axe. Welches ist die Gleichgewichtslage?

Wenn x_1, x_2 die Entfernungen der Gewichte P, Q lotrecht vom Parabelscheitel sind, $4m$ der Parameter der Curve ist, dann werden die Gewichte ruhen, sobald die Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{P^2}{x_2} - \frac{Q^2}{x_1} = \frac{Q^2 - P^2}{m}.$$

30. Zu finden diejenige Stelle der Fläche

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1,$$

wo ein materieller Punkt ruhen wird, welcher von irgend einer nach dem Coordinatenursprunge gerichteten Kraft angezogen wird.

Der gesuchte Punkt ist durch die Gleichungen gegeben

$$\frac{x}{a^3} = \frac{y}{b^3} = \frac{z}{c^3} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^6 + b^6 + c^6}}.$$

31. Ein gerader Cylinder von elliptischer Basis, welche die Halbaxen a und b besitzt, stützt sich zwischen zwei glatten Ebenen. Die Ebenen stehen senkrecht auf einander und ihre Schnittlinie ist parallel zu der horizontalen Axe des Cylinders. Die Gleichgewichtslage des Cylinders soll bestimmt werden: 1) wenn die Neigung einer der Ebenen grösser als $arc\left(tg = \frac{a}{b}\right)$, 2) wenn die Neigung jeder Ebene kleiner als $arc\left(tg = \frac{a}{b}\right)$ ist.

Es sei α die Horizontalneigung einer der Ebenen, φ die Neigung der grossen Axe der Ellipse des Cylinderquerschnittes zu der anderen Ebene. Unter der ersten Hypothese werden zwei Gleichgewichtslagen stattfinden, nämlich dann, wenn die grosse Axe des Querschnittes zu einer der zwei Ebenen parallel ist. Unter der zweiten Annahme sind drei Gleichgewichtslagen vorhanden, nämlich zwei solche wie im ersten Falle und eine, welche durch die Gleichung bestimmt ist

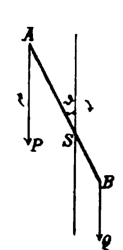
$$\cos 2\varphi = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cos 2\alpha.$$

16—31. Walton, p. 164—168.

Zweiter Abschnitt.

Stabiles und labiles Gleichgewicht.

1. An den Ecken eines gleichschenkeligen Dreieckes in vertikaler Ebene sind drei Gewichte aufgehangen. Das Dreieck kann sich drehen um eine durch seinen Schwerpunkt gehende horizontale Axe, die parallel zu seiner Basis ist. Welches sind die Gleichgewichtslagen, wenn die zwei an den Endpunkten der Basis aufgehangenen Gewichte einander gleich sind und jedes derselben grösser als das dritte Gewicht ist? Welches ist der Charakter des Gleichgewichtes?

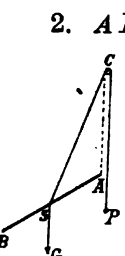


Figur 282.

Es sei A der Scheitel, AB die geometrische Axe des Dreieckes (Fig. 282), S sein Schwerpunkt, $AB = 3a$, P das kleinere, Q eines der grösseren Gewichte, welche in B vereinigt gedacht werden können, ϑ die Neignng von AB zu der Vertikalen. Die Momente von $2Q$ und P um S sind absolut genommen $2Qa\sin\vartheta$, und $2Pa\sin\vartheta$, daher ist das resultierende Moment $2a(Q-P)\sin\vartheta$, genommen in der Richtung der Pfeile. Dieses Moment, genommen von $\vartheta = 0$, bis $\vartheta = \pi$ wirkt stets in derselben Richtung, sofern ϑ nicht thatsächlich 0 oder π ist, in welchen Fällen das Moment verschwindet. Folglich sehen wir, dass Gleichgewicht mit $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ stattfindet, im ersteren Falle ist dasselbe stabil, im letzteren labil.

Walton, p. 169.

2. AB (Fig. 283) ist ein um ein Charnier A in seiner vertikalen Ebene beweglicher Stab; C ist eine kleine, glatte Rolle in der vertikalen Linie durch A; $AC = AS$, wo S der Schwerpunkt von AB ist. Ein gewichtsloser bei S befestigter Faden läuft über die Rolle C und trägt an seinem frei herabhängenden Ende ein Gewicht P. Welches ist die stabile und die labile Gleichgewichtslage des Systemes?



Figur 283.

Es sei $SA = a = AC$, $l =$ der Länge des Fadens SCP, $G =$ dem Gewichte des Stabes AB, $\sphericalangle SCA = \vartheta$, $\bar{x} =$ der Vertikaldistanz des Schwerpunktes von P und des Stabes unter der horizontalen Ebene durch C. Durch die Geometrie ist $CP = l - 2a\cos\vartheta$, der Abstand des Schwerpunktes S unter der Horizontalen durch C gleich $a + a\cos 2\vartheta$, folglich ist vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes eines Systemes von Körpern

$$(P+G)\bar{x} = P(l - 2a\cos\vartheta) + Ga(1 + \cos 2\vartheta).$$

Nun muss sein, wenn hier Gleichgewicht ist, $\frac{dx}{d\vartheta} = 0$, und daher, mit $u = G\cos 2\vartheta - 2P\cos\vartheta$, $\frac{du}{d\vartheta} = 0$, also

$$\frac{du}{d\vartheta} = -2G\sin 2\vartheta + 2P\sin\vartheta = 0,$$

mithin
$$\sin\vartheta(2G\cos\vartheta - P) = 0.$$

Folglich ist es für das Gleichgewicht nötig, dass $\sin\vartheta = 0$, also $\vartheta = 0$, oder $\cos\vartheta = \frac{P}{2G}$ ist.

Die nochmalige Differentiation von u giebt

$d\vartheta^2$

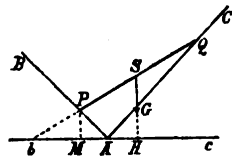
Damit haben wir, wenn $\vartheta = 0$, $\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = -4G + 2P$, folglich wird $\frac{d^2 u}{d\vartheta^2}$ und daher $\frac{d^2 \bar{x}}{d\vartheta^2}$ positiv oder negativ und mithin $\bar{x}$ ein Minimum oder ein Maximum sein, je nachdem $P \gtrless 2G$ ist. Es giebt sonach, wenn $P > 2G$, $\vartheta = 0$ eine labile und, wenn $P < 2G$ ist, eine stabile Gleichgewichtslage. Ferner erhalten wir, wenn $\cos\vartheta = \frac{P}{2G}$ ist,

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = -4G(2\cos^2\vartheta - 1) + 2P\cos\vartheta = \frac{4G^2 - P^2}{G}.$$

Mit $2G > P$ ist also hier $\frac{d^2 u}{d\vartheta^2}$ und daher $\frac{d^2 \bar{x}}{d\vartheta^2}$ positiv, sonach die Höhe des Schwerpunktes von P und G ein Maximum, mithin wird die Lage eine labile Gleichgewichtslage sein. Wenn $2G < P$ ist, wird $\cos\vartheta$ unmöglich sein, die einzige Gleichgewichtslage wird die labile, durch $\vartheta = 0$ gegebene, sein.

Walton, p. 169.

3. Ein gleichförmiger Stab PQ (Fig. 284) befindet sich mit seinen Enden auf zwei glatten, geneigten Ebenen. Zu finden, ob seine Gleichgewichtslage eine stabile oder eine labile ist.



Figur 284.

Es sei S der Schwerpunkt des Stabes PQ; von P und S ziehe man PM, SH rechtwinkelig zu der horizontalen Ebene bAc durch A, ferner sei $\measuredangle BAb = \alpha$, $\measuredangle CAc = \beta$, $PS = a = QS$, $\vartheta =$ der Horizontalneigung von PQ, $SH = \bar{z}$. Mit diesen Bezeichnugen erhalten wir durch die Geometrie

$$\bar{z} = a\sin\vartheta + PM = a\sin\vartheta + AP.\sin\alpha = a\sin\vartheta + 2a\frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha,$$

$$\bar{z} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\left\{\sin(\beta-\alpha)\sin\vartheta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\vartheta\right\}.$$

Nun wird, wenn $\bar{z}$ ein Maximum oder ein Minimum ist,

$$u = \sin(\beta-\alpha)\sin\vartheta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\vartheta$$

ein Maximum oder ein Minimum sein, folglich

$$\frac{du}{d\vartheta} = \sin(\beta-\alpha)\cos\vartheta - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\vartheta = 0,$$

und daher für das Gleichgewicht

$$tg\,\vartheta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin\alpha \sin\beta}$$

eine positive Grösse, wenn — wie angenommen werden soll — $\beta > \alpha$ ist.

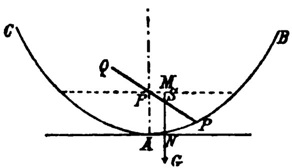
Die zweite Differentiation von u giebt

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} = -\sin(\beta - \alpha)\sin\vartheta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\vartheta,$$

womit sich zeigt, dass, weil ϑ offenbar kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, $\frac{d^2 u}{d\vartheta^2}$ negativ sein, und dass der Schwerpunkt in der Gleichgewichtslage sich in seiner Maximalhöhe befinden wird; folglich wird das Gleichgewicht labil sein.

Walton, p. 171.

4. Ein hohles, glattes Rotationsparaboloid ABC (Fig. 285) ruht mit seinem Scheitel auf einer horizontalen Ebene so, dass seine Axe fest und vertikal ist. In dasselbe wird ein Stab PQ so gestellt, dass er sich mit dem unteren Ende P gegen die innere Fläche des Paraboloides stützt und durch den Brennpunkt F gehalten wird. Welches ist die Gleichgewichtslage und die Beschaffenheit des Gleichgewichtes?



Figur 285.

S sei der Schwerpunkt des Stabes PQ, in welchem das Stabgewicht G angreift, $AF = a$, $PS = b$, $PF = r$, $\sphericalangle AFP = \vartheta$, $MS \parallel AF$ und $= \bar{z}$.

Die Polargleichung der Parabel ist mit F als Pol

$$r = \frac{2a}{1 + \cos\vartheta}, \qquad \text{also} \qquad \cos\vartheta = \frac{2a}{r} - 1.$$

Ferner haben wir

$$\bar{z} = MS = FS \,.\, \cos\vartheta = (r - b)\cos\vartheta = (r - b)\left(\frac{2a}{r} - 1\right),$$

$$\bar{z} = 2a - r - \frac{2a}{r} b + b.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt

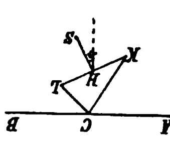
$$\frac{d\bar{z}}{dr} = \frac{2ab}{r^2} - 1, \qquad \frac{d^2\bar{z}}{dr^2} = -\frac{4ab}{r^3}.$$

Für den Gleichgewichtszustand muss aber $\frac{d\bar{z}}{dr} = 0$ sein, mithin

$$r = \sqrt{2ab}.$$

Damit ist die Gleichgewichtslage bestimmt; weil die zweite Ableitung von $\bar{z}$ nach r negativ ist, sehen wir, dass MS ein Maximum, folglich das Gleichgewicht stabil ist.

5. Eine quadratische Platte hängt mittelst eines gewichtslosen Fadens in einer vertikalen Ebene. Der Faden läuft über einen glatten Stift und seine Enden sind an zwei zu einer Kante der Platte symmetrisch gelegenen Punkten befestigt. Die Ruhelagen und die Beschaffenheit des Gleichgewichtes zu bestimmen.


Figur 286.

Es sei S (Fig. 286) der Schwerpunkt der Platte, KCL der Faden, welcher über den Stift C läuft und an der Platte in den Punkten K, L befestigt ist, SH rechtwinkelig zu KL, und ACB eine unbegrenzte horizontale Linie. Ferner sei $l =$ der Länge des Fadens, $KL = a$, $c =$ der Länge einer Seite des Quadrates, $\vartheta =$ der Neigung von SH zu der Vertikalen, $\frac{1}{2} u =$ der Tiefe von S unter AB. Weil $CK + CL = l$ ist, so ist der Ort von C bezüglich KL eine Ellipse, von welcher K, L die Brennpunkte sind. Es lässt sich geometrisch leicht nachweisen, dass bei der Bewegung von KL stets der Aufhängepunkt C der höchste Punkt dieser Ellipse, so dass die Horizontale AB eine Tangente an die Curve ist. Für den Abstand des Mittelpunktes H der Seite KL von dieser Tangente erhalten wir, da die grosse Axe der Ellipse gleich l, ihre Excentricität gleich $\frac{a}{l}$ ist, $\frac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2 \cos^2\vartheta}$. Weil ferner der Abstand des Schwerpunktes S von H eine konstante Grösse ist, so ist die Bedingungsgleichung

$$u = c\cos\vartheta + \sqrt{l^2 - a^2\cos^2\vartheta}.$$

Die zweimalige Differentiation dieser Gleichung giebt

$$\frac{du}{d\vartheta} = \sin\vartheta\left\{\frac{a^2\cos\vartheta}{\sqrt{l^2 - a^2\cos^2\vartheta}} - c\right\},$$

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \cos\vartheta\left\{\frac{a^2\cos\vartheta}{\sqrt{l^2 - a^2\cos^2\vartheta}} - c\right\} - \frac{l^2a^2\sin^2\vartheta}{\sqrt{(l^2 - a^2\cos^2\vartheta)^3}}.$$

Nun erhalten wir, mit $\frac{du}{d\vartheta} = 0$,

$$\vartheta = 0, \qquad \text{oder} \qquad \cos\vartheta = \frac{cl}{a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Wenn $\vartheta = 0$ ist, $\qquad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{a^2}{\sqrt{l^2 - a^2}} - c,$

wenn $\cos\vartheta = \frac{cl}{a\sqrt{a^2+c^2}}$ ist, $\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = -\frac{l^2c^3\sin^2\vartheta}{a^4\cos^3\vartheta} =$ einer negativen Grösse.

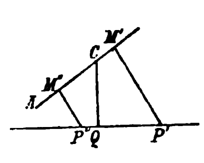
Daraus erkennen wir, dass, wenn $l < \frac{a}{c} \sqrt{a^2 + c^2}$ ist, hier drei Gleichgewichtslagen vorhanden sein werden, wenn $l > \frac{a}{c} \sqrt{a^2+c^2}$, nur eine.

Im ersten Falle, wo $\frac{a^2}{\sqrt{l^2 - a^2}} - c =$ einer positiven Grösse ist, entspricht $\vartheta = 0$ einer Lage von labilem, $\cos\vartheta = \frac{c\,l}{a\sqrt{a^2 + c^2}}$ zwei Lagen von stabilem Gleichgewichte.

Im zweiten Falle, wo $\frac{a^2}{\sqrt{l^2 - a^2}} - c =$ einer negativen Grösse ist, entspricht $\vartheta = 0$ einer stabilen Gleichgewichtslage.

Walton, p. 172.

6. Wenn eine elliptische Platte so auf zwei in einer horizontalen Linie liegende Zapfen gestellt wird, dass ihre Ebene vertikal ist, dann wird hier Gleichgewicht sein, wenn die Stützen mit den Endpunkten eines Paares konjugierter Durchmesser zusammenfallen. Welches sind die Grenzen, zwischen denen der Abstand der Zapfen liegen muss, damit diese Gleichgewichtslage möglich sein kann? Beweise, dass die Lage eine solche von labilem Gleichgewichte ist.



Figur 287.

Es seien (Fig. 287) P', P'' die zwei Zapfen; C sei der Mittelpunkt der Ellipse, CA ihre grosse Halbaxe. Ziehe $P'M'$, $P''M''$ rechtwinkelig zu AC, CQ rechtwinkelig zu $P'P''$. Lasse sein: $P'P''=c$, $CQ=u$, $CM'=x'$, $P'M'=y'$, $CM''=x''$, $P''M''=y''$. Damit erhalten wir, CQ zu der Differenz der Projektionen von CM', $P'M'$ auf seine Richtung gleichend,

$$u = \frac{x' + x''}{c}\,y' - \frac{y' - y''}{c}\,x' = \frac{x''y' + x'y''}{c}.$$

Setzen wir nun $x' = a\cos\varphi'$, $y' = b\sin\varphi'$, $x'' = a\cos\varphi''$, $y'' = b\sin\varphi''$, wo a und b die Halbaxen der Ellipse bedeuten, so ist mit $\varphi' + \varphi'' = \psi$

$$c\,u = a\,b\sin(\varphi' + \varphi'') = a\,b\sin\psi.$$

Damit u ein Maximum oder ein Minimum sein kann, muss sein

$$c\frac{du}{d\psi} = a\,b\cos\psi = 0,$$

folglich $\psi = \frac{\pi}{2}$, welches zeigt, an eine bekannte Eigenschaft der Ellipse denkend, dass P', P'' Endpunkte konjugierter Durchmesser der Ellipse sein müssen.

Weiter ist

$$c\frac{d^2 u}{d\psi^2} = -ab\sin\psi = -ab.$$

Mithin ist u ein Maximum, also das Gleichgewicht labil.

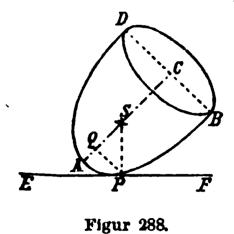
Überdies haben wir

$$c^2 = (x' + x'')^2 + (y' + y'')^2 = a^2(\cos\varphi' + \cos\varphi'')^2 + b^2(\sin\varphi' + \sin\varphi'')^2,$$
$$c^2 = a^2(\cos\varphi' + \sin\varphi')^2 + b^2(\sin\varphi' - \cos\varphi')^2 = a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\sin 2\varphi'.$$

Daraus geht hervor, dass die Werte von c zwischen $a\sqrt{2}$ und $b\sqrt{2}$ liegen müssen.

Walton, p. 193.

7. Bestimmung der Gleichgewichtslage eines Rotationsparaboloides, wenn sich der Körper auf eine horizontale, glatte Ebene stützt.



Figur 288.

Es sei (Fig. 288) $ABCD$ das Paraboloid, welches sich im Punkte P auf die Ebene EF stützt, AC seine Axe, die mit der Stützebene den Winkel ϑ einschliessen mag, PQ senkrecht AC, PS vertikal. Für den Gleichgewichtszustand muss die Lotlinie durch P den in der Axe des Paraboloides liegenden Schwerpunkt S treffen. Mit $AC = a$, $BC = b$ ist der Parameter der erzeugenden Parabel gleich $\frac{b^2}{a}$, also $QS = \frac{b^2}{2a}$, daher

$$QP = \frac{b^2}{2a}\operatorname{cotg}\vartheta,\quad AQ = \frac{\overline{QP}^2}{\frac{b^2}{a}} = \frac{b^2}{4a^2}\operatorname{cotg}^2\vartheta,$$ folglich erhalten wir

$$AS = AQ + QS = \frac{b^2}{4a}(\operatorname{cotg}^2\vartheta + 2),$$

und weil auch, nach der Lehre vom Schwerpunkte, $AS = \frac{2}{3}a$ ist, so folgt die Bedingungsgleichung

$$\frac{2}{3}a = \frac{b^2}{4a}(\operatorname{cotg}^2\vartheta + 2),$$

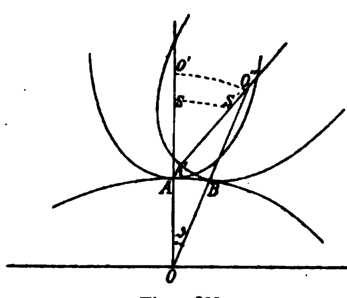
woraus

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \sqrt{\frac{8a^2}{3b^2} - 2},$$

so dass die verlangte Lage gefunden ist.

Mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nimmt $\operatorname{cotg}\vartheta$ seinen kleinsten Wert an, alsdann ist $\frac{8a^2}{3b^2} - 2 = 0$, also $a = \frac{b}{2}\sqrt{3}$. Ist mithin $a \leqq \frac{b}{2}\sqrt{3}$, so kann das Paraboloid nur dann im Gleichgewichte sein, wenn seine Axe vertikal steht.

8. Ein Körper mit einer konvexen Oberfläche ruht auf einem anderen mit einer ebensolchen Oberfläche. Es soll untersucht werden, ob das Gleichgewicht stabil, labil oder indifferent ist.



Figur 289.

Es sei OAO' (Fig. 289) die Normale der beiden in dem Punkte A sich berührenden Flächen, in welcher der Schwerpunkt S des oberen Körpers liegt, wenn er in Ruhe ist. Ferner seien O, O' die Krümmungsmittelpunkte der Durchschnittskurven beider Oberflächen mit einer durch OO' gelegten Ebene für den Punkt A, $AO = \varrho$, $AO' = \varrho'$, $O'S = l$, $OS = h =$ der Höhe des Schwerpunktes S des oberen Körpers über der horizontalen Ebene durch O.

Wird der obere Körper um den sehr kleinen Winkel ϑ verrückt, so dass OBO'' die neue Lage der gemeinschaftlichen Normalen beider Körper, A' die neue Lage des ursprünglichen Berührungspunktes, dann ist

$$h = (\varrho + \varrho')\cos\vartheta - l\cos(\vartheta + \sphericalangle A'O''B),$$

und weil $\sphericalangle AO''B = \frac{A'B}{\varrho'} = \frac{\varrho\vartheta}{\varrho'}$,

$$h = (\varrho + \varrho')\left(1 - \frac{l}{\varrho}\right) - \left\{(\varrho + \varrho') - \frac{l}{\varrho'^2}(\varrho + \varrho')^2\right\}\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Mithin ist h ein Maximum oder Minimum, je nachdem

$$l \lessgtr \frac{\varrho'^2}{\varrho + \varrho'}, \quad \text{oder} \quad AS \gtrless \varrho' - l \gtrless \frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'}.$$

Das Gleichgewicht ist mithin stabil, labil oder neutral, je nachdem

$$AS \lesseqgtr \frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} \text{ ist.}$$

Wenn die Oberfläche des unteren Körpers konkav ist, so haben wir ϱ negativ zu nehmen.

Ist die Stützfläche, also die Oberfläche des unteren Körpers eine Ebene, dann haben wir $\varrho = \infty$ zu nehmen, was giebt $\frac{\varrho\varrho'}{\varrho + \varrho'} = \frac{\varrho'}{1 + \frac{\varrho'}{\infty}} = \varrho'$, so dass in diesem Falle das Gleichgewicht stabil, labil oder indifferent, je nachdem

$$AS \lesseqgtr \varrho' \text{ ist.}$$

Ist die untere Fläche des oberen Körpers eine Ebene, dann muss $\varrho' = \infty$ genommen werden. Das Gleichgewicht ist in diesem Falle stabil, nicht stabil oder neutral, je nachdem

$$AS \lesseqgtr \varrho \text{ ist.}$$

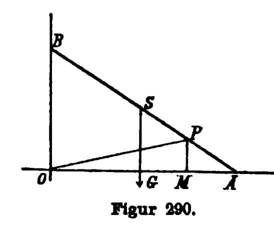
9. Ein Stück eines Umdrehungsparaboloides, dessen Dichtigkeit sich ändert wie die Flächen seiner Kreisschnitte, steht mit seinem Scheitel auf einer horizontalen Ebene. Zu finden die Länge seiner Axe, wenn das Gleichgewicht indifferent ist.

Bezeichnet c die Länge der Axe, so kann leicht bestimmt werden, dass der Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel gleich $\frac{3}{4}c$ ist, und da der Krümmungsradius für den Scheitel gleich p ist, wenn $2p$ den Parameter hedeutet, muss sein

$$\frac{3}{4}c = p, \quad \text{womit} \quad c = \frac{4}{3}p \text{ folgt.}$$

Walton, p. 191.

10. Die Endpunkte eines gleichförmigen, schlanken, schweren Stabes AB sind mit einer horizontalen und einer vertikalen Ebene in Berührung. Die Lotebene durch den Stab ist senkrecht auf diesen zwei Ebenen. Im Durchschnittspunkte O dieser drei Ebenen befindet sich das Centrum einer anziehenden Kraft, ihre Intensität ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung, in dem Schwerpunkte des Stabes ist sie gleich der halben Schwerkraft. Welches ist die Gleichgewichtslage und welches ist die Art des Gleichgewichtes?



Figur 290.

Es sei (Fig. 290) S der Schwerpunkt des Stabes AB, P ein beliebiger Punkt desselben, O das Attraktionscentrum, OP die Verbindungslinie von O und P, PM rechtwinkelig zu der Horizontalen OA, $AS = a = BS$, $AP = s$, $OP = r$, $PM = y$, $\measuredangle OAB = \vartheta$, die Masse der Längeneinheit des Stabes Masseneinheit.

Die Attraktion auf ein Element δs des Stabes ist die vertikal abwärts wirkende Kraft $g\,\delta s$ und die nach dem Centrum O hin gerichtete Kraft $\frac{1}{2}g\frac{a^2}{r^2}\delta s$. Indem wir hier die Bezeichnung adoptieren, welche wir bei der Erklärung des Prinzipes von Maupertuis gebraucht haben, wird sein

$$\Pi = \delta^{-1}d^{-1}\left\{g\,\delta s\,dy + \frac{1}{2}g\frac{a^2}{r^2}\delta s\,.\,dr\right\}$$

also

$$d\Pi = g\,\delta^{-1}(\delta s\,dy) - \frac{1}{2}a^2 g\,d\,\delta^{-1}\frac{\delta s}{r}.$$

Nun ist aber durch die Geometrie

$$y = s\,.\sin\vartheta, \qquad dy = s\,.\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

folglich $\delta^{-1}(\delta s\,dy) = \delta^{-1}(s\,\delta s\cos\vartheta\,d\vartheta) = \delta^{-1}(s\,\delta s)\cos\vartheta\,d\vartheta$,

und mithin, da die Grenzen der Integration unverkennbar 0 und $2a$ sind,

